

三点曲げを受ける切欠積層ばりの 大変形理論に基づくはく離解析*

戸谷 眞之*¹, 小野 茂*²
大納 亮一*³, 桐岡 健*¹

Analyses of Delamination of Notched Laminated Beams by Three-Point Bend Test Based on the Theory of Large Deflection

Masayuki TOYA, Shigeru ONO,
Ryoichi OHNOU, and Ken KIRIOKA

A fracture mechanics-based study is presented on delamination of notched laminated beams by a three-point bend test. The model crack is T-shaped; namely it consists of an interface crack and a notch normal to the beam surface, and the delamination is identified with the extension of the interface crack. Based on the assumption that the specimen behaves like a beam with a reduced section of length of interface crack, the compliance of the specimen is derived by using theory of large deflection of beams, i.e., the problem is treated as that of elastica. The energy release rate and the condition for delamination are then obtained based on the Griffith's energy balance concept. It is found that the form of the delamination condition expressed in terms of the length of the interface crack and the deflection at the point of loading is equal to that derived from simple beam theory.

Key Words: Fracture Mechanics, Delamination, Laminated Beam, Three-Point Bend Test, Large Deflection, Energy Release Rate

1. 緒 言

材料中に存在する弱い面, 例えば比較的強度の低い接着面や界面はむしろ材料の強化に役立つことが知られている⁽¹⁾⁽²⁾. 表面に切欠を入れた積層ばりを引張った場合き裂がはりを横断する方向に進展を開始しても, 接着面に会おうと接着面のはく離が起きる⁽³⁾. いいかえると, き裂は直角方向に進路を曲げられ, その結果はりの破断はまぬがれることになる. このようにしてたとえ表面にき裂が生じてそれが母材中に進展することを防止できるという意味で, 保護層を母材に張り付けることにより材料は強化される. 一方, 接着面が弱すぎれば大規模なはく離(材料の縦割れ)が起きる. また, ある種の木材はりを折り曲げる場合には, き裂は最初に断面を横切る方向に進展し始めるが, ついで長手方向のせん維間の界面のはく離が起り, さらに再び断面を横断する方向に進展するといったジグザグな道すじをたどって最終破断に至る⁽⁴⁾. 見掛けの破壊じん性ははく離に伴う破壊面積の増加により増大

する. 関連した現象として我々が竹の棒を折り曲げる際に経験するせん維のはく離をあげることができよう.

このように材料のはく離の進展挙動, およびこれと関連して接着面(界面)の破壊じん性は材料強度の向上の研究上重要であり, 最近多くの研究者によりとりあげられるようになった⁽⁵⁾. Kanninen⁽⁶⁾およびKendall⁽³⁾⁽⁷⁾は積層ばりの引裂きによるはく離⁽⁶⁾, および引張荷重下での引張り方向に進むはく離を研究した⁽³⁾⁽⁷⁾. 彼らはグリフィスのエネルギー平衡の考え方に立脚してはく離の進展条件を求め, その結果は実験結果をよく説明し得ることを見いだした. 大草⁽⁸⁾⁽⁹⁾, Ashbyら⁽⁴⁾は軸方向がせん維方向と一致するように切り出した木材ばりの曲げによる縦割れを同様な手法で扱った. 大草⁽⁸⁾⁽⁹⁾, Ashbyら⁽⁴⁾の解析は微小たわみを前提としたはりの曲げ理論(以下微小たわみ理論または単純理論と呼ぶ)に基づいている. しかし, 界面の破壊じん性が大きい場合, あるいははりの曲げ剛性が小さい場合には, 大きくはりをたわませなければはく離は進展しない. 大変形領域にまで理論解析を拡張しておけば薄い試料を用いて破壊じん性を測定できることになり有益であると思われる.

本論文において著者らは曲げの大変形(大たわみ)理

* 平成元年3月17日 九州支部第42期総会講演会において講演, 原稿受付 昭和63年6月24日.

*¹ 正員, 鹿児島大学工学部 (〒890 鹿児島市郡元1-21-40).

*² 学生員, 鹿児島大学大学院 [現在 薩南工業高校].

*³ 学生員, 鹿児島大学大学院.

論(またはエラスティカ)を基礎としてはりの三点曲げによるはく離について解析を行う。その結果、着力点におけるたわみ量が支点間距離の1/5程度以下であれば、たわみで表したはく離の進展条件式はAshbyら⁽⁴⁾による式とほとんど変わらないという結論を得、はく離の実験を大たわみ領域において実施する理論的根拠を得た。

2. 解 析

2-1 三点曲げによる同質材からなる積層ばりの変形 本節では図1に示すような大たわみにおける2本の同質材の長方形断面のはりを張り合せた積層ばりの三点曲げによる左右対称はく離を想定し、荷重 P とその着力点におけるたわみ δ の関係を求める。図1に示すように支点間距離を L 、接着部分 AB, DE 間の長さを a 、曲げ剛性を EI_1 、はく離した部分 BD 間のはりの軸の長さを l 、曲げ剛性を EI_2 とする。ここで E はヤング率、 $I_i (i=1, 2)$ は各部の断面二次モーメントである。AB 間の曲げ剛性 EI_1 は BD 間の曲げ剛性 EI_2 より十分大きいものとし、AB 間のたわみを微小たわみ、BC 間のたわみを大たわみとして取扱う。はく離した斜線の部分は応力が解放されて零となっていると仮定すると、この部分ははりの力学的性質には影響を及ぼさないとしよから切り離した状態を考える。すなわち、B, D 点において断面積が急変する階段上のはりの変形を考えることになる。対称性から、解析に当たっては中心点 C の片側だけを考えればよい。さらに B 点においてたわみ曲線はなめらかにつながっているという条件を課した上で、はりを AB, BC 部に分割して解析する。図2(a), (b)にそれぞれ AB, BC 部分の自由体線図を示す。図示のような3種の直交座標系 (X, Y) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) を設定する。X 軸は無負荷のときのはりの軸に一致した y_1, y_2 軸は

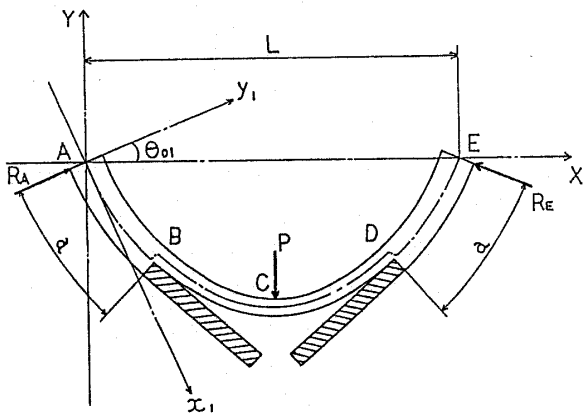


図1 三点曲げによる大変形積層ばりのはく離モデル

それぞれ A, B 点におけるはりの軸に垂直な方向にとるものとする。支点では摩擦は生じないものとする y_1 軸は反力の方向となる。荷重 P が增大するに従って反力の方向は変化するから y_1, y_2 軸は負荷とともに向きを変えることになる。座標軸 X, y_1 および X, y_2 のなす角をそれぞれ θ_{01}, θ_{02} とすると A, B 点における反力は

$$R_A = P / (2 \sin \theta_{01})$$

となる。AB 部分のたわみ曲線は座標系 (x_1, y_1) において次のようになる。

$$EI_1 y_1 = R_A x_1^3 / 6 \dots \dots \dots (1)$$

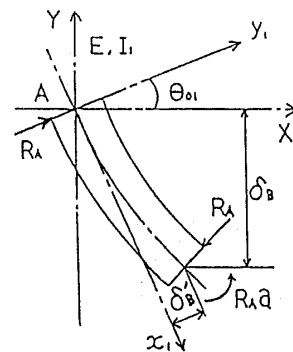
したがって (x_1, y_1) 座標における B 点のたわみ δ'_B は式(1)より

$$\delta'_B = \frac{R_A a^3}{6EI_1} \dots \dots \dots (2)$$

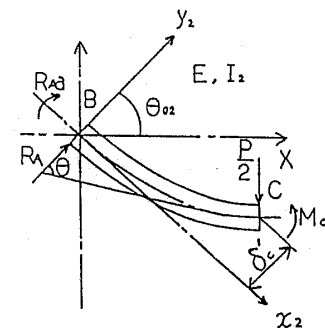
となる。したがって図2(a)からわかるように座標系 (X, Y) における B 点のたわみ δ_B は以下のようになる。

$$\delta_B = (a^2 - \delta_B'^2)^{1/2} \cos \theta_{01} - \delta'_B \sin \theta_{01} \dots \dots \dots (3)$$

次に BC 間のはりのたわみを考える。 θ をたわみ曲線上の任意の点における接線と y_2 とのなす角とする。せん断力は y_2 方向に一致し



(a) 接着部分



(b) はく離部分

図2 はりの変形解析のための自由体線図

$$F_s = -R_A = \frac{-P}{2 \sin \theta_{01}} \dots\dots\dots (4)$$

せん断力の方向ははりの軸と角度 θ をなしていることを考慮すると、たわみ曲線上の長さ dl のはり要素のモーメントの釣合い条件は以下ようになる。

$$\frac{dM}{dl} + F_s \sin \theta = 0 \dots\dots\dots (5)$$

また、変形オイラー・ベルヌーイの仮定に従うとすると単純理論と同様な考え方によりモーメントに対する以下の式を得る。

$$M = -\frac{EI_2}{R} = -EI_2 \frac{d\theta}{dl} \dots\dots\dots (6)$$

ここで R は考えている点におけるたわみ曲線の曲率半径である。式(5)に代入すると

$$EI_2 \frac{d^2\theta}{dl^2} + R_A \sin \theta = 0 \dots\dots\dots (7)$$

上式を積分すると

$$\frac{EI_2}{2} \left(\frac{d\theta}{dl} \right)^2 - R_A \cos \theta = C_0 \dots\dots\dots (8)$$

B点におけるモーメントの値は $R_A a$ であるから式(6)より

$$-EI_2 \frac{d\theta}{dl} \Big|_{\theta=\pi/2} = R_A a \dots\dots\dots (9)$$

式(9)を式(8)に代入するとB点において $\theta = \pi/2$ であるから定数 C_0 の値として次式を得る。

$$C_0 = \frac{(R_A a)^2}{2EI_2} \dots\dots\dots (10)$$

式(10)を式(8)に代入して積分すると l と θ の関係が以下のように求められる。

$$l = \sqrt{\frac{EI_2}{2}} \int_{\theta}^{\pi/2} \frac{d\theta}{f(\theta)} \dots\dots\dots (11)$$

ここで

$$f(\theta) = \left\{ \frac{(R_A a)^2}{2EI_2} + R_A \cos \theta \right\}^{1/2} \dots\dots\dots (12)$$

また、たわみ曲線上の点の座標は $x_2 = \int \sin \theta dl$, $y_2 = \int \cos \theta dl$ で与えられるから

$$x_2 = -a + \sqrt{2EI_2} f(\theta) / R_A \dots\dots\dots (13)$$

$$y_2 = \sqrt{\frac{EI_2}{2}} \int_{\theta}^{\pi/2} \frac{\cos \theta d\theta}{f(\theta)} \dots\dots\dots (14)$$

座標系 (x_2, y_2) における着点Cのたわみ δ_c は式(14)の積分の下限を $\theta = \theta_{02}$ とおいて

$$\delta_c = \sqrt{\frac{EI_2}{2}} \int_{\theta_{02}}^{\pi/2} \frac{\cos \theta d\theta}{f(\theta)} \dots\dots\dots (15)$$

となり、またこの点の x_2 座標は式(13)より

$$x_2 \Big|_{\theta=\theta_{02}} = -a + \sqrt{2EI_2} f(\theta_{02}) / R_A \dots\dots\dots (16)$$

となる。よって座標系 (X, Y) における着点のたわみ δ は式(2), (3), (15), (16)より次式のような

る。

$$\begin{aligned} \delta = & \sqrt{\frac{\sin \theta_{01}}{\bar{P}}} F(\theta_{02}) - \frac{\bar{a}}{2} \cos \theta_{02} \\ & - \sqrt{\frac{\sin \theta_{01}}{4\bar{P}}} \sin \theta_{02} \int_{\theta_{02}}^{\pi/2} \frac{\cos \theta d\theta}{F(\theta)} \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \bar{a}^2 - \left(\frac{\bar{P} \bar{a}^3 \bar{I}}{12 \sin \theta_{01}} \right)^2 \right\}^{1/2} \cos \theta_{02} - \bar{P} \bar{a}^3 \bar{I} / 24 \end{aligned} \dots\dots\dots (17)$$

ここで

$$F(\theta) = \left\{ \frac{\bar{P} \bar{a}^2}{4 \sin \theta_{01}} + \cos \theta \right\}^{1/2} \dots\dots\dots (18)$$

またバーを付けた量は以下に定義される無次元化量である。

$$\begin{aligned} \bar{\delta} = \delta / L, \quad \bar{a} = 2a / L, \\ \bar{P} = \frac{PL^2}{4EI_2}, \quad \bar{I} = \frac{I_2}{I_1} \end{aligned} \dots\dots\dots (19)$$

さて今までのところ未知であった角度 θ_{01} , θ_{02} を決定しよう。AB間のはりにおいて座標系 (x_1, y_1) におけるA, B点のたわみ角はそれぞれ次のようになる。

$$\theta_A = 0, \quad \theta_B = \frac{R_A a^2}{2EI_2} \dots\dots\dots (20)$$

したがって θ_{02} と θ_{01} は以下の関係がある。

$$\begin{aligned} \theta_{02} = \theta_{01} + \theta_A + \theta_B \\ = \theta_{01} + \frac{\bar{P} \bar{a} \bar{I}}{4 \sin \theta_{01}} \end{aligned} \dots\dots\dots (21)$$

曲線部分BDのX軸上への射影が $L/2 - a \sin \theta_{01}$ に等しいという条件から以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} 1 - \bar{a} \sin \theta_{01} \\ = \sqrt{\frac{\sin \theta_{01}}{\bar{P}}} \int_{\theta_{02}}^{\pi/2} \frac{\cos(\theta - \theta_{02}) d\theta}{F(\theta)} \end{aligned} \dots\dots\dots (22)$$

式(21)を式(22)に代入すると θ_{01} に対する方程式を得る。数値解を求めるにあたりまず \bar{I} の値を設定する。適当に選んだ \bar{a} の値に対し $\bar{P} = 0.1$ から出発して0.1刻みに増加させて式(22)に代入すると一連の θ_{01} に関する方程式を得る。各方程式の根をはさみうち法によって求めると、各 \bar{I} , \bar{a} の組に対し θ_{01} が \bar{P} の関数として決定される。 $\bar{I} = 0$, および $1/8$ のときの結果を図3に示す。 $\bar{I} = 1/8$ は同一の断面のはりを張り合せた場合に相当し、 $\bar{I} = 0$ ははく離した部分の曲げ剛性が接着されている部分の曲げ剛性に比し極めて小さい場合に相当する。荷重 \bar{P} の増大に従って θ_{01} は 90° から減少していく様子がわかる。

各 (\bar{P}, \bar{a}) に対して計算した θ_{01} , θ_{02} を式(11)において $\theta = \theta_{02}$ とおいて得られる式、

$$\bar{l} = \frac{l}{L} = \sqrt{\frac{\sin \theta_{01}}{\bar{P}}} \int_{\theta_{02}}^{\pi/2} \frac{d\theta}{F(\theta)} \dots\dots\dots (23)$$

に代入し数値積分することによりはく離部分の長さ \bar{l} が \bar{P} と \bar{a} の関数として計算される。得られた結果を

$$\bar{a} = 1 - (p + q\bar{P} + r\bar{P}^2 + s\bar{P}^3)\bar{I} \quad \dots\dots\dots(24)$$

の形を仮定し、最小二乗法によって係数 p, q, r, s を決定し、その結果表 1 の値が得られた。微小たわみに対しては $\bar{a} + \bar{I} \cong 1$ であるが、大たわみ理論においても $\bar{P} = 1$ 程度でははりの長さは支点間距離より数%長くなる程度であることがわかる。

式(24)を式(22)に代入し θ_{01}, θ_{02} を \bar{I} をパラメータとして計算し、次に式(17)に代入して数値積分を行うと δ が \bar{P} と \bar{I} の関数として計算される。例として $\bar{I} = 1/8, 1/27$ および $1/125$ に対する結果をそれぞれ図 4 (a)~(c) に白丸で示す。一方微小たわみ理論による結果は⁽⁴⁾

$$\bar{P} = k\delta \quad \dots\dots\dots(25)$$

ここで k は以下の式で定義される。

$$k = 12 / \{1 + \bar{a}^3(\bar{I} - 1)\} \quad \dots\dots\dots(26)$$

式(25)をプロットして δ が小さいところ ($\delta < 0.03$) では式(17)の計算結果と非常によく一致することができる。

2.2 ひずみエネルギーと破壊じん性値 変位制御形のはく離実験においては、負荷点変位がある値に到達すると負荷点速度にくらべて十分早い有限距離のはく離の進展が生じ(荷重はこの際減少)、また次に変位を増大させるとはく離が再び進行するというステップワイズな過程が起こる。この場合、外力は仕事をせず、はく離の解析にははりのひずみエネルギーの変化率のみを求めればよい。そのためには図 4 に示される離散した計算点を結ぶなめらかな $\bar{P}-\delta$ 曲線を決定する必要がある。そこで次の関数を仮定する。

$$\bar{P} = k\delta + Q(\bar{I})\delta^2 + R(\bar{I})\delta^3 + S(\bar{I})\delta^4 \quad \dots\dots\dots(27)$$

表 1 式(24)における係数 p, q, r, s の値

\bar{I}	p	q	r	s
1/8	0.999	0.012	-0.057	0.010
1/27	1.003	-0.023	0.028	-0.031
1/125	1.002	-0.018	0.020	-0.028

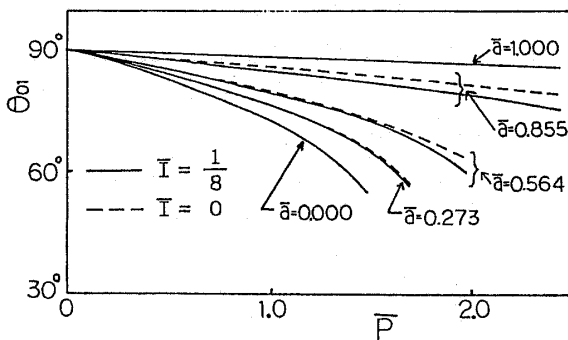
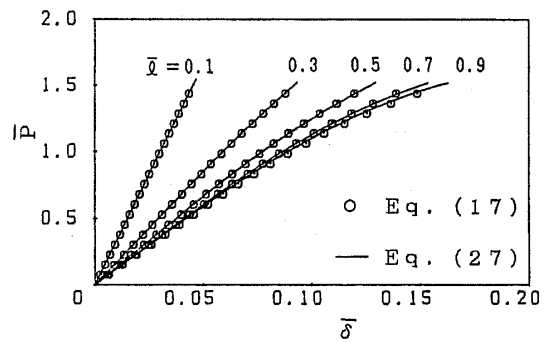
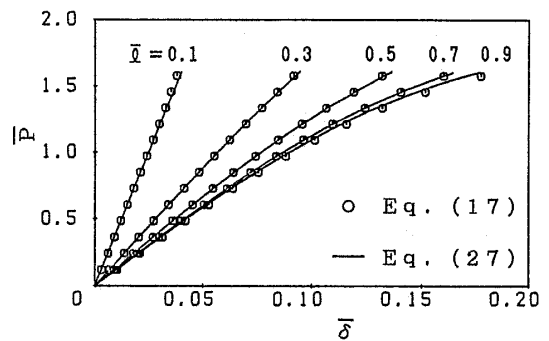


図 3 荷重の増加による反力の方向 θ_{01} の変化

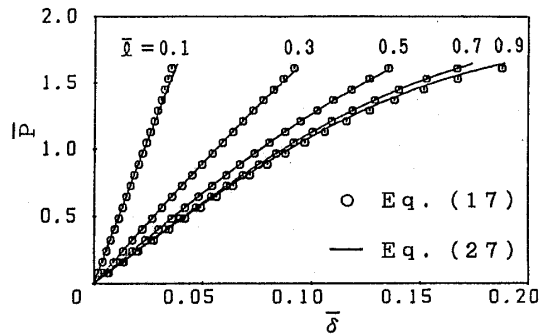
$Q(\bar{I})$ 等を決定するために、図 4 の白丸で表されるデータから計算される量、 $(\bar{P} - k\delta)/\delta^2$ を δ に対してプロットした図の例 ($\bar{I} = 1/8$) を図 5 に示す。複雑さを避けて各点に対応する \bar{I} の値を区別していない。 $\delta = 0$ 付近を除いては各点は \bar{I} の値にほぼ無関係に一つの直線または二次曲線の上に乗ることがわかる。すなわち、 $Q(\bar{I})$ などは実際には \bar{I} に無関係な定数とにおいてよいことが予想され、この仮定のもとに最小二乗法を適用して定数 Q, R, S の値として表 2 に示す結果が得られた。これらの値を用いて式(27)をプロットすると図 4 に実線で示される曲線群が得られるが、実際これらの曲線は非常に精度よく数値解を表していること



(a) $\bar{I} = 1/8$ の場合



(b) $\bar{I} = 1/27$ の場合



(c) $\bar{I} = 1/125$ の場合

図 4 荷重-たわみ曲線

がわかる。

さて、 dl の距離のはく離の進展に対してはりのひずみエネルギーは $(dU_E/dl)dl$ だけ減少する。この減少分は接着面の破壊に費やされるから

$$-\frac{dU_E}{dl}dl = G_c b dl \dots\dots\dots (28)$$

ここで G_c は接着面の破壊じん性値、 b は接着面の幅である。一方

$$\frac{dU_E}{dl} = \frac{d}{dl} \int_0^{\delta} P d\delta = \frac{4EI_2}{L^2} \int_0^{\delta} \frac{d\bar{P}}{d\bar{l}} d\bar{\delta} \dots\dots\dots (29)$$

であるが、前述のように式(27)の右辺第1項にのみ \bar{l} が含まれているから

$$\frac{d\bar{P}}{d\bar{l}} = \frac{dk}{d\bar{l}} \bar{\delta} = \frac{-36\bar{a}^2(1-\bar{l})}{\{1+\bar{a}^3(\bar{l}-1)\}^2} \bar{\delta} \dots\dots\dots (30)$$

となり式(28)から以下の結果を得る。

$$G_c = \frac{72EI_2}{L^2 b} \left\{ \frac{\bar{a}\bar{\delta}}{1-(1-\bar{l})\bar{a}^3} \right\}^2 (1-\bar{l}) \dots\dots\dots (31)$$

上式は微小たわみ理論によるもの⁽⁴⁾と同じであるが、今までの解析により大たわみ領域($\bar{\delta} \cong 0.2$)までの適用が保証されることになる。ただしこの場合、接着部分は微小変形論に従い、また $\bar{P} \leq 1.5$ という条件が課せられていることに注意する必要がある。荷重-変位曲線が直線から大きくずれているにもかかわらず、変位で表したエネルギー-解放率が微小たわみ論に基づく式とまったく同じになるのは興味深い。式(31)の $\bar{\delta}$ のかわりに \bar{P} で表すときには式(27)を用いなければならぬから、この場合は微小たわみ理論による結果とは別な形になる。

表2 式(27)における係数Q, R, Sの値

\bar{l}	Q	R	S
1/8	-0.165	-113.2	82.06
1/27	-0.131	-125.3	180.41
1/125	0.095	-125.2	176.00

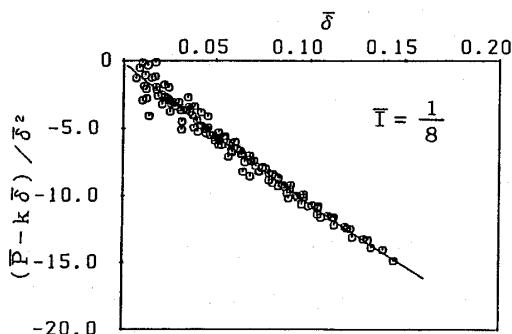


図5 $\bar{\delta}$ に対してプロットした $(\bar{P} - k\bar{\delta})/\bar{\delta}^2$ (実線は最小二乗法による二次曲線)

式(31)を縦軸に \bar{a} 、横軸に $\bar{\delta}$ をプロットすると双曲線、 $\bar{a}\bar{\delta} = \text{const.}$ に類似の曲線となる。すなわち $\bar{\delta}$ の増加(荷重の増加)に対し、 \bar{a} は減少(はく離長さは増大)するから、はく離は前述したようにポップインを繰返しつつ安定的に成長することになる。界面の破壊じん性試験という立場から見ると、一本の試験片から数多くのじん性値のデータが得られることになり、三点曲げ試験は有利な試験法であるといえよう。

3. 議 論

き裂先端近傍における変形はモードI形(開口形)、モードII形(面内せん断形)、モードIII形(縦せん断形)の3種類の基本様式に分けられ、これらは応力拡大係数 K_I, K_{II}, K_{III} で特徴づけられる。これらのモードに対し独立な破壊じん性 $K_{Ic}, K_{IIc}, K_{IIIc}$ (または $G_{Ic}, G_{IIc}, G_{IIIc}$)が定義される。そこで著者らの得た破壊じん性値がどのモードに対応するかが問題となる。ところが図1に示すはく離の端部、すなわち界面き裂端をはさむはりの上下面には垂直応力は働いていないから、モードI形の成分は極めて少なく、変形の大部分はsliding mode、すなわちモードII形であると考えられる。実際にはき裂端は図1にスケッチしたような開口形の変形も有しているが(事実透明な樹脂を張り合せた積層材ではき裂端を視認できる)、Barenblatt⁽¹⁰⁾の解析によれば開口変位がき裂面をなめらかに(cusp状に)閉じさせるような形状であれば、 $K_I = 0$ となる。大草⁽⁸⁾⁽⁹⁾ははりの端部から中立面に沿って長手方向にき裂を入れたはりの三点曲げについて、き裂端近傍の変位および応力拡大係数を有限要素法により解析した。その結果、き裂端近傍での開口変位量ははりの軸方向の相対すべり変位の 10^{-2} 程度であり、 K_{II}/K_I は 10^3 のオーダーであると結論している。厳密には著者らのモデルの応力拡大係数の解析を行ったうえで結論を下すべきであろうが大草のモデルと著者らのモデルの類似性(曲げによるはく離)から同様な結論が著者らのモデルに対しても成り立つとしてよいであろう。したがって本論文で扱った三点曲げによるはく離試験は、き裂が安定に成長するという特性を持つ有効なモードII形破壊じん性試験法として評価してよいと思われる。

なお今までの解析は同質材を張り合せた積層ばりについてのものではあったが、これを異種材料からなる積層ばりに拡張することは極めて簡単である。具体的には微小変形するAB間のはりの解析において曲げ剛性 EI_1 のかわりに組合せはりの曲げ剛性

$$EI_2 + E_0I_0 \dots\dots\dots (32)$$

を用いればよい。ここに E_0 は、はく離するはりのヤング率、 I_2 、 I_0 は積層ばりの中立軸に関する上下のはりの断面二次モーメントである。また大たわみ理論を適用した BD 間のはりの解析には何ら変更する必要はない。

本論文での計算は、弾性ばりという前提のうえに立っていることに注意する必要がある。この前提条件が満足されるためには、はりに生じる最大のひずみ(もちろんはく離点近傍を除いた部分における)が弾性(比例)限度内にあればよい。そこで最大ひずみを計算し本論文の適用限界を考察しよう。与えられた断面において、はりの軸方向の最大の伸び(圧縮)ひずみ(ϵ_m とする)は、はりの上下の面上にて生じ $\epsilon_m = Mh_i / (2EI_i)$ 、($i=1$ または 2) によって与えられる。ここで $i=1$ は接着部分、 $i=2$ ははく離部分を意味する。 h_i は各部のはりの厚さである。外力の増大とともにはく離が進行するから、はく離試験の終わりの段階では、接着部分における最大モーメント(B, D 点におけるモーメント)ははく離部分のそれ(はりの中央点 C におけるモーメント)にくらべて小さい。そこで、 $h_1 > h_2$ ではあるが h_1 が h_2 より極端に厚い場合以外は、問題とすべきひずみは、はりの中点に生じるとしてよいであろう。はりの中点におけるモーメントは、図 1 を参照して以下のようになる。

$$M = EI_2 \bar{P} (1 + 2\delta \cos \theta_{01}) / L \quad \dots\dots\dots (33)$$

したがって最大のひずみは

$$\epsilon_m = \bar{P} h_2 (1 + 2\delta \cos \theta_{01}) / (2L) \quad \dots\dots\dots (34)$$

試験片の寸法 L と h_2 が与えられ、弾性限 ϵ_0 が与えられると条件 $\epsilon_m < \epsilon_0$ より限界の \bar{P} が決定される。例として限界ひずみが 1% の材料を考えると、 $\bar{P} \cong 1.5 (\delta \cong 0.15, \theta_0 \cong 60^\circ)$ の大変形領域まで有効なはく離試験を実施するためには $h_2/L \leq 10^{-2}$ であるような試験片を作製する必要があることがわかる。

4. 結 言

三点曲げによる切欠を有する積層ばりのはく離について解析した。はく離部分は大たわみのはり理論に、

また接着部分ははりの単純理論に従うと仮定し、着力点の変位と荷重の関係を数値解により求めた。次いでグリフィスのき裂進展に関するエネルギー平衡の考えを適用し負荷点の変位一定という条件下ではく離進展条件を求めた。その結果得られた負荷点変位で表したはく離進展条件、式(31)、は Ashby らの単純理論に基づく条件式と同一の形であることがわかった。式(31)は、たわみが支点間距離の 1/5 程度の大きさまでの大変形領域においてははく離試験を実施する理論的根拠を与える。

なお著者らはアクリルはりを張り合せて作製した積層ばりで予備的な実験を行った。その結果、実測した変位は式(17)で計算される理論値と極めてよく一致すること、また $\delta = 0.2$ 近辺まで十分な精度で式(31)が成り立つことをたしかめた。現在、異種材料からなるはりにまで実験を拡張し十分な数のデータをそろえるべく準備中である。

最後に本研究の遂行にあたり鹿児島大学工学部 有富正男氏により有益なご討論をいただいた。ここに記してお礼申し上げる。また大学院生 竹下恵介君の助力にも心から感謝する。

文 献

- (1) Cook, J. and Gordon, J. E., *Proc. R. Soc. London*, Ser. A, 282(1964), 508.
- (2) Kum, D. W., Oyama, T., Wadsworth, J. and Sherby, O. D., *J. Mech. Phys. Solids*, 31(1983), 173.
- (3) Kendall, K., *Proc. R. Soc. London*, Ser. A, 344(1975), 287.
- (4) Ashby, M. F., Eesterling, K. E., Harrysson, R. and Maiti, S. K., *Proc. R. Soc. London* Ser. A, 398(1985), 261.
- (5) 例えば, Johnson, W. S., ed. *Delamination and Debonding of Materials*, *ASTM Spec. Tech. Publ.*, 876(1985).
- (6) Kamminen, M. F., *Int. J. Fract.*, 9(1973), 83.
- (7) Kendall, K., *J. Mater. Sci.*, 11(1976), 638.
- (8) 大草, 鹿児島大学農学部演習林報告, 11(1983), 1.
- (9) 大草, 鹿児島大学農学部学術報告, 33(1983), 33.
- (10) Barenblatt, G. I. *Advan. Appl. Mech.*, vol. 7 (Dryden, H. L., et al. ed.) (1962), 55. Academic Press, New York.

討 論

〔質問〕 末益博志〔上智大学理工学部〕

(1) 式(8) $(1/2)EI_2(d\theta/d1) - R_A \cos \theta = C_3$?

式(14)の積分の下限は θ ?

式(15)の積分の下限は θ_{02} ?

$\bar{I} = 0$ は奇異に見える。はりを扱ったのですから $I_1 \neq 0$ ではないですか。したがって $\bar{I} \rightarrow 0$ または $I_2 = \infty$ としたほうがよくないか。

(2) はく離領域のみ大たわみの問題として解いているが、全領域をエラスチカとして理論を展開するこ

とは難しいのか。

(3) 本論文で述べられているように、式(27)中の高次項 Q, R, S が \bar{l} に独立であると計算が非常に楽になり便利だと考えられるが、もし例えば $I=1/8$ の場合に、各クラック長さ \bar{l} (例えば $0.1 \sim 0.9$) に関して独立に Q, R, S を計算した場合、 Q, R, S の値はそれぞれ最大でどのくらい異なってくるのか。

(4) $dk/d\bar{l} \neq -dk/d\bar{a} (\bar{l} + \bar{a} \neq 1)$ となっているが、式(31)の導出には $\bar{l} + \bar{a} = 1$ の関係を用いている。よろしいのか。

議論のところの大草のモデルとは ENF (End-Notched-Flexure) 試験片のことと思われるが、ENF 試験と本試験モデルの場合とでは同じ三点曲げでもはく離に対するメカニズムが全く異なっていると思われる。本試験モデルの場合には $K_1 \sim 0$ とは考えにくく、モード II 形の破壊靱性試験法と考えるのは無理があるのではないか。

〔回答〕 (1) ご指摘のとおりの方が正しい。また、 $I_2 = \infty$ のほうが適当だったかもしれない。

(2) 難しくなると思う。著者らの場合には、 θ_{01} と θ_{02} には式(21)のような簡単な関係式が成り立ち、そのために式(22)の数値解を比較的楽に求めることができた。全領域を大変形理論で扱う場合は θ_{01} と θ_{02} に対する連立方程式を解くことになりこのような簡明さは望めない。

(3) 各クラック長さ \bar{l} に対し独立に Q, R, S を計算すると、各々は \bar{l} に対しかなり違ってくる。特に \bar{l} が小 (≤ 0.2) の場合と $\bar{l} \geq 0.3$ で値は急変する ($\bar{l} =$

0.2 に対し $Q = -2.31$, $\bar{l} = 0.3$ に対し $Q = 0.86$ 、また S, R に対しても 6, 7 倍の差ででてくる)。

なおつけ加えると、このような事情から当初著者らは \bar{l} に対し Q 等をプロットし、 Q を \bar{l} の多項式として決定することを考えた。しかし $\bar{l} \geq 0.3$ では各 \bar{l} に関し δ 対 $(\bar{P} - k\delta)/\delta^2$ のプロット点は互いに極めて似かよった曲線上に乗った。しかもこれらの曲線は原点近くを通る。一方、図4に見るように $\bar{P} - \delta$ 曲線は $\bar{l} \leq 0.3$ ではほぼ直線 ($\bar{P} = k\delta$) であるから $(\bar{P} - k\delta)/\delta^2 - \delta$ 曲線が原点を通れば、この曲線は $\bar{P} = k\delta$ の良い近似式を与える。以上からすべてのプロット点を1括して近似する式をためして見たところ首尾よく図4に示すように精度の良い曲線群が得られた。

(4) 正確には式(30)は、 $d\bar{P}/d\bar{l} = \delta(dk/d\bar{a})/(d\bar{l}/d\bar{a})$ となる。ここで、式(24)から

$$d\bar{l}/d\bar{a} = -f(\bar{P}) - \{f(\bar{P})\}^2(q + 2r\bar{P} + 3s\bar{P}^2) \times (1 - \bar{a})(d\bar{P}/d\bar{a})$$

ここで

$$f(\bar{P}) = 1/(p + q\bar{P} + r\bar{P}^2 + s\bar{P}^3)$$

$$d\bar{P}/d\bar{a} = 36\bar{a}^2(1 - \bar{l}) / \{1 - \bar{a}^3(1 - \bar{l})\}^2$$

本論文では、 $d\bar{l}/d\bar{a} = -1$ として計算している。近似の程度が最も悪くなるのは、 $\bar{P} = 1.5$, $\bar{a} = 0$ の時で $d\bar{l}/d\bar{a} = -1.084$ 、 $\bar{a} = 0.5$ で誤差は 2% 程度となる。

(5) 最近図1の四点曲げについて有限要素法による解析を行いその結果クラック先端にせん断応力と comparable な大きさの垂直応力が働くことを確認した。したがって、ご指摘どおり本モデルをモード II 形の破壊じん性試験とみなす議論は誤りであった。