

2本のすべり線により降伏している 面外せん断クラックの進展[†]

戸 谷 眞 之*

Extension of a Crack Yielding on Two Slip Planes under Anti-Plane Condition

by

Masayuki TOYA

(Faculty of Engineering, Kyoto University, Kyoto)

A study has been made on the extension of an elastic-plastic crack under the condition of anti-plane strain and small scale yielding. Two idealized slip planes, inclined to the crack at angles $\pm\beta\pi$, are assumed to emanate from the crack tip. The crack extension is represented by a branch emanating from the tip in the direction of the original crack. The process of crack propagation consists of two stages. Initially, in the first stage, the length of the slip lines increases with an increase in crack length, since further loading occurs on the slip lines. In the second stage, unloading takes place so that the slip line length remains constant during the propagation. The relevant stress functions were obtained for both stages using the complex variable method. The stress intensity factors were then analyzed. It was found that the fracture load is almost the same as that of a Griffith crack and that for both stages crack extension is unstable, *i. e.*, fracture load decreases as the crack extends.

(Received Feb. 24, 1982)

キー・ワード：弾塑性クラック，応力拡大係数，面外せん断

1 はじめに

よく知られているように弾性クラックの進展の条件にはグリフィスにより定式化されたエネルギー規準と Barenblatt¹⁾理論に代表される最大原子間力規準がある。前者では「クラックの進展による系の力学的エネルギーの減少分（荷重のなした仕事から弾性エネルギーの増加分を引いた残り）は表面エネルギーの増加分に等しい」とする。この規準は「ひずみエネルギー解放率（または応力拡大係数）が限界値を取ればクラックは進展する」とも記述される。一方、後者においては、進展の規準は「クラック先端での応力が理想強度に到達する」という条件で与えられる。どちらの規準も明快で説得力がある。実際、両者の理論は同等であることが Willis²⁾により証明された。しかし解析は周知の如くグリフィス論の方がずっと簡単であり、結局は応力拡大係数（ K 値）の解析に帰せられる。

さて、つぎのステップとしてグリフィス流のエネルギー論を弾塑性クラックに適用したいという要求がある。だがこの試みは Rice³⁾のパラドックスにより阻まれる。

Rice は、もし応力がクラック近傍で有界なら、エネルギー解放率は恒等的に0であることを示した。つまり弾塑性クラックを精密に解析しても、応力、ひずみの特異性がなければその結果をエネルギー不安定の条件には適用できないのである。このことは、無限大の応力という矛盾を取り去った Barenblatt モデルに対してエネルギー論を適用できないということに対応している。また、弾性クラックの場合の理想強度に対応するような明確な規準も弾塑性クラックにはない。（ J 積分や限界き裂開口変位が広く採用されているが、明確さには欠けるように思われる。）他方、クラックの先端で特異性があるモデルをもってきても、直ちにグリフィスのエネルギー規準を適用できるわけではない。エネルギー変化を調べるには、クラックの先端が少し進展したときの応力等を計算しなければならない。しかし、新しくできたクラック表面の近くでは、応力が解放され除荷領域が出現するために、この解析はきわめて困難となる。

弾塑性クラックの解析的研究は数多くあるが、解析が比較的簡単であるという理由で面外せん断クラック（モードIII型クラック）を扱ったものが多い。文献に

† 原稿受理 昭和57年2月24日

* 正会員 京都大学工学部 京都市左京区吉田本町

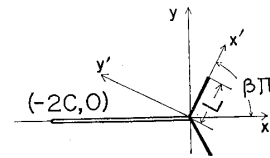
関しては例えば4)5)を参照されたい。興味を中心は、主としてクラック先端近傍での応力、ひずみの解析に向けられているが、上述の除荷の際にあらわれる困難さのゆえに、面外せん断クラックに対してさえもエネルギー解放率を計算した例はまだないようである。

そこでグリフィスクラックが Barenblatt モデルと同じ破壊荷重を与えるという事実を勘案すると、単純な弾塑性クラックモデルを採用しそれにエネルギー論を適用できないものかということが考えられる。DBCSクラックモデルについてのエネルギー論的考察は Goodier *et al.*⁸⁾ や Yokobori *et al.*⁹⁾ によりなされた。しかしこのモデルはもともと Barenblatt モデルの延長の上であり、ひずみエネルギー解放率はそもそも0である。(このことゆえに、限界き裂開口変位が理想強度に対応するものとして提唱されたわけであるが)このような状況を見ると、ひずみエネルギー解放率が0でないような弾塑性クラックモデルを議論するのは興味がある。

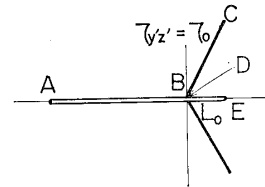
10) 前報において、筆者は2本のすべり線に降伏が限定されている面外せん断クラックモデルを解析し、比較的簡単な解を得た。本論文ではそれを発展させ、このクラックが進展を開始した後の状況を表す簡単なモデルを提出する。このモデルの解は閉じた形で得られる。つぎに、簡単のため破壊じん性がクラック進展量とは無関係に一定と見なせるような単結晶を想定し、破壊荷重とクラック伝ばの安定性について K 値解析を基礎に調べる。

2 クラックのモデル

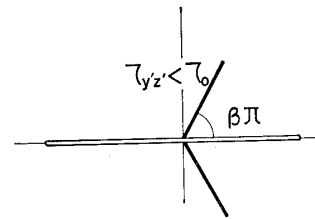
初期弾塑性クラックのモデルを Fig. 1 (a) に示す。無限体のなかに長さ $2c$ のクラックがある。原点がクラックの先端に一致する x, y 座標系を用いる。クラック面は $-2c \leq x \leq 0, y = \pm 0$ で一端は z 軸 (紙面に垂直) と一致する。表面で面力は0、すなわち $\tau_{yz} = 0$ である。無限遠での外部応力 $\tau_{yz} = \tau^\infty$ のもとで、系は面外せん断変形をし、クラック先端からバーガースベクトルが z 軸に平行ならせん転位群が放出される。放出された転位は同一すべり面上に平行に並んでいる。すべり面と $z=0$ 面の交線を以下すべり線と呼ぶ。図のように、2本の長さ L のすべり線が x 軸に対称に $\beta\pi$ の角度で出ているとする。転位は連続的に分布していると仮定し、また転位に対する抵抗力を τ_0 とする。 τ_0 はマクロな塑性論におけるせん断降伏応力と同一と見なすことができる。座標系を反時計方向に $\beta\pi$ だけ回転させ、すべり線と x' 軸が一致するような x', y' 軸を取り、この座標系での応力成分を $\tau_{x'z'}$ 、 $\tau_{y'z'}$ としよう。このとき、上の条件はすべり線上で $\tau_{y'z'} = \tau_0$ となる。同様に、下のすべり線に沿って x'' 軸をとると $\tau_{y''z''} = \tau_0$ 。



(a) Initial crack model.



(b) Loading crack model, $\tau_{y'z'} = \tau_0$ is imposed on the slip-line.



(c) Unloading crack model, $\tau_{y'z'}$ is lower than τ_0 .

Fig. 1. Schematic picture of the crack extension model.

このモデルについてのくわしい解析は前報で行った。すべり線の先端で応力は有界という条件により、すべり面の長さ L は外部応力 τ^∞ と関連づけられた。また、応力分布、すべり線の長さ、き裂開口変位に関しては $\pi\beta = 70^\circ$ とすれば平面ひずみモデルとよく対応することが示された。例えば τ_{yz}/τ_0 を垂直応力成分と引張降伏応力の比、 σ_{yy}/σ_y と読みかえることができる。もともとモード I 型の2本のすべり線モデルは、単結晶および多結晶体に対する実際の観察¹¹⁾¹²⁾に立脚している。したがって Fig. 1 (a) のモード III 型モデルもまた、かなり広い適用範囲をもつことが期待される。他方、以下の Fig. 1 (b)(c) に示されるクラック進展モデルを考え、これに破壊のクライテリオンを適用する際には、破壊じん性値の取り扱い方が問題となる。一般には、じん性値はき裂成長量の関数であるがこの場合には取り扱いが面倒になる。そこでモデルの単純さも考え合せ、以後の議論をじん性値が表面エネルギーに一致する単結晶を想定することにする。(4章を参照)

さて、このような初期クラックが、ある外部応力 τ^∞ のもとで進展を開始し、 L_0 だけ長さが増大したとしよう (Fig. 1 (b)). L_0 の先端の部分 (E) は、原子的尺度の鋭さをもち、弾性クラックとして扱えるとする。 L_0 がそれ程大きくない範囲においては、 L_0 の増大とともにすべり線の長さ L も増大することが予想される。このとき L 上では $\tau_{y'z'} = \tau_0$ が満足されていて、除荷は起っていない。 L_0 のどのような範囲の長さについて

てこのモデルが妥当であるかは次節で調べる。

なお、(b)図は降伏を伴うクラックから鋭いクラックが進展したときのモデルであり、このクラックの先端からさらに BC に平行にすべり線が発生して再び鈍化するか、または本論文での想定のように鈍化せずに鋭いまま進展するかの議論は別の問題である。本論文では、ひとまずクラックが鋭いまま進展する場合を想定し、目的をその際の破壊荷重の計算におく。^{*1}

Fig. 1 (c)はクラックの進展距離が充分大きくなったときのモデルである。この図においては L_0 が增大してもすべり線の長さは変わらない。すべり線全域が除荷領域であって、 $\tau_{y'z'}$ と $\tau_{y''z''}$ は L_0 の増大と共に減少するのみである。しかし、すべり線の上下の面での変位の跳びは不変であり（転位はそのままの位置で動かない）、クラック進展の後にも残留ひずみが残ることになる。このような単純なモデル化についての批判の余地はいくつかある。1例として、Fig. 1 (b)において、すべり線のクラックの自由表面に充分近い部分においては当然、除荷が起っていそうであるのに、 $\tau_{y'z'} = \tau_0$ と仮定している。しかし、このような単純化により解析はかなり見通しの良いものとなる。以下 Fig. 1 (b)を負荷（クラック）モデル、Fig. 1 (c)を除荷（クラック）モデルと呼ぶ。

3 応力関数

まず最初に、Fig. 1 (b)の負荷モデルについて解析しよう。初期クラックは、(b)図の $L_0 = 0$ の場合に還元される。

系は面外せん断変形を受けているので、変位の成分としては xy -面に垂直な w 、応力成分としては τ_{xz} 、 τ_{yz} のみがある。平衡方程式は2次元のラプラスの方程式 $\Delta w = 0$ となる。応力関数 $\varphi(z)$ (ただし $z = x + iy$)^{*2}を用いると、変位は $\varphi(z)$ の実数部とすることができる。応力成分は

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = \mu \frac{d\varphi(z)}{dz} = \mu \frac{\partial w}{\partial x} - i\mu \frac{\partial w}{\partial y} \quad (1)$$

ここで μ は剛性率である。また (x', y') 座標系における応力成分は

$$e^{-i\beta\pi}(\tau_{x'z'} - i\tau_{y'z'}) = \mu d\varphi(z)/dz \quad (2)$$

(x'', y'') 座標系においては $-i\beta\pi$ を $i\beta\pi$ にする。

さて、Fig. 1 (b)のクラックモデルの境界条件は次のように与えられる。

$$\left. \begin{array}{l} \text{無限遠方で} \quad \tau_{yz} = \tau^\infty \\ 0 < x' < L, \quad y' = \pm 0 \quad \text{で} \quad \tau_{y'z'} = \tau_0 \end{array} \right\} \quad (3)$$

*1 クラックが成長しつつあるときの降伏域の広がりには静止クラックの場合のほ程度と小さい¹⁰⁾。したがって BC に平行な第2、第3のすべりが起る場合、その効果を、表面エネルギーの値を修正して表すことが可能となろう（ちょうど線型破壊力学における弾塑性クラックの扱い方と同じように）。

*2 混同の恐れがないので τ_{xy} 等の z と同じ記号を用いる。

$$\left. \begin{array}{l} 0 < x'' < L, \quad y'' = \pm 0 \quad \text{で} \quad \tau_{y''z''} = \tau_0 \\ -2c \leq x \leq L_0, \quad y = \pm 0 \quad \text{で} \quad \tau_{yz} = 0 \end{array} \right\}$$

さらに、すべり線の先端で応力は有界という条件が満たされなければならない。(3)を満足する応力関数は等角写像法を用いて容易に決定できる。

クラックとすべり線からなる z 平面での切れ目を $\zeta (= t + iu)$ 面の単位円の円周に移す写像関数は¹⁴⁾

$$z = m(\zeta) = l\zeta^{-1}(\zeta - e^{i\alpha_1})^\beta(\zeta - e^{i\alpha_2})^{1-\beta}(\zeta - e^{-i\alpha_1})^\beta(\zeta - e^{-i\alpha_2})^{1-\beta} \quad (4)$$

で与えられる。ここで α_1, α_2 は L, L_0 の長さに応じて決まる定数、 l は単位円 $|\zeta| = 1$ 上の点 ($t = -1, u = 0$) がクラックの端点 ($x = -2c, y = 0$) に対応するように選ばれる実数である。 $\zeta = e^{i\theta}$ とおくと式(4)は

$$\left. \begin{array}{l} z = 4lf(\theta) \quad 0 \leq \theta \leq \alpha_1, \quad 2\pi - \alpha_1 \leq \theta \leq 2\pi \\ z = 4lf(\theta)e^{i\beta\pi} \quad \alpha_1 \leq \theta \leq \alpha_2 \\ z = 4lf(\theta)e^{i\pi} \quad \alpha_2 \leq \theta \leq 2\pi - \alpha_2 \\ z = 4lf(\theta)e^{-i\beta\pi} \quad 2\pi - \alpha_2 \leq \theta \leq 2\pi - \alpha_1 \end{array} \right\} \quad (5)$$

ただし

$$f(\theta) = \left| \sin \frac{\theta - \alpha_1}{2} \right|^\beta \left| \sin \frac{\theta - \alpha_2}{2} \right|^{1-\beta} \times \left| \sin \frac{\theta + \alpha_1}{2} \right|^\beta \left| \sin \frac{\theta + \alpha_2}{2} \right|^{1-\beta} \quad (6)$$

となって、実際、 θ が 0 から 2π まで変化するに伴い、 z は Fig. 1 (b)の形を描くことがたしかめられる。Fig. 2 に、Fig. 1 (b)に対応する単位円を示す。対応する点をダッシュをつけてあらわしてある。

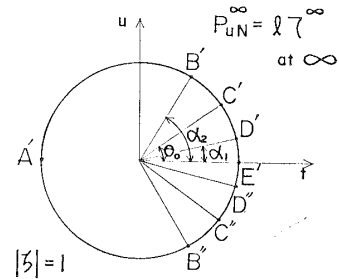


Fig. 2. The $\zeta (= t + iu)$ -plane obtained from the $z (= x + iy)$ -plane of Fig. 1 by the conformal transformation (4).

さて、今後は小規模降伏状態を仮定し、 α_1, α_2 は 0 に近いとする。この近似のもとでは $\zeta = -1$ がクラックの左端 $(-2c, 0)$ に対応するためには

$$l \approx c/2 \quad (7)$$

とおけばよい。

すべり線の先端に対応する偏角 $\theta = \theta_0$ は(6)を θ で微分し、それを 0 とおいて得られる。 $\alpha_1, \alpha_2, \theta$ が小さいときは

$$\theta_0 = \{\beta\alpha_2^2 + (1-\beta)\alpha_1^2\}^{1/2} \quad (8)$$

すべり線の長さ L およびクラックの進展部分の長さ L_0 は

$$L = l\beta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}(\alpha_2^2 - \alpha_1^2) \quad (9)$$

$$L_0 = l\alpha_1^{2\beta}\alpha_2^{2(1-\beta)} \quad (10)$$

となる。

さて ζ 面内の円柱座標系 (r, θ) に関する応力成分を $p_{rN}, p_{\theta N}$ としよう。添字 N は ζ 面に垂直な方向を意味する。式(2)を参照すると ζ 面において

$$\mu\varphi'(\zeta) = (p_{rN} - ip_{\theta N})e^{-i\theta} \quad (11)$$

式(2), (11)を関係式

$$\mu\varphi'(z) = \mu\varphi'(\zeta)/m'(\zeta) \quad (12)$$

に代入すると

$$p_{rN} - ip_{\theta N} = e^{-i\beta\pi}\zeta m'(\zeta)(\tau_{x'z'} - \tau_{y'z'}) \quad (13)$$

が得られる。上のすべり線に対応する ζ に関しては

$$\arg m'(\zeta) = \arg dz - \arg d\zeta = \beta\pi - \theta - \frac{1}{2}\pi$$

であるから $e^{-i\beta\pi}\zeta m'(\zeta)$ は純虚数となる。したがって式(13)から

$$p_{rN} = -ie^{-i\beta\pi}\zeta m'(\zeta)\tau_{y'z'} = -i\tau_0 e^{-i\beta\pi}\zeta m'(\zeta) \quad (14_1)$$

下のすべり線に対しても同様に

$$p_{rN} = -i\tau_0 e^{i\beta\pi}\zeta m'(\zeta) \quad (14_2)$$

また、 $|z| \rightarrow \infty$ で式(4)は $z = l\zeta$ となり、したがって、 $\tau_{yz} = \tau^\infty$ という条件は $p_{uN}^\infty = l\tau^\infty$ となる。

このようにして、境界条件(3)は無遠慮で外部応力 $p_{uN}^\infty = l\tau^\infty$ が働き、単位円の周上の一部($|\alpha_1| < \theta < |\alpha_2|$)で応力 p_{rN} が(14)₁(14)₂で与えられ、残りの部分では $p_{rN} = 0$ という円孔の問題に移される。

x 軸に対称な応力分布 $p_{rN}(\theta)$ が与えられている場合の応力関数の一般式は前報で導出した。それを参照すると求める関数は

$$\zeta\varphi'(\zeta) = \frac{1}{i\pi\mu} \int_{e^{i\alpha_1}}^{e^{i\alpha_2}} \frac{p_{rN}(\zeta') (1-\zeta'^2) d\zeta'}{\zeta' (\zeta' - \zeta) (\zeta' - \zeta^{-1})} - \frac{i\tau_0^\infty}{\mu} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \quad (15)$$

となる。応力は式(11)から

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = \mu\varphi'(\zeta)/m'(\zeta) \quad (16)$$

として求められる。 $m'(\zeta)$ はすべり線や L_0 の端点 C, E 等で0となり、このため通常はこれらの点で応力は特異性をもつ。したがってすべり線の先端で応力が有界という条件は式(16)より、 $\varphi'(\zeta_0) = 0$ ($\zeta_0 = e^{i\theta_0}$)となる。関係式

$$m'(\zeta) = l\zeta^{-2}(\zeta - e^{i\alpha_1})^{\beta-1}(\zeta - e^{-i\alpha_1})^{\beta-1}(\zeta - e^{i\alpha_2})^{-\beta}(\zeta - e^{-i\alpha_2})^{-\beta}(\zeta^2 - 1)(\zeta - e^{i\theta_0})(\zeta - e^{-i\theta_0}) \quad (17)$$

を式(14)₁に代入し、その結果を式(15)に用いる。 α_1, α_2 が0に近いときには、応力有界の条件は結局

$$0 = \zeta_0\varphi'(\zeta_0) = \frac{4i\tau_0^\infty}{\pi\mu} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \theta^2 (\theta^2 - \alpha_1^2)^{\beta-1} (\alpha_2^2 - \theta^2)^{-\beta} d\theta - 2i\tau_0^\infty/\mu \quad (18)$$

となる。 $\alpha_1 = 0$ のときは前報の式(24)と一致する。

4 破壊荷重の計算

応力関数が求められたので、つぎにクラック進展部

分の端(E点)での応力拡大係数を計算しよう。応力の特異性は $m'(\zeta)$ により生じるからE点近傍では $\varphi'(\zeta) \equiv \varphi'(1)$ とおいてよい。式(15)で $\zeta=1$ とおいて

$$\varphi'(1) = -\frac{4i\tau_0^\infty}{\pi\mu} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (\theta^2 - \alpha_1^2)^{\beta-1} (\alpha_2^2 - \theta^2)^{-\beta} (\theta_0^2 - \theta^2) d\theta - 2i\tau_0^\infty/\mu \quad (19)$$

また ζ がFig. 2の E' 点の近くの実軸上にある場合($|\zeta| > 1$)は

$$m'(\zeta) \approx 2\theta_{0V} \sqrt{L_0 \delta x} / (\alpha_1 \alpha_2) = 2\theta_{0V} \alpha_1^{\beta-1} \alpha_2^{-\beta} \sqrt{l\delta x} \quad (20)$$

ここに δx はクラック先端から x 軸に沿ってはかかった距離である。

式(19)の $\varphi'(1)$ は純虚数であり、当然のことながら x 軸上では τ_{yz} 成分のみがあり、それは $L_0 \neq 0$ であれば、式(20)からわかるように、通常距離の平方根に反比例する特異性をもつ。

パラメータが α_1 と α_2 ではわかりにくいので今後これらのかわりに

$$A = \alpha_1/\alpha_2 \quad (21)$$

と

$$L_0 = c\alpha_2^2 A^{2\beta}/2 \quad (22)$$

を用いる。 A は粗っぽく言えば L_0 と L の比をはかる尺度であり、 $A=0$ であれば $L_0=0$ (初期クラック)になり、 $A=1$ であれば $L=0$ (弾性クラック)となる。

応力有界の条件(18)を(19)に用い、つぎに(19)(20)を(16)に代入する。式(19)の積分で変数変換 $y = (\theta^2 - \alpha_1^2)/(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)$ を行って式(21)(22)を用いると応力拡大係数が求められる

$$K = (2\pi^{-1})^{1/2} A^{1-2\beta} \{\beta + (1-\beta)A^2\}^{1/2} N(A) \sqrt{L_0} \tau_0 \quad (23)$$

ここで

$$N(A) = \int_0^1 \frac{y^{\beta-1}(1-y)^{-\beta} dy}{\sqrt{A^2 + (1-A^2)y}} \quad (24)$$

いま、 L_0 は進展しつつあるとしよう。そのときは、 K は臨界値 K_c (破壊じん性値、単結晶においては表面エネルギーに等しい)を取らなければならない。この K_c を $K_c = \sqrt{\pi c} \tau_c$ として表すと τ_c は長さ $2c$ の弾性クラックの破壊応力(荷重)ということになる。 c, τ_c を用いて式(23)を無次元化して

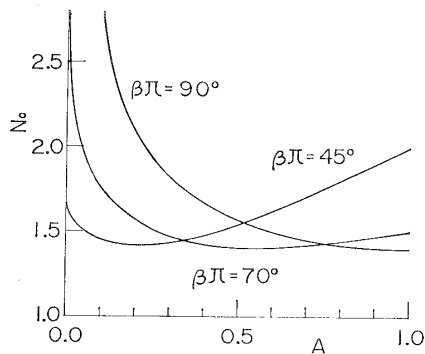
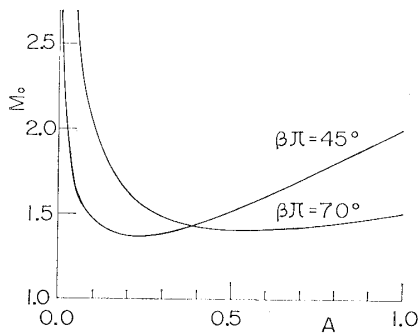
$$\tau_c/\tau_0 = N_0(A) \sqrt{L_0/c} \quad (25)$$

$N_0(A)$ は式(23)の $\sqrt{L_0}$ の係数を $\sqrt{\pi}$ で割ったものである。初期クラックの長さ $2c$ が与えられれば τ_c もわかる。したがって式(25)から任意の L_0/c に対して A が決定される。

一方、すべり線の先端での応力有界の条件を書き直すと

$$\tau^\infty/\tau_0 = (\sqrt{2}/\pi) M(A) A^{-\beta} \sqrt{L_0/c} \quad (26)$$

$$M(A) = \int_0^1 \sqrt{A^2 + (1-A^2)y} y^{\beta-1} (1-y)^{-\beta} dy \quad (27)$$

Fig. 3. Variation of N_0 with A .Fig. 4. Variation of M_0 with A .

式(25)で求められた A を式(26)に代入して外部応力 (破壊応力) が決まる. このようにして τ^∞ が L_0 の関数として決定されるわけである. Fig. 3 および 4 に式(25)の $N_0(A)$ および(26)の $\sqrt{L_0/c}$ の係数 $M_0(A) = (\sqrt{2/\pi})M(A)A^{-\beta}$ を示す. なお, 式(27)の積分はガウス求積法を用いた市販のプログラムを使って YHP 97 で計算した. 相対誤差は 10^{-4} 程度である. Fig. 3 で与えられた L_0/c の値に対して A の値を決定する手順をくわしく説明しよう. まず $(\tau_c/\tau_0)/\sqrt{L_0/c}$ に対応する高さの横線を引く. 最初 L_0 が小さいうちはグラフとの交点であるところの解 A は一つであり, この解は L_0/c が増大するにつれ 0 に近い値からだんだん大きくなる. $(\tau_c/\tau_0)/\sqrt{L_0/c}$ が ≈ 2.0 ($\beta\pi=45^\circ$ のとき) または ≈ 1.5 ($\beta\pi=70^\circ$ のとき) 以下になると解は二つでてくる. 新しく $A=1$ のところからでてきた解は, L_0 の増大と共に減少する. すべり線の長さを式(9)より計算してみると, A の増大はすべり線の長さの減少に対応する. 現モデルではすべり線は長くなる一方であることを前提としている. それゆえ, L_0 の増大に伴い小さくなる方の解を採用すべきである. この解の存在領域は, グラフから見るように案外せまい. 特に $\beta\pi=90^\circ$ はモデルとして成り立たないことがわかる.

最後に得られた A に対応する τ^∞/τ_0 を Fig. 4 から読みとるわけであるが正確な計算には関係式 $\tau^\infty/\tau_0 = M_0(A)/N_0(A)$ を使えばよい. $\beta\pi=70^\circ$ の場合についての結果を Table I に示す.

なお計算の便宜上, L_0 のかわりに A を独立変数に

Table I. Values of fracture load (τ^∞), length of the crack extension (L_0) and the length of the slip lines (L) for the case of $\beta\pi=70^\circ$.

A	τ^∞/τ_0	$(L_0/c)/(\tau_c/\tau_0)^2$	$(L/c)/(\tau_c/\tau_0)^2$
1.0	1.000	0.4416	0
0.9	1.000	0.4609	0.0487
0.8	0.9999	0.4788	0.1051
0.7	0.9996	0.4935	0.1703
0.6	0.9991	0.5027	0.2454
0.5	0.9992	0.5031	0.3316

選んである. グラフの最小値に対応する $A \approx 0.55$ より大きな値に対してのみ数値は有効である.

Table I から二つの主要な結論が出てくる. 一つは, 破壊荷重はクラックが弾性体中にあるとしたときのそれとほとんどかわらないということである. 言いかえるとひずみエネルギー解放率はすべり線の有無に対して鈍感である. このことはまた, 線型破壊力学の基礎的な仮定, 「弾性解析は, 小規模降伏が起っている場合にも十分な精度で適用できる」ということを正当化する. つぎに結論されることは, 塑性変形が生じているにもかかわらず, クラックの進展は不安定である (つまり, 破壊荷重は, 進展距離の増大に伴って減少する) ということである. 現モデルが, 前報で議論したように平面ひずみ状態の良い近似であるという仮定を受け入れると次のように言える. すなわち「平面ひずみ状態においてはクラックの安定成長は起らない。」

5 除荷クラックモデル

L_0 が大きくなって負荷クラックモデルが適用できなくなれば Fig. 1(c) に示した除荷クラックモデルを用いなくてはならない. この除荷モデルは次の手順で作られる. まず, 長さ $2c+L_0$ の負荷クラックの先端に, 仮想的に長さ d の切れ目を入れる. 切れ目を入れて, なお始めと同じ状態を保つために, 最初の応力と同じ大きさの面力を切れ目の上下の面に作用させておく. この面力を徐々に 0 までへらすと長さが $2c+L_0+d$ の除荷クラックモデルができあがる. 全体の応力場等は最初の長さ $2c+L_0$ のクラックによるものと長さ d の部分に面力が作用している長さが $2c+L_0+d$ のクラックによるものとの和である. 我々がいま, 関心があるのは, クラック先端の応力拡大係数だけであるから, 実際は後者のクラックについてのみ考えれば良い.

さて, $-2c < x < L_0+d$ に沿って開いていて, クラック面に働く応力が $-2c < x < L_0$ では 0, $L_0 < x < L_0+d$ では $\tau_{yz}(x)$ であるところのクラックの応力関数は

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = -[-(z+2c)\{z-(L_0+d)\}]^{-1/2}\pi^{-1}$$

$$\times \int_{L_0}^{L_0+d} \frac{[-(x'+2c)\{x'-(L_0+d)\}]^{1/2}}{z-x'} \tau_{yz}(x') dx' \quad (28)$$

先端 $x=L_0+d$ での応力拡大係数は式(28)に $z=L_0+d$ を代入し

$$K = \frac{(2/\pi)^{1/2}}{(2c+L_0+d)^{1/2}} \int_{L_0}^{L_0+d} \left(\frac{x'+2c}{L_0+d-x'} \right)^{1/2} \tau_{yz}(x') dx' \quad (29)$$

$\tau_{yz}(x')$ は負荷クラックが作る応力分布である。再び式(15)(16)に帰って $\tau_{yz}(x')$ を計算しよう。 ζ が実軸上にあり $\theta \ll 1$ であれば

$$\frac{\zeta'^2-1}{(\zeta'-\zeta)(\zeta'-\zeta^{-1})} \approx -\frac{2i\zeta\theta}{(\zeta-1)^2+\zeta\theta^2} \quad (30)$$

したがって

$$\begin{aligned} \tau_{yz} &= \left[-\frac{4\tau_0 l}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{(\theta^2-\alpha_1^2)^{\beta-1} (\alpha_2^2-\theta^2)^{-\beta} (\theta^2-\theta_0^2)\theta^2 d\theta}{(\zeta-1)^2+\zeta\theta^2} \right. \\ &\quad \left. + l\tau^\infty(1+\zeta^{-2}) \right] / m'(\zeta) \quad (31) \end{aligned}$$

式(31)において

$$\theta^2 = \alpha_2^2 \{A^2 + (1-A^2)t\} \quad (32)$$

と変数変換をし、得られた結果を式(29)に代入し、さらに $x'=m(\zeta)$ と変数変換をする。結局

$$\begin{aligned} K &= \frac{(2/\pi)^{1/2}}{(2c+L_0+d)^{1/2}} \left(\frac{2\tau_0 l}{\pi} \right) \\ &\quad \times \left[\int_1^{\zeta_a} R(\zeta) \left\{ \frac{\pi\tau^\infty}{2\tau_0} (1+\zeta^{-2}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (1-A^2)\alpha_2\zeta^{-1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \int_0^1 \frac{\{T(t)\}^{1/2} t^{\beta-1} (1-t)^{-\beta} (t-\beta) dt}{(\zeta-1)^2/(\zeta\alpha_2^2)+T(t)} \right\} d\zeta \right] \quad (33) \end{aligned}$$

ここで

$$R(\zeta) = [\{m(\zeta)+2c\}/\{m(\zeta_a)-m(\zeta)\}]^{1/2} \quad (34)$$

$$T(t) = A^2 + (1-A^2)t \quad (35)$$

また、 ζ_a は $L_0+d=m(\zeta_a)$ によって定義される、クラックの先端の座標に対応する ζ -面の座標であって、 ζ_a が1に近づくとき d も0になる。 $\zeta_a \rightarrow 1$ で K は式(29)と一致し、また $\zeta_a \gg 1$ のときは長さが $2c+L_0+d$ の弾性クラックの K に一致することが確かめられる。

前節で求めたところによると $\beta\pi=70^\circ$ に対しては $A \approx 0.55$ であった。いま、 $\tau_c/\tau_0=10^{-1}$ とすると、Table I より $L_0/c \approx 0.005$ となり、 $\alpha_2 \approx 0.127$ となる。これらの値を式(33)に代入し種々のクラック先端の座標 ζ_a に対し数値計算を行なった。計算には京都大学計算機センターの FACOM, M200 を使用した。第1項目の積分には SSLII の AQE, 2重積分には AQME なるサブルーテンを用いた。相対誤差は 10^{-4} 以内である。前節と同様、 $K=K_c=\sqrt{\pi c} \tau_c$ とおいてこれを満足する τ^∞/τ_0 を求めた。結果を Fig.5 に示す。横軸はクラック先端の座標であり、 $L_0/c=0.005$ であったから、この点 ($d=0$ に対応する) からグラフが始まっている。なお計算結果は $\zeta_a=0.01$ のときの τ^∞

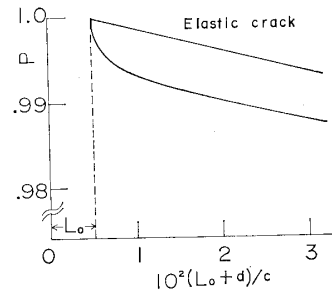


Fig. 5. Variation of normalized fracture load p with the co-ordinates of the crack tip $(L_0+d)/c$.

で割って正規化してある。参考のため弾性クラックについての結果も示してある。 L_0 と同程度の距離のクラックの進展の後には除荷クラックは弾性クラックと同じ振舞いをするということがわかる。Fig.5 から、やはりクラックは不安定に伝ばするということが結論される。

6 考察と結論

いままで扱ってきた弾塑性クラックモデルは単結晶の破壊の開始に直接応用することができる。

結晶がぜい性が延性の二つの内どちらを示すかは、先在クラックの先端からすべりかへき開のどちらが先に起るかによるという考え方がある¹⁵⁾。この考えによると、もし先にすべりが起ればクラックは鈍化し、それゆえ、へき開に必要な高い引張り応力は存在しえない、それゆえ、へき開も起らない。逆に鈍化する前にへき開が開始すればそれはぜい性グリフィスクラックとしてぜい性破壊を起す。

しかしいままでの我々の計算によれば、すべり帯の形成は、クラック伝ばの安定化(延性化)を意味せず破壊荷重も、グリフィスクラックの場合とほぼ同じであった。不安定伝ばの前提として Table I にみるようにクラックは最初は何らかの原因による有限な L_0 の距離の進展が必要であり、このことは、ある意味ではすべり帯はクラックを安定化するとともに、延性を与えるとも解釈できるかも知れない。しかし一たび進展が開始されると、4, 5章の計算が示すとおりそれは急速に進行する。結局単結晶においては、塑性変形がせまいすべり帯に限定されるかぎり、その破壊はぜい性であると結論される。

参考文献

- 1) G.I. Barenblatt, Adv. Appl. Mech., **7**, 55 (1962).
- 2) J.R. Willis, J. Mech. Phys. Solids, **15**, 151 (1967).
- 3) J. R. Rice, "Proceedings of the 1st International Congress on Fracture (Sendai, 1965)", (ed. by T. Yokobori *et al.*), Vol. 1, 309 (1966) Japanese Society

*3 弾性クラックでは $\tau^\infty \propto (2c+L_0+d)^{-1/2}$. $d=0$ のときの τ^∞ で正規化して Fig.5 の直線がえられる。

- for Strength and Fracture, Tokyo
- 4) J. R. Rice, "Fracture: An Advanced Treatise" (ed. by H. Liebowitz), Vol. 2, ch. 3, 191 (1968) Academic Press, New York
 - 5) J. R. Rice, "The Mechanics of Fracture", (ed. by F. Erdogan), 23 (1976) ASME, New York
 - 6) D. S. Dugdale, J. Mech. Phys. Solids, **8**, 100 (1960).
 - 7) B. A. Bilby, A. H. Cottrell and K. H. Swinden, Proc. Roy. Soc. (London) **A272**, 304 (1963).
 - 8) J. N. Goodier and F. A. Field, "Fracture of Solids" (ed. by D. C. Drucker *et al.*), 103 (1963) Wiley (Interscience), New York
 - 9) T. Yokobori, A. Kamei and M. Ichikawa, Rep. Res. Inst. Str. Frac. Mats., Tohoku Univ., Vol. 4, No. 1, 1 (1968).
 - 10) 戸谷眞之, 材料, **31**, 541 (1982).
 - 11) P. Neumann, Acta Met., **22**, 1155 (1974).
 - 12) M. Ia. Leonov, P. M. Vitritskii and S. Ia. Iarema, Dokl. Akad. Nauk. SSSR., **148**, 541 (1963).
 - 13) L. B. Freund and Leslie B. Sills, J. Mech. Phys. Solids, **28**, 49 (1980).
 - 14) C. Darwin, Phil. Mag. Ser. 7, **41**, 1 (1950).
 - 15) 例えば R. Thomson, "The Mechanics of Fracture", (ed. by F. Erdogan), 1 (1976) ASME, New York

書 評

“金属材料データブック”

“非金属材料データブック”

日本規格協会 (編)

(1983年, (財)日本規格協会発刊, B 5 版, 500ページ, 1700円; 237ページ, 1500円)

金属材料データブックは, 鉄鋼および非鉄材料について JIS, AISI, BS, DIN, ASTM, AA などの規格を比較, 対照できる形をとっている。日本, アメリカ, イギリス, 西ドイツの相互の類似材料が一目でわかる形となっており, それに続いて材料の化学成分, 機械的性質が掲載されている。この他, 附録として鉄鋼記号・非鉄金属記号の見方および計量単位換算表がついており, 読者の便宜をはかっている。

非金属材料データブックは, 金属材料とはまったく異った構成となっている。プラスチックについては力学的, 熱的および光学的性質に続いて JIS 規格を述べ, ゴムについては各種ゴムの性質と各国規格の対照表を掲載している。接着剤については分類, 規格に続いて用途別 (建築, 木構造物, 輸送機関, 電機その他) の分類と品質特性が述べられており, 最後に FRP に関する日本工業規格, 防衛規格および国鉄規格が掲載されている。

両データブックとも手元においておくと, 便利な本であるといえる。

(大阪府立大学工学部 山川宏二)