自由辺に点支持を追加した偏平シェルの線形解析

皆川　洋一・坂尾　恵司*

（受理　昭和59年５月31日）

LINEAR ANALYSES OF SHALLOW TRANSLATIONAL SHELLS WITH POINT SUPPORTS ON FREE EDGES

Youichi MINAKAWA and Keishi SAKAO

This paper analyzes shallow translational shells with point supports on free edges and the behavior of the shells in term of static and natural frequency analyses.

序

射影面が矩形であり，４隅が同一平面上にある偏平シェルについて各種の境界条件のもとで静的な解析が行なわれている。[1)~6)]その中で周辺ピン支持の場合，面内変位を完全に拘束するか否かによってその挙動に大きな差があり，特に H. P. シェルでは面内変位を拘束しない場合，曲率の効果が相殺され平板に近い挙動を示すが，面内変位を完全に拘束した場合には，E. P. シェルに近い挙動を示し，その差は顕著であることが報告されている。[3),4)]しかしながら周辺で面内変位を完全に拘束したシェルは現実的な存在ではない。ここでは，平行な２辺に自由辺を有し，他の２辺で面内変位を抑え，ピン支持された偏平シェルを考え，その自由辺にいくつかの点支持を追加したとき，境界条件の変化にともなってシェルの挙動がどのように推移していくかを静的解析及び固有振動数解析を行なうことによって，検討することを目的としている。

この解析では，偏平シェルの汎関数を極値にするためにその第１変分に Galerkin 法を適用し，運動方程式を求め，それに基づいて解析を行なう。[4),5)]さらに自由辺に点支持を追加した場合には付帯条件を有する変分問題となるため Galerkin 法を適用することにより，適宜な近似解が得られる。

本報では，平行な２辺に自由辺を有し，他の２辺で面内変位を抑えピン支持された偏平シェル及び，その自由辺にいくつかの点支持を追加した場合の解析手法を示し，自由辺に面内ローラの点支持を追加していくときの挙動の推移及び周辺でピン支持されたシェルとの比較を行う。

§1　偏平シェルの形状

ここでは射影面が矩形で，４個の隅点が同一平面上にあり，中央面が次式の２次曲面で表わされる偏平シェルを扱う。（図１）

$$Z=\frac{1}{2}\left\{\frac{x(x-a)}{R_x}+\frac{(y-b/2)(y+b/2)}{R_y}\right\} \tag{1}$$

ここに，R_x，R_y は x，y 方向の曲率半径，a，b は x，y 方向の辺長を示す。

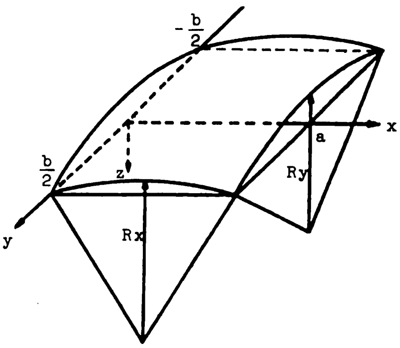
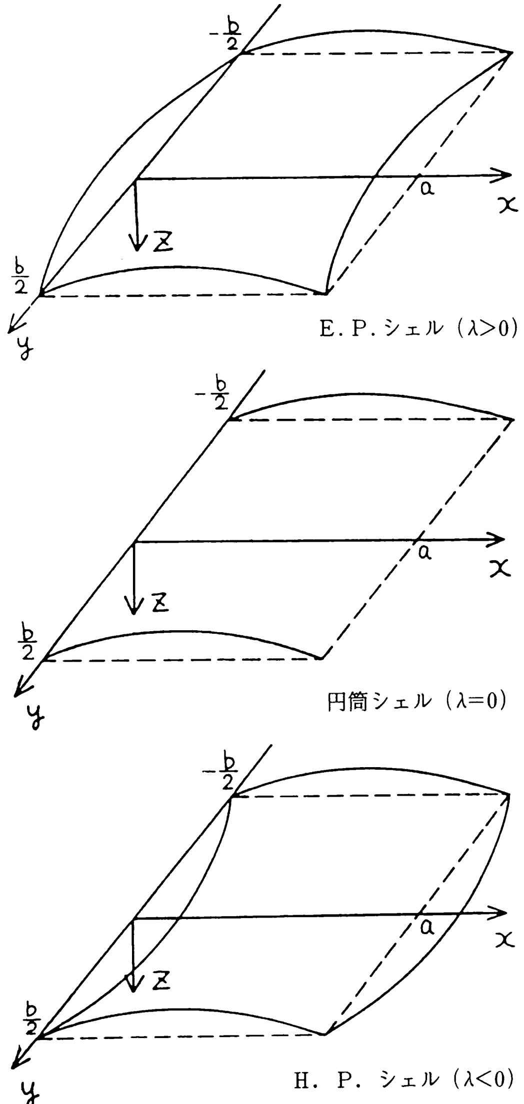


図１

*鹿児島大学大学院建築学専攻

このシェルについて面要素を作る線素の長さと，その線素の $x-y$ 平面への射影の長さが等しいと仮定する。

偏平シェルは，Gauss 曲率比 $\lambda=R_x/R_y$ によって，E. P. シェル ($\lambda>0$)，円筒シェル ($\lambda=0$)，H. P. シェル ($\lambda<0$) と推移していく。(図 2)



E. P. シェル ($\lambda>0$)

円筒シェル ($\lambda=0$)

H. P. シェル ($\lambda<0$)

図 2

§2　Vlasov 型の基礎式

シェル面が有する $y=const$ 曲線の接線方向変位 u，$x=const$ 曲線の接線方向変位 v，及び法線方向変位を w とする。(図 3)

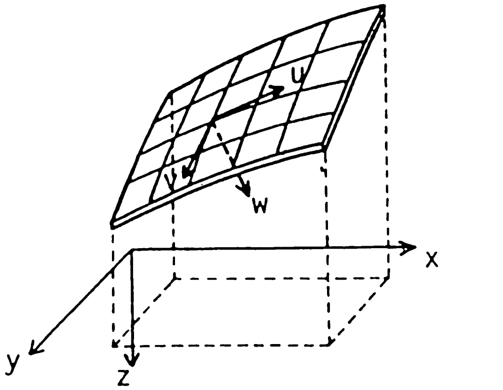


図 3

中立面の x 方向及び y 方向の歪 $\varepsilon_x{}^0$，$\varepsilon_y{}^0$ と面内せん断歪 $\gamma_{xy}{}^0$ として，次式を採用する。

$$\varepsilon_x{}^0=\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{w}{R_x}$$

$$\varepsilon_y{}^0=\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{w}{R_y} \tag{2}$$

$$\gamma_{xy}{}^0=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}$$

面内力 N_x，N_y，N_{xy}，モーメント M_x，M_y，M_{xy}，及び面内変位 u，v は法線方向変位 w，応力関数 ϕ を用いて次式のように表わされる。

$$N_x=\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\qquad N_y=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\qquad N_{xy}=-\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}$$

$$M_x=-D\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right\}$$

$$M_y=-D\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right\}$$

$$M_{xy}=-D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$$

$$V_x=-D\left\{\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right\}$$

$$V_y=-D\left\{\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right\} \tag{3}$$

$$u=\int\left[\frac{1}{Eh}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}-\nu\frac{\partial\phi^2}{\partial x^2}\right)+\frac{w}{R_x}\right]dx$$

$$v=\int\left[\frac{1}{Eh}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-\nu\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)+\frac{w}{R_y}\right]dy \tag{4}$$

ここに，E：ヤング係数，ν：Poisson 比

偏平シェルを支配する汎関数の第 1 変分を応力関数 ϕ，モーメント M_x，M_y，M_{xy}，換算せん断力 V_x，V_y，及び u，v，w で表し次式を得る。

$$\delta\pi=\iint\Bigl(D\nabla^2\nabla^2 w-\frac{1}{R_x}\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}-\frac{1}{R_y}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$$

$$-\mathrm{P}+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\Big)\delta w dxdy$$

$$+\int\Big(-\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\delta v+\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\delta u+\mathrm{M}_y\frac{\partial\delta w}{\partial y}-\mathrm{V}_y\delta w\Big)dx$$

$$+\int\Big(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\delta u-\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\delta v-\mathrm{M}_x\frac{\partial\delta w}{\partial x}+\mathrm{V}_x\delta w\Big)dy \quad (5)$$

ここに，D：平板の曲げ剛性，h：シェル厚

ρ：質量密度，P：法線方向分布外力

(2)式の u, v を消去して得られる適合条件式を応力関数 ϕ を用いて表すと次式となる。

$$\frac{1}{\mathrm{E}h}\nabla^2\nabla^2\phi+\frac{1}{\mathrm{R}_x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{1}{\mathrm{R}_y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \quad (6)$$

(5)式から得られる Euler の方程式と(6)式が法線方向変位 w, 及び応力関数 ϕ で表される Vlasov 型の偏微分方程式である。

§3　自由辺を有する偏平シェルの解析

図1に示すシェルにおいて $y=\pm b/2$ を自由辺とし，$x=0$, a では面内変位を拘束し，ピン支持されたシェルを扱う。ここでは，$x=a/2$, $y=0$ に関して対称変形する場合について解析する。

解析手法は，法線方向変位 w に関して支持辺では幾何学的境界条件を満足し，自由辺での境界条件を導入できるように仮定する。この仮定した変位 w を用いて(6)式の適合条件式より応力関数 ϕ の一般解を厳密に求め，(5)式の境界項が0となるように応力関数を定め，(5)式を0とするために Galerkin 法を適用して，離散化された運動方程式を誘導する。

この偏平シェルの境界条件は次式のようになる。

$x=0$, a で　$w=\partial^2 w/\partial x^2=0$, $u=v=0$ (7-a, b)

$y=\pm b/2$ で　$\mathrm{M}_y=\mathrm{V}_y=0$, $\mathrm{N}_y=\mathrm{N}_{xy}=0$ (7-c, d)

法線方向変位の仮定は，(7-a)式の境界条件を満足し，$x=a/2$, $y=0$ に関して対称な変形を表わすものとする。さらに，条件 $\mathrm{M}_y=\mathrm{V}_y=0$ をも満足するような変位関数を仮定するのは困難なため，それらの条件が導入できるように未定係数を追加しておく。よって，法線方向変位 $w(x, y)$ を次式のように仮定する。

$$w(x,y)=\sum_m\Big(\mathrm{B}_1{}^m\cosh\frac{m\pi}{a}y+\mathrm{B}_2{}^m\frac{m\pi}{a}y\sinh\frac{m\pi}{a}y\Big)\sin\frac{m\pi}{a}x$$
$$+\sum_m\Big(w_{mo}+\sum_n w_{mn}\cos\frac{n\pi}{b}y\Big)\sin\frac{m\pi}{a}x \quad (8)$$

ここに，m は奇数，n は偶数をとる。

(8)式を(6)式に代入し，応力関数 ϕ の特解 ϕ_p を次式のように求める。

$$\phi_p(x,y)=\frac{\mathrm{E}ha^2}{\mathrm{R}_x}\Big[\sum_m\Big[\frac{1}{8}\Big\{(1-\lambda)\mathrm{B}_1{}^m+(1+\lambda)\mathrm{B}_2{}^m\Big\}\frac{y^2}{a^2}\sinh\frac{m\pi}{a}y\Big(x-\frac{a}{2}\Big)\cos\frac{m\pi}{a}x$$
$$-\frac{m\pi}{24a^3}\mathrm{B}_2{}^m(1-\lambda)\Big\{y\sinh\frac{m\pi}{a}y\Big(x-\frac{a}{2}\Big)^2\sin\frac{m\pi}{a}x-2y^2\cosh\frac{m\pi}{a}y\Big(x-\frac{a}{2}\Big)\cos\frac{m\pi}{a}x\Big\}\Big]$$
$$+\sum_m\Big\{w_{mo}\frac{\lambda}{m^2\pi^2}+\sum_n w_{mn}\frac{(\gamma^2n^2+\lambda m^2)}{(\gamma^2n^2+m^2)^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{b}y\Big\}\sin\frac{m\pi}{a}x\Big] \quad (9)$$

ここに，$\gamma=a/b$

ϕ の斉次解 ϕ_h を次式のように仮定する

$$\phi_h(x,y)=\frac{\mathrm{E}ha^2}{\mathrm{R}_x}\Big[\sum_m\Big(\mathrm{C}_1{}^m\cosh\frac{m\pi}{a}y+\mathrm{C}_2{}^m\frac{m\pi}{a}y\sinh\frac{m\pi}{a}y\Big)\sin\frac{m\pi}{a}x+\sum_n\Big\{\mathrm{D}_1{}^n\cosh\frac{n\pi}{b}\Big(x-\frac{a}{2}\Big)$$
$$+\mathrm{D}_2{}^n\frac{n\pi}{b}\Big(x-\frac{a}{2}\Big)\sinh\frac{n\pi}{b}\Big(x-\frac{a}{2}\Big)\Big\}\cos\frac{n\pi}{b}y+\frac{1}{2a^2}\Big(x-\frac{a}{2}\Big)^2\mathrm{K}_1+\frac{1}{2b^2}y^2\mathrm{K}_3$$
$$+\frac{1}{a^4}\Big\{\Big(x-\frac{a}{2}\Big)^4-3\Big(x-\frac{a}{2}\Big)^2y^2\Big\}\mathrm{K}_3\Big] \quad (10)$$

(10)式中の代数関数は Fourier 級数展開に Gibbs 現象が生じることを防ぐため，及び展開する関数の平均値を零にするために導入する。

応力関数の一般解 $\phi=\phi_p+\phi_h$, w を(3), (4)式に代入し，$u(x, y)$, $v(x, y)$, $\mathrm{N}_y(x, y)$, $\mathrm{N}_{xy}(x, y)$, $\mathrm{M}_y(x, y)$, $\mathrm{V}_y(x, y)$ をそれぞれ次式のように求める。

$$u(x,y)=\frac{a}{R_x}\Big[\sum_m\Big[\Big[\frac{1}{8m\pi}(1-\lambda)\Big[\Big\{2\cosh\frac{m\pi}{a}y+(1+\nu)\frac{m\pi}{a}y\sinh\frac{m\pi}{a}y\Big\}\frac{m\pi}{a}\Big(x-\frac{a}{2}\Big)\sin\frac{m\pi}{a}x$$

$$+\Big\{2\cosh\frac{m\pi}{a}y+(1-\nu)\frac{m\pi}{a}y\sinh\frac{m\pi}{a}y\Big\}\cos\frac{m\pi}{a}x\Big]-\frac{1}{m\pi}\cosh\frac{m\pi}{a}y\cos\frac{m\pi}{a}x\Big]B_1^m$$

$$+\Big[\frac{1}{8m\pi}(1+\lambda)\Big[\Big\{2\cosh\frac{m\pi}{a}y+(1+\nu)\frac{m\pi}{a}y\sinh\frac{m\pi}{a}y\Big\}\frac{m\pi}{a}\Big(x-\frac{a}{2}\Big)\sin\frac{m\pi}{a}x+\Big\{2\cosh\frac{m\pi}{a}y$$

$$+(1-\nu)\frac{m\pi}{a}y\sinh\frac{m\pi}{a}y\Big\}\cos\frac{m\pi}{a}x\Big]+\frac{1}{24m\pi}(1-\lambda)\Big[\Big\{2\cosh\frac{m\pi}{a}y+(1+\nu)\frac{m\pi}{a}y\sinh\frac{m\pi}{a}y\Big\}$$

$$\times\frac{m^2\pi^2}{a^2}\Big(x-\frac{a}{2}\Big)^2\cos\frac{m\pi}{a}x+2\Big\{(3+\nu)\frac{m\pi}{a}y\sinh\frac{m\pi}{a}y+(1+\nu)\frac{m^2\pi^2}{a^2}y^2\cosh\frac{m\pi}{a}y\Big\}$$

$$\times\frac{m\pi}{a}\Big(x-\frac{a}{2}\Big)\sin\frac{m\pi}{a}x+2\Big\{3\frac{m\pi}{a}y\sinh\frac{m\pi}{a}y+(1-\nu)\frac{m^2\pi^2}{a^2}y^2\cosh\frac{m\pi}{a}y\Big\}\cos\frac{m\pi}{a}x\Big]$$

$$-\frac{1}{a}y\sinh\frac{m\pi}{a}y\cos\frac{m\pi}{a}x\Big]B_2^m-m\pi\Big[(1-\nu)\cosh\frac{m\pi}{a}yC_1^m+\Big\{2\cosh\frac{m\pi}{a}y$$

$$+(1+\nu)\frac{m\pi}{a}y\sinh\frac{m\pi}{a}y\Big\}C_2^m\Big]\cos\frac{m\pi}{a}x\Big]+\sum_n\gamma n\pi\Big[(1+\nu)\sinh\frac{n\pi}{b}\Big(x-\frac{a}{2}\Big)D_1^n$$

$$+\Big\{(1+\nu)\frac{n\pi}{b}\Big(x-\frac{a}{2}\Big)\cosh\frac{n\pi}{b}\Big(x-\frac{a}{2}\Big)-(1-\nu)\sinh\frac{n\pi}{b}\Big(x-\frac{a}{2}\Big)\Big\}D_2^n\Big]\cos\frac{n\pi}{b}y$$

$$+\sum_m\frac{1}{m\pi}\Big[-(\nu\lambda+1)w_{mo}+\sum_n w_{mn}\Big\{\frac{(\gamma^2n^2+\lambda m^2)(\gamma^2n^2-\nu m^2)}{(\gamma^2n^2+m^2)^2}-1\Big\}\cos\frac{n\pi}{b}y\Big]\cos\frac{m\pi}{a}x$$

$$-\frac{\nu}{a}\Big(x-\frac{a}{2}\Big)K_1+\frac{\gamma^2}{a}\Big(x-\frac{a}{2}\Big)K_2-\frac{2}{a^3}\Big\{(1+2\nu)\Big(x-\frac{a}{2}\Big)^3-3\nu\Big(x-\frac{a}{2}\Big)y^2\Big\}K_3\Big] \tag{11}$$

$$v(x,y)=\frac{a}{R_x}\Big[\sum_m\Big[\Big[\frac{1}{8m\pi}(1-\lambda)\Big[\Big\{(1-\nu)\sinh\frac{m\pi}{a}y-(1+\nu)\frac{m\pi}{a}y\cosh\frac{m\pi}{a}y\Big\}$$

$$\times\frac{m\pi}{a}\Big(x-\frac{a}{2}\Big)\cos\frac{m\pi}{a}x-2\Big(\frac{m\pi}{a}y\cosh\frac{m\pi}{a}y-\sinh\frac{m\pi}{a}y\Big)\sin\frac{m\pi}{a}x+\frac{1}{m\pi}\sinh\frac{m\pi}{a}y\sin\frac{m\pi}{a}x\Big]B_1^m$$

$$+\Big[\frac{1}{8m\pi}(1+\lambda)\Big[\Big\{(1-\nu)\sinh\frac{m\pi}{a}y-(1+\nu)\frac{m\pi}{a}y\cosh\frac{m\pi}{a}y\Big\}\frac{m\pi}{a}\Big(x-\frac{a}{2}\Big)\cos\frac{m\pi}{a}x$$

$$+2\Big(\sinh\frac{m\pi}{a}y-\frac{m\pi}{a}y\cosh\frac{m\pi}{a}y\Big)\sin\frac{m\pi}{a}x\Big]-\frac{1}{24m\pi}(1-\lambda)\Big[2(\sinh\frac{m\pi}{a}y-\frac{m\pi}{a}y\cosh\frac{m\pi}{a}y$$

$$+\frac{m^2\pi^2}{a^2}y^2\sinh\frac{m\pi}{a}y\sin\frac{m\pi}{a}x+2\Big\{2\nu\frac{m\pi}{a}y\cosh\frac{m\pi}{a}y+(1+\nu)\frac{m^2\pi^2}{a^2}y^2\sinh\frac{m\pi}{a}y\Big\}\frac{m\pi}{a}\Big(x-\frac{a}{2}\Big)\cos\frac{m\pi}{a}x$$

$$+\Big\{(1+\nu)\sinh\frac{m\pi}{a}y-(1-\nu)\frac{m\pi}{a}y\cosh\frac{m\pi}{a}y\Big\}\frac{m^2\pi^2}{a^2}\Big(x-\frac{a}{2}\Big)^2\sin\frac{m\pi}{a}x\Big]+\frac{1}{m\pi}\Big(\frac{m\pi}{a}y$$

$$\times\cosh\frac{m\pi}{a}y-\sinh\frac{m\pi}{a}y\Big)\sin\frac{m\pi}{a}x\Big]B_2^m-m\pi\Big[(1+\nu)\sinh\frac{m\pi}{a}yC_1^m-\Big\{(1-\nu)\sinh\frac{m\pi}{a}y$$

$$-(1+\nu)\frac{m\pi}{a}y\cosh\frac{m\pi}{a}y\Big\}C_2^m\Big]\sin\frac{m\pi}{a}x\Big]+\sum_n m\pi\Big[(1+\nu)\cosh\frac{n\pi}{b}\Big(x-\frac{a}{2}\Big)D_1^n+\Big\{2\cosh\frac{n\pi}{b}\Big(x-\frac{a}{2}\Big)$$

$$+(1+\nu)\frac{n\pi}{b}\Big(x-\frac{a}{2}\Big)\sin\Big(x-\frac{a}{2}\Big)\Big\}D_2^n\Big]\sin\frac{n\pi}{b}y+\sum_m\Big[(1-\lambda)\frac{y}{a}w_{mo}-\sum_n w_{mn}\frac{1}{\gamma n\pi}$$

$$\times\Big\{\frac{(\gamma^2n^2+\lambda m^2)(m^2-\nu\gamma^2n^2)}{(\gamma^2n^2+m^2)^2}-1\Big\}\sin\frac{n\pi}{b}y\Big]\sin\frac{m\pi}{a}x+\frac{y}{a}K_1-\nu\frac{\gamma^2}{a}yK_2+\frac{2}{a^3}\Big\{3(2+\nu)\Big(x-\frac{a}{2}\Big)^2y-y^3\Big\}K_3 \tag{12}$$

$$N_y(x,y)=\frac{Eh}{R_x}\Big[\sum_m\Big[-\frac{1}{8}\Big\{(1-\lambda)B_1^m+(1+\lambda)B_2^m\Big\}\Big\{2\sin\frac{m\pi}{a}x+\frac{m\pi}{a}\Big(x-\frac{a}{2}\Big)\cos\frac{m\pi}{a}x\Big\}\frac{m\pi}{a}y\sinh\frac{m\pi}{a}y$$

$$-\frac{1}{24}B_2^m(1-\lambda)\Big[\Big\{2\sin\frac{m\pi}{a}x+4\frac{m\pi}{a}\Big(x-\frac{a}{2}\Big)\cos\frac{m\pi}{a}x-\frac{m^2\pi^2}{a^2}\Big(x-\frac{a}{2}\Big)^2\sin\frac{m\pi}{a}x\Big\}\frac{m\pi}{a}y\sinh\frac{m\pi}{a}y$$

$$+2\left\{2\sin\frac{m\pi}{a}x+\frac{m\pi}{a}\left(x-\frac{a}{2}\right)\cos\frac{m\pi}{a}x\right\}\frac{m^2\pi^2}{a^2}y^2\cosh\frac{m\pi}{a}y\Big]-m^2\pi^2\Big(\mathrm{C}_1{}^m\cosh\frac{m\pi}{a}y$$

$$+\mathrm{C}_2{}^m\frac{m\pi}{a}y\sinh\frac{m\pi}{a}y\Big)\sin\frac{m\pi}{a}x\Big]+\sum_n\gamma^2n^2\pi^2\Big[\cosh\frac{n\pi}{b}\left(x-\frac{a}{2}\right)\mathrm{D}_1{}^n+\Big\{2\cosh\frac{n\pi}{b}\left(x-\frac{a}{2}\right)$$

$$+\frac{n\pi}{b}\left(x-\frac{a}{2}\right)\sinh\frac{n\pi}{b}\left(x-\frac{a}{2}\right)\Big\}\mathrm{D}_2{}^n\Big]\cos\frac{n\pi}{b}y-\sum_n\Big\{\lambda w_{mo}+\sum_n\frac{(\gamma^2n^2+\lambda m^2)m^2}{(\gamma^2n^2+m^2)^2}w_{mn}\cos\frac{n\pi}{b}y\Big\}\sin\frac{m\pi}{a}x+\mathrm{K}_1$$

$$+6\left\{\frac{2}{a^2}\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{y^2}{a^2}\right\}\mathrm{K}_3 \tag{13}$$

$$\mathrm{N}_{xy}(x,y)=\frac{\mathrm{E}h}{\mathrm{R}_x}\Big[\sum_m\Big[\frac{1}{8}\Big\{(1-\lambda)\mathrm{B}_1{}^m+(1+\lambda)\mathrm{B}_2{}^m\Big\}\Big(\sinh\frac{m\pi}{a}y+\frac{m\pi}{a}y\cosh\frac{m\pi}{a}y\Big)\Big\{\cos\frac{m\pi}{a}x$$

$$-\frac{m\pi}{a}\left(x-\frac{a}{2}\right)\sin\frac{m\pi}{a}x\Big\}-\frac{1}{24}(1-\lambda)\Big[\Big(\sinh\frac{m\pi}{a}y+\frac{m\pi}{a}y\cosh\frac{m\pi}{a}y\Big)\Big\{2\frac{m\pi}{a}\left(x-\frac{a}{2}\right)\sin\frac{m\pi}{a}x$$

$$+\frac{m^2\pi^2}{a^2}\left(x-\frac{a}{2}\right)^2\cos\frac{m\pi}{a}x-2\Big(2\frac{m\pi}{a}y\cosh\frac{m\pi}{a}y+\frac{m^2\pi^2}{a^2}y^2\sinh\frac{m\pi}{a}y\Big)\Big\{\cos\frac{m\pi}{a}x-\frac{m\pi}{a}\left(x-\frac{a}{2}\right)$$

$$\sin\frac{m\pi}{a}x\Big\}\Big]\mathrm{B}_2{}^m+m^2\pi^2\Big\{\mathrm{C}_1{}^m\sinh\frac{m\pi}{a}y+\mathrm{C}_2{}^m\Big(\sinh\frac{m\pi}{a}y+\frac{m\pi}{a}y\cosh\frac{m\pi}{a}y\Big)\Big\}\cos\frac{m\pi}{a}x\Big]$$

$$-\sum_n\gamma^2n^2\pi^2\Big[\sin\frac{n\pi}{b}\left(x-\frac{a}{2}\right)\mathrm{D}_1{}^n+\Big\{\sinh\frac{n\pi}{b}\left(x-\frac{a}{2}\right)+\frac{n\pi}{b}\left(x-\frac{a}{2}\right)\cosh\frac{n\pi}{b}\left(x-\frac{a}{2}\right)\Big\}\sin\frac{n\pi}{b}y\Big]$$

$$+\sum_m\sum_n\frac{(\gamma^2n^2+\lambda m^2)m\gamma n}{(\gamma^2n^2+m^2)^2}\cos\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y-\frac{12}{a^2}\left(x-\frac{a}{2}\right)y\mathrm{K}_3\Big] \tag{14}$$

$$\mathrm{M}_y(x,y)=\frac{\mathrm{D}\pi^2}{a^2}\Big[\sum_m\Big[m^2(1-\nu)\cosh\frac{m\pi}{a}y\mathrm{B}_1{}^m+m^2\Big\{(1-\nu)\frac{m\pi}{a}y\sinh\frac{m\pi}{a}y+2\cosh\frac{m\pi}{a}y$$

$$\Big\}\mathrm{B}_2{}^m\Big]\sin\frac{m\pi}{a}x-\sum_m\Big\{m^2\nu w_{mo}+\sum_n(m^2\nu+\gamma^2n^2)w_{mn}\cos\frac{n\pi}{b}y\Big\}\sin\frac{m\pi}{a}x\Big] \tag{15}$$

$$\mathrm{V}_y(x,y)=\frac{\mathrm{D}\pi^3}{a^3}\Big[\sum_m\Big[-m^3(1-\nu)\sinh\frac{m\pi}{a}y\,\mathrm{B}_1{}^m+m^3\Big\{(1+\nu)\sinh\frac{m\pi}{a}y-(1-\nu)\frac{m\pi}{a}y$$

$$\cosh\frac{m\pi}{a}y\Big\}\mathrm{B}_2{}^m\sin\frac{m\pi}{a}x+\sum_m\sum_n\Big\{m^2\gamma n(2-\nu)+\gamma^3n^3\Big\}w_{mn}\sin\frac{n\pi}{b}y\sin\frac{m\pi}{a}x\Big] \tag{16}$$

（７－ｂ）式の境界条件より，(11)，(12)式に $x=0$ を代入して次式を得る。

$$u(0,y)=\frac{a}{\mathrm{R}_x}\Big[\sum_m\Big[\frac{1}{8m\pi}\Big\{(1-\lambda)(1-\nu)\frac{m\pi}{a}y\sinh\frac{m\pi}{a}y-2(3+\lambda)\cosh\frac{m\pi}{a}y\Big\}\mathrm{B}_1{}^m$$

$$+\frac{1}{m\pi}\Big[\frac{1}{8}(1+\lambda)\Big\{(1-\nu)\frac{m\pi}{a}y\sinh\frac{m\pi}{a}y+2\cosh\frac{m\pi}{a}y\Big\}+\frac{1}{96}(1-\lambda)\Big[\Big\{(1+\nu)m^2\pi^2+24\Big\}$$

$$\frac{m\pi}{a}y\sinh\frac{m\pi}{a}y+2m^2\pi^2\cosh\frac{m\pi}{a}y+8(1-\nu)\frac{m^2\pi^2}{a^2}y^2\cosh\frac{m\pi}{a}y\Big]-\frac{m\pi}{a}y\sinh\frac{m\pi}{a}y\Big]\mathrm{B}_2{}^m$$

$$-m\pi\Big[(1+\nu)\cosh\frac{m\pi}{a}y\mathrm{C}_1{}^m+\Big\{2\cosh\frac{m\pi}{a}y+(1+\nu)\frac{m\pi}{a}y\sinh\frac{m\pi}{a}y\Big\}\mathrm{C}_2{}^m\Big]\Big]$$

$$+\sum_n\gamma n\pi\Big[(1+\nu)\sinh\frac{\gamma n\pi}{2}\mathrm{D}_1{}^n+\Big\{(1+\nu)\frac{\gamma n\pi}{2}\cosh\frac{\gamma n\pi}{2}-(1-\nu)\sinh\frac{\gamma n\pi}{2}\Big\}\mathrm{D}_2{}^n\Big]\cos\frac{n\pi}{b}y$$

$$+\sum_m\frac{1}{m\pi}\Big[-(\nu\lambda+1)w_{mo}+\sum_n\Big\{\frac{(\gamma^2n^2+\lambda m^2)(\gamma^2n^2-\nu m^2)}{(\gamma^2n^2+m^2)^2}-1\Big\}w_{mn}\cos\frac{n\pi}{b}y\Big]$$

$$+\frac{\nu}{2}\mathrm{K}_1-\frac{\gamma^2}{2}\mathrm{K}_2+\Big\{\frac{1}{4}(1+2\nu)-\frac{3\nu}{a^2}y^2\Big\}\mathrm{K}_3\Big] \tag{17}$$

$$v(0,y)=\frac{a}{R_x}\Big[\sum_m\Big[\frac{1}{16}(1-\lambda)\Big\{(1+\nu)\frac{m\pi}{a}y\cosh\frac{m\pi}{a}y-(1-\nu)\sinh\frac{m\pi}{a}y\Big\}B_1^m$$
$$+\Big[\frac{1}{16}(1+\lambda)\Big\{(1+\nu)\frac{m\pi}{a}y\cosh\frac{m\pi}{a}y-(1-\nu)\sinh\frac{m\pi}{a}y\Big\}+\frac{1}{24}(1-\lambda)\Big\{(1+\nu)\frac{m^2\pi^2}{a^2}y^2\sinh\frac{m\pi}{a}y$$
$$+2\nu\frac{m\pi}{a}y\cosh\frac{m\pi}{a}y\Big\}\Big]B_2^m\Big]+\sum_n\gamma n\pi\Big[(1+\nu)\cosh\frac{\gamma n\pi}{2}D_1^n+\Big\{2\cosh\frac{\gamma n\pi}{2}+(1+\nu)\frac{\gamma n\pi}{2}$$
$$\sinh\frac{\gamma n\pi}{2}\Big\}D_2^n\Big]\sin\frac{n\pi}{b}y+\frac{y}{a}K_1-\nu\frac{\gamma^2}{a}yK_2+\Big\{\frac{3}{2a}(2+\nu)y-\frac{2}{a^3}y^3\Big\}K_3\Big] \qquad (18)$$

（7－c，d）の境界条件より，(13)～(16)式に $y=b/2$ を代入して次式を得る。

$$N_y\left(x,\frac{b}{2}\right)=\frac{Eh}{R_x}\Big[\sum_m\Big[-\frac{1}{12}\Big[3(1-\lambda)B_1^m\frac{m\pi}{2\gamma}\sinh\frac{m\pi}{2\gamma}+2B_2^m\Big\{(2+\lambda)\frac{m\pi}{2\gamma}\sinh\frac{m\pi}{2\gamma}$$
$$+(1-\lambda)\frac{m^2\pi^2}{4\gamma^2}\cosh\frac{m\pi}{2\gamma}\Big\}\Big]\sin\frac{m\pi}{a}x-\frac{1}{24}\Big[3(1-\lambda)B_1^m\frac{m\pi}{2\gamma}\sinh\frac{m\pi}{2\gamma}\,\frac{m\pi}{a}\Big(x-\frac{a}{2}\Big)\cos\frac{m\pi}{a}x$$
$$+\Big[\Big\{(7-\lambda)\frac{m\pi}{2\gamma}\sinh\frac{m\pi}{2\gamma}+(1-\lambda)\frac{m^2\pi^2}{2\gamma^2}\cosh\frac{m\pi}{2\gamma}\Big\}\frac{m\pi}{a}\Big(x-\frac{a}{2}\Big)'\cos\frac{m\pi}{a}x-(1-\lambda)\frac{m\pi}{2\gamma}$$
$$\sinh\frac{m\pi}{2\gamma}\cdot\frac{m^2\pi^2}{a^2}\Big(x-\frac{a}{2}\Big)^2\sin\frac{m\pi}{a}x\Big]B_2^m\Big]-m^2\pi^2\Big(C_1^m\cosh\frac{m\pi}{2\gamma}+C_2^m\frac{m\pi}{2\gamma}\sinh\frac{m\pi}{2\gamma}\Big)$$
$$\sin\frac{m\pi}{a}x\Big]+\sum_n\gamma^2n^2\pi^2\Big[D_1^n\cosh\frac{n\pi}{b}\Big(x-\frac{a}{2}\Big)D_2^n\Big\{2\cosh\frac{n\pi}{b}\Big(x-\frac{a}{2}\Big)+\frac{n\pi}{b}\Big(x-\frac{a}{2}\Big)\sinh\frac{n\pi}{b}\Big(x-\frac{a}{2}\Big)$$
$$\Big](-1)^{\frac{n}{2}}-\sum_m\Big\{\lambda w_{mo}+\sum_n\frac{(\gamma^2n^2+\lambda m^2)m^2}{(\gamma^2n^2+m^2)^2}(-1)^{\frac{n}{2}}w_{mn}\Big\}\sin\frac{m\pi}{a}x+K_1$$
$$+\Big\{\frac{12}{a^2}\Big(x-\frac{a}{2}\Big)^2-\frac{3}{2\gamma^2}\Big\}K_3\Big] \qquad (19)$$

$$N_{xy}\left(x,\frac{b}{2}\right)=\frac{Eh}{R_x}\Big[\sum_m\Big[\frac{1}{24}\Big[3(1-\lambda)\Big(\sinh\frac{m\pi}{2\gamma}+\frac{m\pi}{2\gamma}\cosh\frac{m\pi}{2\gamma}\Big)B_1^m+\Big\{(7-\lambda)\frac{m\pi}{2\gamma}$$
$$\cosh\frac{m\pi}{2\gamma}+3(1+\lambda)\sinh\frac{m\pi}{2\gamma}+2(1-\lambda)\frac{m^2\pi^2}{4\gamma^2}\sinh\frac{m\pi}{2\gamma}\Big\}B_2^m\Big]\cos\frac{m\pi}{a}x-\frac{1}{24}\Big[3(1-\lambda)$$
$$\Big(\sinh\frac{m\pi}{2\gamma}+\frac{m\pi}{2\gamma}\cosh\frac{m\pi}{2\gamma}\Big)\frac{m\pi}{a}\Big(x-\frac{a}{2}\Big)\sin\frac{m\pi}{a}xB_1^m+\Big[\Big\{(5+\lambda)\sinh\frac{m\pi}{2\gamma}+3(3-\lambda)$$
$$\frac{m\pi}{2\gamma}\cosh\frac{m\pi}{2\gamma}+2(1-\lambda)\frac{m^2\pi^2}{4\gamma^2}\sinh\frac{m\pi}{2\gamma}\Big\}\frac{m\pi}{a}\Big(x-\frac{a}{2}\Big)\sin\frac{m\pi}{a}x+(1-\lambda)\Big(\sinh\frac{m\pi}{2\gamma}+$$
$$\frac{m\pi}{2\gamma}\cosh\frac{m\pi}{2\gamma}\Big)\frac{m^2\pi^2}{a^2}\Big(x-\frac{a}{2}\Big)^2\cos\frac{m\pi}{a}x\Big]B_2^m\Big]+m^2\pi^2\Big\{C_1^m\sinh\frac{m\pi}{2\gamma}+C_2^m\Big(\sinh\frac{m\pi}{2\gamma}+$$
$$\frac{m\pi}{2\gamma}\cosh\frac{m\pi}{2\gamma}\Big)\Big\}\cos\frac{m\pi}{a}x\Big]+\frac{6}{\gamma a}\Big(x-\frac{a}{2}\Big)K_3\Big] \qquad (20)$$

$$M_y\left(x,\frac{b}{2}\right)=\frac{D\pi^2}{a^2}\Big[\sum_m\Big[m^2(1-\nu)\cosh\frac{m\pi}{a}yB_1^m+m^2\Big\{(1-\nu)\frac{m\pi}{a}y\sinh\frac{m\pi}{a}y$$
$$+2\cosh\frac{m\pi}{a}y\Big\}B_2^m\Big]\sin\frac{m\pi}{a}x-\sum_m\Big\{\nu m^2w_{mo}+\sum_n(\nu m^2+\gamma^2n^2)(-1)^{\frac{n}{2}}w_{mn}\Big\}\sin\frac{m\pi}{a}x\Big] \qquad (21)$$

$$V_y\left(x,\frac{b}{2}\right)=\frac{D\pi^3}{a^3}\sum_m\Big[-m^3(1-\nu)\sinh\frac{m\pi}{2\gamma}B_1^m+m^3\Big\{(1+\nu)\sinh\frac{m\pi}{2\gamma}-(1-\nu)\frac{m\pi}{2\gamma}\cosh\frac{m\pi}{2\gamma}\Big\}B_2^m\Big]\sin\frac{m\pi}{a}x \qquad (22)$$

(16)～(21)式の左辺をゼロにするために次式のように Fourier 級数に展開した式を用いる。

$$u\,(0\,,\,y\,)=\frac{a}{R_x}\left\{u_{mo}+\sum_n\left(\sum_m u_{mn}\right)\cos\frac{n\pi}{b}y\right\} \quad (23-a) \qquad v\,(0\,,\,y\,)=\frac{a}{R_x}\sum_n\left(\sum_m v_{mn}\right)\sin\frac{n\pi}{b}y \quad (23-b)$$

$$N_y\left(x\,,\,\frac{b}{2}\right)=\frac{Eh}{R_x}\sum_m\left(\sum_n {}_yN_{mn}\right)\sin\frac{m\pi}{a}x \quad (23-c) \qquad N_{xy}\left(x\,,\,\frac{b}{2}\right)=\frac{Eh}{Rx}\sum_m\left(\sum_n {}_{xy}N_{mn}\right)\cos\frac{m\pi}{a}x \quad (23-d)$$

$$M_y\left(x\,,\,\frac{b}{2}\right)=\frac{D}{a^2}\sum_m\left(\sum_n {}_yM_{mn}\right)\sin\frac{m\pi}{a}x \quad (23-e) \qquad V_y\left(x\,,\,\frac{b}{2}\right)=\frac{D}{a^3}\sum_m\left(\sum_n {}_yV_{mn}\right)\sin\frac{m\pi}{a}x \quad (23-f)$$

（23－a）～（23－f）式が恒等的に成立するために次式を満足しなければならない。

$$u_{mo}=0 \quad (24-a) \qquad u_{mn}=0 \quad (n=2,\ 4,\ 6\ \cdots) \quad (24-b)$$

$$v_{mn}=0 \quad (n=2,\ 4,\ 6\ \cdots) \quad (24-c) \qquad {}_yN_{mn}=0 \quad (m=1,\ 3,\ 5\ \cdots) \quad (24-d)$$

$$ {}_{xy}N_{mn}=0 \quad (m=1,\ 3,\ 5\ \cdots) \quad (24-e) \qquad {}_yM_{mn}=0 \quad (m=1,\ 3,\ 5\ \cdots) \quad (24-f)$$

$$ {}_yV_{mn}=0 \quad (m=1,\ 3,\ 5\ \cdots) \quad (24-g)$$

さらに（23－b），及び（23－c）式の Sine 展開が閉区間で一様収束するために端部で次式を満足しなければならない。

$$N_y\left(0\,,\,\frac{b}{2}\right)=0$$

$$\sum_m\left[\frac{m\pi}{16}(1-\lambda)\frac{m\pi}{2\gamma}\sinh\frac{m\pi}{2\gamma}B_1{}^m+\frac{m\pi}{48}\left\{(7-\lambda)\frac{m\pi}{2\gamma}\sinh\frac{m\pi}{2\gamma}+(1-\lambda)\frac{m^2\pi^2}{2\gamma}\cosh\frac{m\pi}{2\gamma}\right\}B_2{}^m\right]$$
$$+\sum_n\gamma^2n^2\pi^2\left\{\cosh\frac{\gamma n\pi}{2}D_1{}^n+\left(2\cosh\frac{\gamma n\pi}{2}+\frac{\gamma n\pi}{2}\sinh\frac{\gamma n\pi}{2}\right)\right\}+K_1+3\left(1-\frac{1}{2\gamma^2}\right)K_3=0 \tag{25}$$

$$v\left(0\,,\,\frac{b}{2}\right)=0$$

$$\sum_m\left[\frac{1}{16}(1-\lambda)\left\{(1+\nu)\frac{m\pi}{2\gamma}\cosh\frac{m\pi}{2\gamma}-(1-\nu)\sinh\frac{m\pi}{2\gamma}\right\}B_1{}^m+\left[\frac{1}{16}(1+\lambda)\left\{(1+\nu)\frac{m\pi}{2\gamma}\cosh\frac{m\pi}{2\gamma}-(1-\nu)\sinh\frac{m\pi}{2\gamma}\right\}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{24}(1-\lambda)\left\{(1+\nu)\frac{m^2\pi^2}{4\gamma^2}\sinh\frac{m\pi}{2\gamma}+2\nu\frac{m\pi}{2\gamma}\cosh\frac{m\pi}{2\gamma}\right\}\right]B_2{}^m\right]+\frac{1}{2\gamma}K_1-\nu\frac{\gamma}{2}K_2+\frac{1}{4}\left\{\frac{3}{\gamma}(2+\nu)-\frac{1}{\gamma^3}\right\}K_3=0 \tag{26}$$

$m=1,\ 3,\ 5\ \cdots\ 2N-1$，$n=2,\ 4,\ 6\ \cdots\ 2N$ とすれば，(24)の各式から $B_1{}^m$，$B_2{}^m$，$C_1{}^m$，$C_2{}^m$，$D_1{}^n$，$D_2{}^n$，K_1，K_2，K_3 と w_{mn} の関係を与える 6N+1 本の条件式，さらに，(25)，(26)式の 2 本の条件式から，合計 6N+3 本の式を得ることができる。このようにして法線方向変位を仮定するときに用いた，$B_1{}^m$，$B_2{}^m$ 応力関数を定義するときに仮定した $C_1{}^m$，$C_2{}^m$，$D_1{}^n$，$D_2{}^n$ 及び K_1，K_2，K_3 の合計 6N+3 個の未定係数は w_{mn} を用いて表わすことができる。ここで（24－a）～（24－g）式，及び（24－f），（24－g）式をマトリクス表示して次式を得る。

$$\left[\,S_1\,\right]\left\{d_2\right\}=\left[\,F_1\,\right]\left\{d_1\right\} \tag{27}$$

$$\left[\,S_2\,\right]\left\{d_3\right\}=\left[\,F_2\,\right]\left\{d_1\right\} \tag{28}$$

ここに，$\{d_1\}^T=\{w_{10},\ w_{30},\ \cdots,\ w_{2N-1\,2N}\}$，

$\{d_2\}^T=\{B_1{}^1,\ B_2{}^1,\ C_1{}^1,\ C_2{}^1,\ D_1{}^1,\ D_2{}^2,\ \cdots,\ B_1{}^{2N-1},\ B_2{}^{2N-1},\ C_1{}^{2N-1},\ C_2{}^{2N-1},\ D_1{}^{2N},\ D_2{}^{2N},\ K_1,\ K_2,\ K_3\}$

$\{d_3\}^T=\{B_1{}^1,\ B_2{}^1,\ \cdots,\ B_1{}^{2N-1},\ B_2{}^{2N-1}\}$

(24)，(25)式の d_2，d_3 をそれぞれ d_1 で表わして次式を得る。

$$\left\{d_2\right\}=\left[\,S_1{}^{-1}F_1\right]\left\{d_1\right\} \tag{29}$$

$$\left\{d_3\right\}=\left[\,S_2{}^{-1}F_2\right]\left\{d_1\right\} \tag{30}$$

(5)式から求まる Euler の方程式に仮定した法線方向変位 w, 及び応力関数 ϕ を代入して次式を得る。

$$
\begin{aligned}
&\frac{R^2_x}{Eh}L(w,\phi)=\frac{\pi^4}{12(1-\nu^2)\mu^2}\Bigl[\sum_m\Bigl\{m^4w_{mo}+\sum_n(m^2+\gamma^2n^2)^2w_{mn}\cos\frac{n\pi}{b}\Bigr\}\sin\frac{m\pi}{a}x\Bigr]+\sum_m\Bigl\{\lambda^2w_{mo}\\
&+\sum_n\frac{(\gamma^2n^2+\lambda m^2)^2}{(\gamma^2n^2+m^2)^2}w_{mn}\cos\frac{n\pi}{b}y\Bigr\}\sin\frac{m\pi}{a}x-\sum_m\frac{1}{8}(1-\lambda)\Bigl[\Bigl\{(1-\lambda)\frac{m\pi}{a}y\sinh\frac{m\pi}{a}y\\
&+2\cosh\frac{m\pi}{a}y\Bigr\}\frac{m\pi}{a}\Bigl(x-\frac{a}{2}\Bigr)\cos\frac{m\pi}{a}x-2\lambda\frac{m\pi}{a}y\sinh\frac{m\pi}{a}y\cdot\sin\frac{m\pi}{a}x\Bigr]B_1{}^m\\
&-\frac{1}{24}\sum_m\Bigl[\Bigl\{(11-\lambda)(1-\lambda)\frac{m\pi}{a}y\sinh\frac{m\pi}{a}y+2(1-\lambda)^2\frac{m^2\pi^2}{a^2}y^2\cosh\frac{m\pi}{a}y\\
&+2(5+\lambda)\cosh\frac{m\pi}{a}y\Bigr\}\frac{m\pi}{a}\Bigl(x-\frac{a}{2}\Bigr)\cos\frac{m\pi}{a}x-(1-\lambda)\Bigl\{(1-\lambda)\frac{m\pi}{a}y\sinh\frac{m\pi}{a}y+2\cosh\frac{m\pi}{a}y\Bigr\}\frac{m^2\pi^2}{a^2}\\
&\Bigl(x-\frac{a}{2}\Bigr)^2\sin\frac{m\pi}{a}x-4\lambda\Bigl\{(2+\lambda)\frac{m\pi}{a}y\sinh\frac{m\pi}{a}y+(1-\lambda)\frac{m^2\pi^2}{a^2}y^2\cosh\frac{m\pi}{a}y\Bigr\}\sin\frac{m\pi}{a}x\Bigr]B_2{}^m-\sum_m m^2\pi^2\\
&\Bigl[(1-\lambda)\cosh\frac{m\pi}{a}yC_1{}^m+\Bigl\{2\cosh\frac{m\pi}{a}y+(1-\lambda)\frac{m\pi}{a}y\sinh\frac{m\pi}{a}y\Bigr\}C_2{}^m\Bigr]\sin\frac{m\pi}{a}x+\sum_n\gamma^2n^2\pi^2\\
&\Bigl[(1-\lambda)\cosh\frac{n\pi}{b}\Bigl(x-\frac{a}{2}\Bigr)D_1{}^n-\Bigl\{2\lambda\cosh\frac{n\pi}{b}\Bigl(x-\frac{a}{2}\Bigr)-(1-\lambda)\frac{n\pi}{b}\Bigl(x-\frac{a}{2}\Bigr)\sinh\frac{n\pi}{b}\Bigl(x-\frac{a}{2}\Bigr)\Bigr\}\Bigr]\\
&\cos\frac{n\pi}{b}y-\lambda K_1-\gamma^2K_2+\frac{6}{a^2}\Bigl\{(1-2\lambda)\Bigl(x-\frac{a}{2}\Bigr)^2+\lambda y^2\Bigr\}K_3+\rho\frac{R^2_x}{E}\Bigl[\sum_m\Bigl(\cosh\frac{m\pi}{a}y\ddot{B}_1{}^m+\frac{m\pi}{a}y\sinh\frac{m\pi}{a}y\ddot{B}_2{}^m\Bigr)\\
&\sin\frac{m\pi}{a}x+\sum_m\Bigl(\ddot{w}_{mo}+\sum_n\ddot{w}_{mn}\cos\frac{n\pi}{b}y\Bigr)\sin\frac{m\pi}{a}x\Bigr]-\frac{1}{\mu^2}\frac{Pa^4}{Eh^3}
\end{aligned}
\tag{31}
$$

ここに，$\mu=\dfrac{a^2}{R_xh}$

(5)式を零にするために(31)式に Galerkin 法を適用する。Galerkin 法は境界条件が変位で与えられる場合に，この条件を満足するような変位モードを仮定して適用するのが通例である。ここでは変位仮定において 3 種類の変位モードを用いているので，各変位モードについて Galerkin 法を適用し次式を得る。

$$\frac{R^2_x}{Eh}\frac{2}{ab}\int_0^a\int_0^{\frac{b}{2}}L(w,\phi)\sin\frac{\tilde{m}\pi}{a}x\cos\frac{\tilde{n}\pi}{b}y\,dxdy=0\qquad \tilde{m},\tilde{n}\tag{32}$$

$$\frac{R^2_x}{Eh}\frac{2}{ab}\int_0^a\int_0^{\frac{b}{2}}L(w,\phi)\sin\frac{\tilde{m}\pi}{a}x\cosh\frac{\tilde{m}\pi}{a}y\,dxdy=0\qquad \tilde{m}\tag{33}$$

$$\frac{R^2_x}{Eh}\frac{2}{ab}\int_0^a\int_0^{\frac{b}{2}}L(w,\phi)\sin\frac{\tilde{m}\pi}{a}x\frac{\tilde{m}\pi}{a}y\sinh\frac{\tilde{m}\pi}{a}y\,dxdy=0\qquad \tilde{m}\tag{34}$$

ここに，$\tilde{m}=1,3,5,\cdots 2N-1$，$\tilde{n}=2,4,6,\cdots 2N$

ここで，(32)～(34)式をマトリクス表示して次式を得る。

$$\rho\frac{R^2_x}{E}\begin{bmatrix}GM_{11}&GM_{12}\\GM_{21}&GM_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{d}_1\\\ddot{d}_2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}GK_{11}&GK_{12}\\GK_{21}&GK_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}d_1\\d_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}P_1\\P_2\end{Bmatrix}\tag{35}$$

(29)，(30)式を用いて，(35)式を d_1 のみで表わし次式を得る。

$$\rho\frac{R^2_x}{E}\bigl[\,M\,\bigr]\bigl\{\ddot{d}_1\bigr\}+\bigl[\,K\,\bigr]\bigl\{d_1\bigr\}=\bigl\{P\bigr\}\tag{36}$$

ここに，$[M]=[GM_{11}]+[GM_{12}][S_1{}^{-1}F_1]+[S_2{}^{-1}F_2]^T[GM_{21}]+[S_2{}^{-1}F_2]^T[GM_{22}][S_1{}^{-1}F_1]$

$[K]=[GK_{11}]+[GK_{12}][S_1{}^{-1}F_1]+[S_2{}^{-1}F_2]^T[GK_{21}]+[S_2{}^{-1}F_2]^T[GK_{22}][S_1{}^{-1}F_1]$

$\{P\}=\{P_1\}+[S_2{}^{-1}F_2]\{P_2\}$

剛性マトリクス [K] は，無次元パラメータ γ, λ, μ, 及び Poisson 比 ν により表わされる。

(36)式に基づいて，静的，及び固有振動数解析を行なう。ここで用いた解法は，自然境界条件をすべて満足するような解法なので [K] は実対称であり，固有振動数は標準的な固有値問題の解法を利用して求められる。

§4　自由辺に点支持を追加した偏平シェルの解析

ここでは，自由辺をいくつかの点で支持された偏平シェルを解析する。§3の自由辺を有する偏平シェルの解析では，束縛条件として境界条件のみであったが，この解析では境界条件の他に新たな束縛条件が課せられた変分問題となる。この場合 Lagrange 乗数を導入することにより，新たな汎関数 π^* を定義しそれを極値にすればよい。このときの汎関数 π^* の第一変分は次式となる。

$$\delta\pi^*=\delta\pi+\alpha\delta\mathrm{D}\left(\xi,\ \pm\frac{b}{2}\right)+\delta\alpha\mathrm{D}\left(\xi,\ \pm\frac{b}{2}\right) \tag{37}$$

ここに，α：Lagrange 乗数，D：支持点の変位
　　ξ：支持点の x 座標

$\delta\pi^*=0$ とするためには次式を満足しなければならない。

$$\delta\pi+\alpha\delta\mathrm{D}\left(\xi,\ \pm\frac{b}{2}\right)=0 \tag{38}$$

$$\mathrm{D}\left(\xi,\ \pm\frac{b}{2}\right)=0 \tag{39}$$

(38)式に Galerkin 法を適用する。この際，(38)式の $\delta\pi$ は§3ですでに計算している。さらに Lagrange 乗数を決定するために(37)式の拘束条件を追加する。ここで，(3)式の境界項より，支持点で u 方向を拘束した場合には N_{xy}，v 方向を拘束した場合には N_y，w 方向を拘束した場合には V_y がそれぞれ生じることになる。すなわち，Lagrange 乗数は支持点の反力を表わしている。

§5　解析結果

ここでは，静水圧を受ける自由辺を有するシェル，及びその自由辺の中点に面内ローラの点支持を追加したシェルの静的解析を行ない，自由辺に点支持が追加されたときシェルの挙動がどのように推移していくかを検討する。解析モデルは，辺長比 $\gamma=1$，スパンライズ比 $\mu=50$，Poisson 比 $\nu=0$ の完全球形シェル（$\lambda=1$），円筒シェル（$\lambda=0$），及び完全 H. P. シェルとし，その自由辺を1辺につき1点，3点，5点，7点で点支持されたシェルを解析する。（図4）

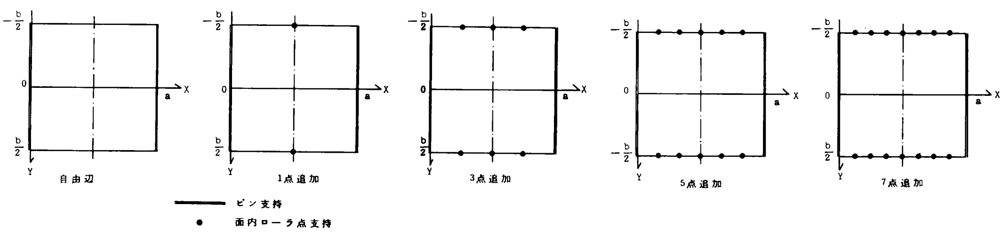


図4　解析モデル

この解析での Fourier 級数の項数Nを自由辺を有するシェルについては，N=3, 4, 5, …, 12，点支持を追加したシェルについては，N=5, 6, 7, …, 15として，それぞれのシェルの $\lambda=1$ の中央変位 w_{mid} の収束状況を図5に示す。

自由辺に図4に示すように面内ローラとした点支持を追加していくことによる。シェルの中央変位 w_{mid}，及び平均変位 $\overline{w}(=\int_0^a\int_{-b/2}^{b/2}w\ (x,\ y)\ dxdy/ab)$ の推移を $\lambda=1$ については○—○，$\lambda=0$ については□—□，$\lambda=-1$ については△—△によって図6，図7に示す。またそれらの図に周辺でピン支持された $\lambda=1$, 0, -1 の中央変位，及び平均変位を破線により示す。

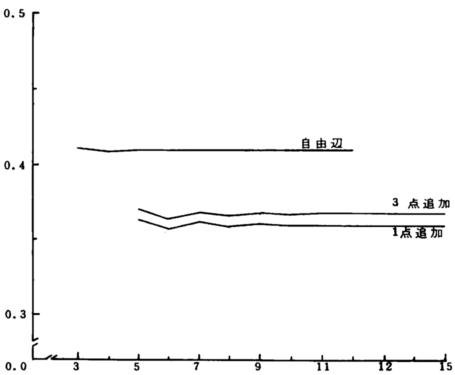


図5　中央変位 Wmid の収束状況（$\lambda=1$）

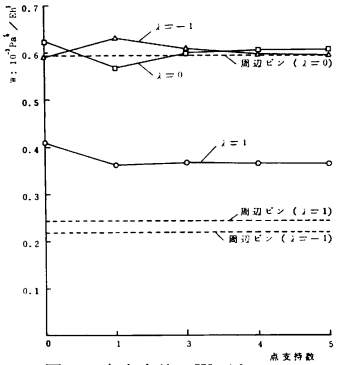


図6 中央変位 Wmid

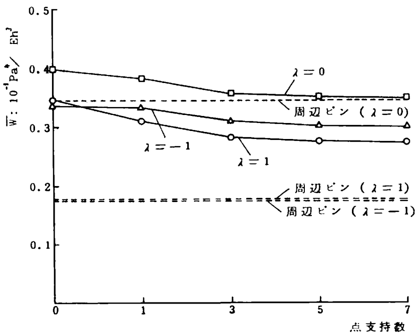


図7 平均変位 $\overline{W}$

中央変位については，$\lambda=1$ の場合，自由辺に点支持を1点追加したときには，自由辺のみのシェルに比べて11.7%減少しているものの，点支持を3点，5点，7点と追加してもほとんど差は見られない。$\lambda=-1$ の場合，点支持を1点追加すると，点支持を追加しないシェルに比べて6.6%増加するが，点支持を追加していくに従って除々に減少し，5点追加したときと7点追加したときではあまり差は見られない。$\lambda=0$ の場合，自由辺に点支持を1点追加すると，点支持を追加しないシェルに比べて9.0%減少しているが，点支持を追加していくにつれて，除々に増加し，$\lambda=1$，-1 の場合と同様に5点と7点追加したときではほとんど差は見られない。

平均変位については，$\lambda=1$，0，-1 ともに点支持を追加していくことによって減少しており，点支持を7点追加したシェルは，自由辺のみを有するシェルに比べて $\lambda=1$ では21.2%，$\lambda=0$ では12.4%，$\lambda=-1$ では10.4%それぞれ減少している。また，周辺でピン支持されたシェルと自由辺に面内ローラの点支持を追加したシェルを比較すると，点支持を追加したシェルは周辺ピン支持のシェルに対し，中央変位に関しては $\lambda=1$ で1.7倍，$\lambda=0$ で1.01倍，$\lambda=-1$ で2.4倍を示しており，平均変位に関しては $\lambda=1$ で1.5倍，$\lambda=0$ で1.01倍，$\lambda=-1$ で1.7倍を示している。

表1は，自由辺に面内ローラの点支持を追加したとき，シェル面が受ける法線方向等分布荷重の総和に対してすべての点支持が負担する法線方向の総反力の割合を $\lambda=1$，0，-1 について示している。$\lambda=1$，0，-1 ともに点支持を3点追加したときに大きく増加しており，5点，7点と追加するに従いその増加率は減少している。また，$\lambda=1$，0，-1 と移るに従い，法線方向反力の負担する割合は減少している。

表1 総荷重に対する点支持の負担する割合

	負担割合(%)		
点支持数	$\lambda=1$	$\lambda=0$	$\lambda=-1$
1点	7.8	5.2	3.0
3点	31.2	28.1	24.3
5点	39.3	36.6	33.5
7点	42.2	40.2	37.5

§6 結び

平行な2辺で面内変位を拘束したピン支持，他の2辺に自由辺を有するシェルにおいて，その自由辺に面内ローラの点支持を設けた場合，$\lambda=-1$ では $\lambda=1$，0に比べて変形状態において周辺ピン支持シェルとの差は大きく，境界で面内変位を完全に拘束しない場合には不利となる。また $\lambda=0$ では，周辺でピン支持されたシェルと変形状態がほぼ等しくなる。

参考文献

1) 坪井，高橋“周辺固定支持されたH. P. シェルのフーリェ解析”日本建築学会論文報告集第104号 昭和39年

2) 中田，坪井“偏平H. P. およびE. P. シェルのフーリエ弾性解析”日本建築学会論文報告集第318号 昭和57年

3) 清水，真瀬，伊藤，和泉“偏平推動殻の応力分布へ及ぼす曲率の影響”建築学会東北支部 昭和52年

4) 皆川“Vlasov型基礎式に基づく面内変位を抑えた偏平シェルの解析”建築学会大会 昭和57年

5) 皆川“周辺固定の偏平推動殻の線形解析”建築学会大会 昭和58年

6) 坪井善勝“連続体力学序説”産業図書