

# 一様ばりの横振動時における端末条件 (第2報)

——両端支持ばりと片持ばりに対する  
振動数方程式と振動モード——

富 武 満・有 富 正 男

(受理 昭和54年5月31日)

## END CONDITIONS FOR FLEXURAL VIBRATION OF UNIFORM BARS

(2nd Report—Frequency Equations and Mode Shapes  
for Cantilever and Simply Supported Beams)

Takemitsu TOMI and Masan ARITOMI

It was presented in the first report that some of the end conditions for free flexural vibration of uniform bars should be obtained by the theoretical analysis.

This second report describes analytical techniques for obtaining the frequency equations by use of the results in the previous work.

Following such analytical techniques, the frequency equations and vibration mode shapes for cantilever and simply supported beams are presented. It is also shown that some modified expressions of mode shapes for these beams can be obtained.

### 1. 緒 言

一様断面ばりが横方向に自由振動を行なう際、端末に生ずる支点反力や固着モーメントなどの支点抗力と、両端におけるたわみやたわみ角などの端末変位の相互間には、ある特定の関係が成立している。この関係式を第1報においては振動端末条件と呼び、固着端、支持端および自由端の各種支持状態にあるはりについて、それぞれの振動端末条件を求めた<sup>1)</sup>。

そこで得られた結果によると、これらの振動端末条件には振動モードが関係する。振動モードは各固有振動数によって異なるわけであり、固有振動数は通常、振動方程式の解として得られたたわみ式において、その中に含まれる積分定数を境界条件で決定することによって求められる。

このため従来は第1報で述べたとおり、両端固着ばり、両端支持ばり、片持ばりといった実用的な分類に従って、個々の場合のたわみ式を求め、これにそれぞれ該当する境界条件を適用して、それらの振動数方程式を得るという方法が採用されている<sup>2)</sup>。しかも、この従来の方法によれば、振動中のたわみ量を確定する

ためには初期条件を使用して、たわみ式の中に含まれる積分定数の値を決定する必要がある。このため、振動変位に対する理論結果と実験結果を直接比較したい場合には、初期条件の設定を明確にしてはじめて、それらに対する比較が可能となる。

本報告書は両端支持ばりと片持ばりについて、第1報で得られた(16)式と(17)式の振動次数方程式を使用してそれらに対する固有振動数を求める一般的な計算手法を述べたものである。そしてまた、自由振動中のたわみを支点抗力や端末変位で具体的に表わし、これを初期条件の設定なしに実験結果とも直接、比較ができるようにしたものである。このような計算手法を採用すると、たわみ曲線を表わす振動モードの表現式としては、多様な表現法の存在することがわかる。

なお本報告書においては、在来の振動数方程式を別途な表現式に変形し、それを使用して振動モードと端末条件との対応関係を、より明確にした結果についても述べている。

### 2. 振動次数方程式と振動モード

長さ  $l$ 、曲げ剛性  $EI$ 、単位長さあたりの質量  $\rho_l$  の

一様断面ばりが、横方向に自由たわみ振動を行なう際、図1に示すごとく左端A点を座標原点とし、はりの軸線に沿って右端B点の方向にx軸を取る。そしてまた鉛直下方にw軸を取れば、はりのたわみはwで表わされる。ここでは以下の説明に便利のように、第1報で得られた結果のなかから、本報告で必要とする個所のみを、要約して示しておくことにする<sup>1)</sup>。

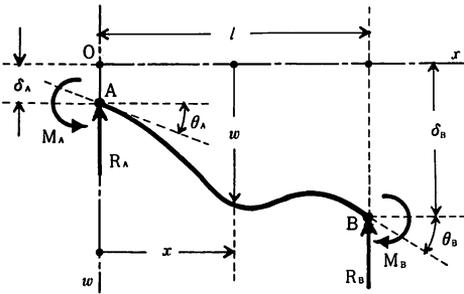


図 1

いま図1のように、はりの両端における変位を  $\delta_A$ ,  $\delta_B$  と  $\theta_A$ ,  $\theta_B$  で表わし、また支持反力を  $R_A$ ,  $R_B$  とし、支持モーメントを  $M_A$ ,  $M_B$  で表わすとき、固有振動数を求める振動次数方程式は、第1報の (16) 式と (17) 式により

$$\left. \begin{aligned} & \{\lambda^2[(EI\lambda^3)\delta_A - M_A]^2 + [(EI\lambda^3)\theta_A + R_A]^2\} \cos \lambda l \\ & = \lambda^2[(EI\lambda^3)\delta_B - M_B][(EI\lambda^3)\delta_A - M_A] \\ & \quad + [(EI\lambda^3)\theta_B - R_B][(EI\lambda^3)\theta_A + R_A] \\ & \{\lambda^2[(EI\lambda^3)\delta_A - M_A]^2 + [(EI\lambda^3)\theta_A + R_A]^2\} \sin \lambda l \\ & = \lambda \{[(EI\lambda^3)\delta_B - M_B][(EI\lambda^3)\theta_A + R_A] \\ & \quad - [(EI\lambda^3)\theta_B - R_B][(EI\lambda^3)\delta_A - M_A]\} \end{aligned} \right\} \dots\dots(1)$$

$$\left. \begin{aligned} & \{\lambda^2[(EI\lambda^3)\delta_A + M_A]^2 - [(EI\lambda^3)\theta_A - R_A]^2\} \cosh \lambda l \\ & = \lambda^2[(EI\lambda^3)\delta_B + M_B][(EI\lambda^3)\delta_A + M_A] \\ & \quad - [(EI\lambda^3)\theta_B + R_B][(EI\lambda^3)\theta_A - R_A] \\ & \{\lambda^2[(EI\lambda^3)\delta_A + M_A]^2 - [(EI\lambda^3)\theta_A - R_A]^2\} \sinh \lambda l \\ & = \lambda \{ -[(EI\lambda^3)\delta_B + M_B][(EI\lambda^3)\theta_A - R_A] \\ & \quad + [(EI\lambda^3)\theta_B + R_B][(EI\lambda^3)\delta_A + M_A] \} \end{aligned} \right\} \dots\dots(2)$$

となる。(1)式は第1報の(16)式であり、(2)式が第1報の(17)式である。ここで、端末変位  $\delta, \theta$  と端末抗力  $R, M$  は、それぞれに該当する点における最大振幅を表わすものとする。

振動次数を決定する  $\lambda l$  は、上記(1)式と(2)式で表わされる4個のすべての式を、同時に満足するものでなくてはならない。ただし、第1報で述べたごと

く、実際にはりの固有振動数を求める場合には、(1)式のうちのいずれか1個と(2)式のうちのいずれか1個、都合2個の式で  $\lambda l$  を決定すればよい。この場合、振動問題の性質上、 $\lambda l > 0$  とすべきであり、このため  $\lambda l$  に対しては常に

$$\cosh \lambda l > 1, \sinh \lambda l > 0 \quad \dots\dots(3)$$

の関係が満足されていなくてはならない。

なおここで、 $\omega_n$  をはりの固有円振動数とすれば、第1報の(5)式により  $\omega_n$  は

$$\omega_n = \lambda_n^2 \sqrt{EI/\rho l}, \quad (n=1, 2, 3, \dots\dots) \quad \dots\dots(4)$$

で表わされ、本式の右辺の  $\lambda_n$  は(1)式および(2)式を満足する値である。このように(1)式と(2)式から得られる  $\lambda l$  は振動数や振動次数といった固有値を決定するので、本報告書では便宜上  $\lambda l$  のことを振動固有数と呼んでおる。

次に振動時のたわみ  $w(x, t)$  は第1報の(3)式により

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \cdot \sin(\omega_n t + \alpha_n) \quad \dots\dots(5)$$

となるが、本式で関数  $\varphi_n(x)$  は、第1報の(10)式によれば、 $n$  の下付添字を省略するとき

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \frac{1}{2EI\lambda^3} \{ (EI\lambda^3)\lambda\delta_A(\cosh \lambda x + \cos \lambda x) \\ & + (EI\lambda^3)\theta_A(\sinh \lambda x + \sin \lambda x) + \lambda M_A(\cosh \lambda x \\ & - \cos \lambda x) - R_A(\sinh \lambda x - \sin \lambda x) \} \quad \dots\dots(5') \end{aligned}$$

で表わされる。(5')式は正規関数と呼ばれているが、具体的には各振動モードに対するたわみ曲線を表わす。したがって、本報告では以後これを振動モード曲線と呼ぶことにする。

この第2報においては、両端支持ばりと片持ばりの自由振動について、その振動数方程式を(1)式と(2)式により求め、かつ、それに対応する振動たわみ形を(5')式で求めてみる。

### 3. 両端支持ばり

両端支持ばりの場合には

$$\delta_A = \delta_B = 0, \quad M_A = M_B = 0 \quad \dots\dots(6)$$

の境界条件があらかじめ与えられている。

この条件を(5')式に代入すると、振動モード曲線  $\varphi(x)$  として

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \frac{1}{2EI\lambda^3} \{ (EI\lambda^3)\theta_A(\sinh \lambda x + \sin \lambda x) \\ & - R_A(\sinh \lambda x - \sin \lambda x) \} \quad \dots\dots(7) \end{aligned}$$

を得る。しかも第1報の(32)式および(33)式によれば、この両端支持ばりに対しては、振動次数のいかにかわらず

$$\theta_A^2 = \theta_B^2, \text{ および } R_A^2 = R_B^2 \quad \dots\dots(8)$$

の端末条件が成立している<sup>1)</sup>。また、第1報の(29)式と(31)式によると、この場合

$$\left. \begin{aligned} R_A - (EI\lambda^2)\theta_A &= 0 \\ R_B + (EI\lambda^2)\theta_B &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(8')$$

の関係も同時に成立する<sup>1)</sup>。

### 3.1 振動数方程式

従来の境界値問題に対する解法によれば、(6)式の境界条件を(7)式に適用して、はりの振動数方程式を求める、といった計算手法が採用されている<sup>2)</sup>。しかしながら本報告書においては、(1)式と(2)式へ適切な境界条件を適用して、該当するはりの振動数方程式を求める、という一貫した計算手法について述べる。

まず、(6)式の条件を(1)式に適用すると

$$\left. \begin{aligned} [(EI\lambda^2)\theta_A + R_A]^2 \cos \lambda l \\ = [(EI\lambda^2)\theta_B - R_B][(EI\lambda^2)\theta_A + R_A] \\ [(EI\lambda^2)\theta_A + R_A]^2 \sin \lambda l = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(9)$$

となり、また(6)式の条件を(2)式に適用すれば

$$\left. \begin{aligned} [(EI\lambda^2)\theta_A - R_A]^2 \cosh \lambda l \\ = [(EI\lambda^2)\theta_B + R_B][(EI\lambda^2)\theta_A - R_A] \\ [(EI\lambda^2)\theta_A - R_A]^2 \sinh \lambda l = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(9')$$

を得るが、この(9)式と(9')式が両端支持ばりに対する振動次数方程式を表わす。

ところが第1報の(27)式によれば  $(EI\lambda^2)\theta_A + R_A \neq 0$  であることがわかっている<sup>1)</sup>。この関係を考慮すると、(9)式の第2式より

$$\sin \lambda l = 0 \quad \dots\dots(10)$$

が得られる。本式を第1報では、境界値問題に対する従来の解法手順に従って求め、それをここでは(24)式として示しておいた<sup>1)</sup>。

(10)式が両端支持ばりに対する振動数方程式として、古くから採用されてきた最もなじみ深い形の方程式である<sup>3)</sup>。そして振動数を求める場合には、この

(10)式の形が便利であると考えられる。しかし、振動数とそれに対する端末条件との対応関係を考えるときには、(10)式の形は不便であり、その場合には(10)式を変形して、それを以下に示すような別の表現式にし

ておくと都合がよい。

すなわち(10)式の振動数方程式は(9)式の第2式を使用して得たものであった。そこで今度は、(9)式の第1式を使用してみる。そのためにいま、(8)式

$$4(EI\lambda^2)^2\theta_A^2 \cos \lambda l = 4(EI\lambda^2)^2\theta_B\theta_A \quad \dots\dots(11)$$

の関係を(9)式の第1式に代入すれば

$$\cos \lambda l = -1, \text{ もしくは } \cos \lambda l = 1 \quad \dots\dots(12)$$

となり、これは(10)式と矛盾しない。したがって、この(12)式が(10)式を変形した別の表現式であり、

(12)式は(10)式のかわりに振動数方程式として採用できることになる。

なお、(12)式は当然ではあるが次のように、(10)式のみを使用しても求められる。すなわち、(10)式を2乗して1から引くと

$$1 - \sin^2 \lambda l = 1, \quad \therefore \cos^2 \lambda l = 1$$

となるが、これは  $\cos \lambda l = \pm 1$  であり、(12)式と一致する。

この場合、(10)式もしくは(12)式の振動数方程式は、(9)式の2個のみを使用して得られた。このように、固有振動数を求めるためには、(9)式と(9')式で示される4個の方程式のうち、適切な2個を選び出して、これら2個の方程式を満足する  $\lambda l$  を求めるとよい。こうして得られた振動固有数  $\lambda l$  の値は必然的に、残りの未使用であった(9')式も同時にすべて満足するようになる。

つまり、(8)式の第1の関係  $(EI\lambda^2)\theta_A - R_A = 0$  によれば、(9')式の両式は恒等的に成立している。ゆえに、(10)式から得られる  $\lambda l$  の値は、(9)式および(9')式の4個の式すべてを満足していることがわかる。したがって、両端支持ばりの場合、(10)式がその振動数方程式であるとの確認が得られる。

(10)式もしくは(12)式によると、振動固有数の値として

$$\lambda_1 l = \pi, \lambda_2 l = 2\pi, \lambda_3 l = 3\pi, \lambda_4 l = 4\pi, \dots\dots \\ \therefore \lambda_n l = n\pi, \quad (n=1, 2, 3, \dots\dots)$$

が得られるので、固有円振動数  $\omega_n$  は(4)式より

$$\omega_n = \lambda_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho l}} = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho l}} \quad \dots\dots(13)$$

のように求められる。

ところで、振動数方程式としては、(12)式が使用できることを前に述べておいた。そこでいま、振動次数を  $n$  で表わすと、(12)式のうちで  $\cos \lambda_n l = -1$  は、 $n$

が奇数値を採るとき振動数を決定し、一方の  $\cos \lambda_n l = 1$  は  $n$  が偶数値を採るとき、その振動数を決定することがわかる。なぜならば、 $\cos \lambda_n l = -1$  からは、 $\lambda_1 l = \pi$ ,  $\lambda_3 l = 3\pi$ ,  $\lambda_5 l = 5\pi$ , ……として、 $n=1, 3, 5, \dots$  の振動次数が得られ、 $\cos \lambda_n l = 1$  からは、 $\lambda_2 l = 2\pi$ ,  $\lambda_4 l = 4\pi$ , ……の振動次数が得られるためである。

(12) 式の振動数方程式はまた

$$\cos \lambda_n l = (-1)^n, \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots(14)$$

で置き換えられ、これは (12) 式の2個の関係を1個の式で、まとめて表現したものとなる。

### 3.2 端末条件と振動数方程式の対応

振動数方程式を上 (14) 式の形で表わすと、振動次数と端末条件との対応性が、以下のように明確にできる。すなわち前述のように、(8) 式の端末条件のうちから  $\theta_B = -\theta_A$  の関係を取り上げ、これを (11) 式に代入すれば

$$\cos \lambda_n l = -1, \quad (n=1, 3, 5, \dots) \quad \dots\dots(15)$$

として (12) 式の第1式を得るが、これは振動次数が奇数値を取る場合の振動数方程式を表わす。次に  $\theta_B = \theta_A$  の関係を (11) 式に代入すると、(11) 式は

$$\cos \lambda_n l = 1, \quad (n=2, 4, 6, \dots) \quad \dots\dots(15')$$

となるが、これは (12) 式の第2式を表わし、これから偶数次の振動数が得られる。

さて、(15) 式の振動数方程式は  $\theta_B = -\theta_A$  の端末条件から得られたものであった。したがって、 $\theta_B = -\theta_A$  の端末条件は、 $\cos \lambda_n l = -1$  から得られる振動数に対応するものであり、このときの振動次数  $n$  は前記のように、奇数値を取ることがわかる。また、同じ端末条件  $\theta_B = -\theta_A$  を、(8) 式に代入すれば

$$R_A = (EI\lambda^3)\theta_A, \quad R_B = (EI\lambda^3)\theta_A \quad \dots\dots(16)$$

となり、これから  $R_A = R_B$  の関係を得る。ところが (15) 式によれば、いま使用した  $\theta_B = -\theta_A$  は奇数次の振動に対応する端末条件であった。この結果、振動数が  $\cos \lambda_n l = -1$  の振動数方程式から得られる奇数次の振動に対応して、 $R_A = R_B$  および  $\theta_A = -\theta_B$  の端末条件が成立するという結論が得られる。

つまり、両端支持ばりが奇数次の振動数をもって、振動をしている場合には

$$\left. \begin{aligned} \cos \lambda_n l &= -1, \quad (n=1, 3, 5, \dots) \\ R_A &= R_B, \quad \theta_A = -\theta_B \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(17)$$

の振動数方程式と端末条件とが、同時に成立していないなければならない。

全く同様にして振動中の両端支持ばりが、 $\cos \lambda_n l = 1$  の振動数方程式から得られる振動数をもつとき、その振動は偶数次の振動を表わし、端末条件としては  $R_A = -R_B$  および  $\theta_A = \theta_B$  が成立する、という結論が得られる。すなわち、両端支持ばりが偶数次の振動をしている場合には

$$\left. \begin{aligned} \cos \lambda_n l &= 1, \quad (n=2, 4, 6, \dots) \\ R_A &= -R_B, \quad \theta_A = \theta_B \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(18)$$

の振動数方程式と端末条件とが、お互いに対応する。

このような振動数に対応して、そのときの端末条件をまとめて表示するためには、(8) 式を

$$\left. \begin{aligned} R_{A(n)} &= (-1)^{n+1} R_{B(n)}, \quad \text{および} \\ \theta_{A(n)} &= (-1)^n \theta_{B(n)}, \quad (n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(19)$$

のように表現すればよい。ただし、 $R_{A(n)}$  などは、それらが振動次数  $n$  に対応することを明示するために用いた表現である。

次に (19) 式と同様な表現法によれば、(8') 式は

$$\left. \begin{aligned} R_{A(n)} &= (EI\lambda_n^3)\theta_{A(n)}, \quad (n=1, 2, 3, \dots) \\ R_{B(n)} &= -(EI\lambda_n^3)\theta_{B(n)}, \quad (n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(20)$$

のように表わされる。そこでいま本式の右辺の  $\theta_{A(n)}$  と  $\theta_{B(n)}$  を、(19) 式の第2式を使って  $\theta_{B(n)}$  と  $\theta_{A(n)}$  でそれぞれ置き換えてみると、上の (20) 式は

$$\left\{ \begin{aligned} R_{A(n)} &= (-1)^n (EI\lambda_n^3)\theta_{B(n)} \\ &\quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots(21) \\ R_{B(n)} &= (-1)^{n+1} (EI\lambda_n^3)\theta_{A(n)} \\ &\quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots(22) \end{aligned} \right.$$

となり、一端に生ずる支点反力  $R$  を他端の傾斜角  $\theta$  で表わすこともできる。もちろん、これらの式に対応する固有振動数は (14) 式もしくは (10) 式により求められる。(21) 式と (22) 式は前記の (16) 式を書き換えたものにすぎない。

### 3.3 振動モード曲線

以上のようにして、振動次数と端末条件との対応関係が得られるが、振動モードは各固有振動数によって異なる。そこで次に各振動次数に対応する振動モードを求めてみることにする。

この両端支持ばりの振動モード曲線  $\varphi(x)$  は、(7) 式により

$$\varphi(x) = \frac{\theta_A}{2\lambda} \{ \sinh \lambda x + \sin \lambda x - \frac{R_A}{(EI\lambda^3)\theta_A} (\sinh \lambda x - \sin \lambda x) \} \quad \dots\dots(23)$$

で表わされる。本式によるとその形を確定するためには、左端のA点における抗力  $R_A$  とたわみ角  $\theta_A$  の比  $R_A/(EI\lambda^3 \cdot \theta_A)$  の値を決定すればよいことがわかる。ところが、この  $R_A/(EI\lambda^3 \cdot \theta_A)$  の値は(9')式の第1式により、次のように簡単に求められる。

すなわち、これまでのところでは、(9)式と(9')式の振動次数方程式のうちで、(9)式のみは使用済みであるが、(9')式は未使用のまま残しておいた。そこで、次にこの(9')式を使用する。この場合、(3)式の関係が存在するので、(9')式からは

$$R_A - (EI\lambda^3)\theta_A = 0 \quad \dots\dots(24)$$

が得られる。本式は前に(8')式として示しておいたものにほかならない。

したがって、上記の(24)式により端末抗力  $R_A$  と端末傾斜角  $\theta_A$  の比を求めると

$$R_A/(EI\lambda^3 \cdot \theta_A) = 1 \quad \dots\dots(25)$$

を得る。この(25)式の値を(23)式に代入すれば、 $\lambda$  を  $\lambda_n$  と書いて振動のモード曲線が

$$\varphi_n(x) = \frac{\theta_{A(n)}}{\lambda_n} \sin \lambda_n x = \frac{l\theta_{A(n)}}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (n=1, 2, 3, \dots\dots) \quad \dots\dots(26)$$

のように、その中に端末傾斜角を含む形で決定できる。本式でわかるごとく、(10)式で示した  $\sin \lambda l = 0$  の振動数方程式は  $[w]_{x=l} = [\varphi]_{x=l} = 0$  の境界条件から得られたものであることを知る。

このように、両端支持ばりに対しては、その振動モード曲線が(26)式の形で得られた。しかし、このままの形では端末条件との対応関係がいささか不明確になっている。よって、この点を明確にするために、いま(26)式で  $x = \xi + l/2$  と置いて、座標原点を径間の中央点に移してみると

$$\varphi_n(\xi) = \frac{l\theta_{A(n)}}{n\pi} \left( \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{l} \xi + \cos \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{l} \xi \right) \quad \dots\dots(26')$$

が得られる。ここでもし、 $n$  が奇数値を取るものとするれば、 $\cos(n\pi/2) = 0$  となり、この結果上式は

$$\varphi_n(\xi) = \frac{l\theta_{A(n)}}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{l} \xi \quad (n=1, 3, 5, \dots\dots) \quad \dots\dots(27)$$

となる。ところが本式で、 $\xi = -\xi$  とおいても、 $\varphi_n(\xi)$  の値は変わらない。したがってこのとき、振動のたわみ形は径間の中央点に対して、左右対称の形になることがわかる。そして、この奇数次の振動に対して

は、振動数方程式と端末条件が(17)式で表わされる。

つまり、(27)式で表わされる振動モードに対しては、(17)式の端末条件が対応していることになる。このことは(27)式の  $\varphi(\xi)$  を  $\xi$  で微分して、たわみ角  $d\varphi/d\xi$  とせん断力  $EI(d^3\varphi/d\xi^3)$  を求め、これらに  $\xi = -l/2$  と  $\xi = l/2$  の境界位置を代入すると、(17)式の端末条件が得られる、という事実により容易に確認できる。

さらにまた、(26')式で  $n$  が偶数値を採るものとするれば、 $\sin(n\pi/2) = 0$  となり、(26')式の  $\varphi(\xi)$  は

$$\varphi_n(\xi) = \frac{l\theta_{A(n)}}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{l} \xi \quad (n=2, 4, 6, \dots\dots) \quad \dots\dots(28)$$

となる。本式で  $\xi = -\xi$  とおくと、 $\varphi_n(\xi)$  の絶対値は変わらないで、その符号のみが変る。よってこのときの振動たわみ形は、径間の中央点に対して左右非対称の形になる、ということがわかる。そしてさらに、この場合には(18)式で示した振動数方程式と端末条件が成立している。

つまり、(28)式の振動モードは(18)式の端末条件に対応することになる。このことも前の(27)式のときと同様に、(28)式を微分してたわみ角とせん断力を求め、これらに  $\xi = -l/2$  と  $\xi = l/2$  の境界位置を代入すれば、容易に確認することができる。

次に振動中のたわみ  $w$  は、(26)式を(5)式に代入すればよいので

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l\theta_{A(n)}}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot \sin(\omega_n t + \alpha_n) \quad \dots\dots(29)$$

となり、たわみ  $w$  は端末におけるたわみ角  $\theta_{A(n)}$  で表わされる。この  $\theta_{A(n)}$  は初期条件で決まる性格のものであるが、支持端のごく近傍で、その点のたわみ角を計測するなどして、実験的に求めてもよい。

なおつぎに、(25)式より得られる  $\theta_{A(n)} = R_{A(n)}/(EI\lambda_n^3)$  の関係を使えば、(26)式は

$$\varphi_n(x) = \frac{lR_{A(n)}}{n\pi(EI\lambda_n^3)} \sin \frac{n\pi}{l} x \quad \dots\dots(30)$$

のようになり、その形を  $R_{A(n)}$  で表現してもよい。したがって、(29)式の  $\theta_{A(n)}$  も  $R_{A(n)}$  で置き換えられる。

以上述べてきたように、端末条件を最初に求めておけば、振動時のたわみ形が端末変位  $\theta_{A(n)}$  もしくは端末抗力  $R_{A(n)}$  で具体的に表現される。ここで  $\theta_{A(n)}$  や  $R_{A(n)}$  は実験的に求めることもできる。このため、振動モードに対する理論曲線を実験により求めようと

するとき、理論結果と実験結果の比較が直接可能となり、便利であると考える。

#### 4. 片持ばり

片持ばりをA端自由，B端固着とすれば

$$M_A=0, R_A=0, \delta_B=0, \theta_B=0 \quad \dots\dots(31)$$

の境界条件があらかじめ与えられていることになる。さらにこの場合は、第1報の(56)式と(57)式によって、はりの端末条件として

$$\left\{ \begin{array}{l} M_B^2=(EI\lambda^2)^2\delta_A^2 \quad \dots\dots(32) \\ R_B^2=(EI\lambda^2)^2\theta_A^2 \quad \dots\dots(33) \end{array} \right.$$

の関係が常に成立している<sup>1)</sup>。また、この片持ばりに対する振動モード曲線  $\varphi(x)$  は、(5')式に(31)式の条件を代入すれば

$$\varphi(x)=\frac{1}{2EI\lambda^2}\{(EI\lambda^2)\lambda\delta_A(\cosh \lambda x+\cos \lambda x) + (EI\lambda^2)\theta_A(\sinh \lambda x+\sin \lambda x)\} \quad \dots\dots(34)$$

で表わされる。

##### 4.1 振動数方程式

前の両端支持ばりと同様に、(34)式を使用する従来法とは別途に、ここでも(1)式と(2)式を使用して振動数方程式を求めることにする。片持ばりに対する振動次数方程式は、(1)式に(31)式の条件を適用すると

$$\left. \begin{array}{l} (EI\lambda^2)(\lambda^2\delta_A^2+\theta_A^2)\cos \lambda l \\ \quad =-(\lambda^2\delta_A M_B+\theta_A R_B) \\ (EI\lambda^2)(\lambda^2\delta_A^2+\theta_A^2)\sin \lambda l \\ \quad =\lambda(-\theta_A M_B+\delta_A R_B) \end{array} \right\} \quad \dots\dots(35)$$

となり、また(31)式の条件を(2)式に適用すれば

$$\left. \begin{array}{l} (EI\lambda^2)(\lambda^2\delta_A^2-\theta_A^2)\cosh \lambda l \\ \quad =\lambda^2\delta_A M_B-\theta_A R_B \\ (EI\lambda^2)(\lambda^2\delta_A^2-\theta_A^2)\sinh \lambda l \\ \quad =\lambda(-\theta_A M_B+\delta_A R_B) \end{array} \right\} \quad \dots\dots(35')$$

を得る。したがって、 $\delta_A, \theta_A, M_B, R_B$ をこれら4個の式から消去してみると、振動数方程式が得られるはずである。しかし、ここでは計算手数をはぶく意味から、次のような簡便法を取ることにした。

すなわち前に述べたように、振動数方程式は上記4個の式のうち、適切な2個の式を使用して得られるわけであるから、いま(35)式の第1式と(35')式の第1式とをえらび出し、これら2個の式を辺々かけ算してみると

$$\begin{aligned} & (EI\lambda^2)^2(\lambda^4\delta_A^4-\theta_A^4)\cos \lambda l \cdot \cosh \lambda l \\ & \quad =-(\lambda^4\delta_A^2 M_B^2-\theta_A^2 R_B^2) \end{aligned}$$

を得る。これに(32)式と(33)式の端末条件を代入して、 $M_B$ と $R_B$ を消去すると

$$\begin{aligned} & (EI\lambda^2)^2(\lambda^4\delta_A^4-\theta_A^4)\cos \lambda l \cdot \cosh \lambda l \\ & \quad =-(EI\lambda^2)^2(\lambda^4\delta_A^4-\theta_A^4) \\ & \quad \therefore (\lambda^2\delta_A^2+\theta_A^2)(\lambda^2\delta_A^2-\theta_A^2)(\cos \lambda l \cdot \cosh \lambda l \\ & \quad \quad +1)=0 \end{aligned}$$

となる。この場合、A端が自由の片持ばりを考えているので、 $\delta_A \neq 0, \theta_A \neq 0$ であり、この結果 $\lambda^2\delta_A^2+\theta_A^2 \neq 0$ とすべきことがわかる。しかもこのとき、第1報の(51)式によれば $\lambda^2\delta_A^2-\theta_A^2 \neq 0$ の関係が存在する<sup>1)</sup>。このため上式から

$$\cos \lambda l \cdot \cosh \lambda l = -1 \quad \dots\dots(36)$$

が得られるが、本式が片持ばりに対する振動数方程式として、従来から採用されている最もなじみ深い表現式である<sup>2)</sup>。第1報ではこれを従来の境界値問題に対する解法手順に従い、(34)式を使用して求め、それをそこでは(50)式として示しておいた<sup>1)</sup>。

ここで(36)式をいま

$$\cos \lambda l = \frac{-1}{\cosh \lambda l} < 0 \quad \dots\dots(37)$$

と書いてみると、 $\cos \lambda l$ の値は

$$-1 < \cos \lambda l < 0 \quad \dots\dots(38)$$

の範囲にあることがわかる。なぜならば、(3)式によると $\cosh \lambda l > 1$ であり、(36)式では $\cos \lambda l < 0$ としなければならないからである。この(38)式はそれを満足する $\lambda l$ の値が、第2象限と第3象限に存在すべきことを示す。したがって、第2象限に存在する最初の $\lambda l$ の値で、1次振動が表わされ、次の第3象限に存在する $\lambda l$ の値からは、2次の振動が得られる。そして、そのすぐあとにつづく第2象限の $\lambda l$ からは3次振動が得られ、その次の第3象限の $\lambda l$ の値からは4次の振動が得られる。

このようにして、前の両端支持ばりの場合と同様に、ここでも振動次数を $n$ で表わすことにすると、第2象限の $\lambda_n l$ からは奇数次の振動数が得られ、また第3象限の $\lambda_n l$ からは偶数次の振動数が得られるということがわかる。この奇数次と偶数次の振動数に対応して、それぞれの振動数を算定する振動数方程式を得るためには、(36)式の振動数方程式を変形して、次のように別の形の表現式にしておけばよい。

すなわち、(36)式を書き換えて得た(37)式において、その両辺を2乗して1から引いてみると

$$1 - \cos^2 \lambda_n l = 1 - \frac{1}{\cosh^2 \lambda_n l}, \therefore \sin^2 \lambda_n l = \frac{\sinh^2 \lambda_n l}{\cosh^2 \lambda_n l}$$

となり、これから

$$\begin{aligned} \sin \lambda_n l &= \tanh \lambda_n l, \text{ もしくは} \\ \sin \lambda_n l &= -\tanh \lambda_n l \end{aligned} \quad \dots\dots (39)$$

の関係をj得る。ただし、本式から得られる  $\lambda_n l$  の値は (38) 式の条件のために、第2象限と第3象限に存在しなければならない。よって、この (39) 式の第1式から奇数次の振動数が得られ、第2式からは偶数次の振動数が得られる。何となれば、すぐ前に述べたように、(39) 式の第1式を満足する  $\lambda_n l$  の値は第2象限に存在し、それは奇数次振動を示すことになり、またその第2式を満足する  $\lambda_n l$  の値は第3象限に存在し、それが偶数次振動を示すことになるためである。

全く同様にして、(36) 式を今度は

$$\cosh \lambda_n l = \frac{-1}{\cos \lambda_n l}$$

と書いて両辺を2乗し、そのあと両辺から1を引くと

$$\begin{aligned} \cosh^2 \lambda_n l - 1 &= \frac{1}{\cos^2 \lambda_n l} - 1, \\ \therefore \sinh^2 \lambda_n l &= \frac{\sin^2 \lambda_n l}{\cos^2 \lambda_n l} \end{aligned}$$

となる。したがって、これから

$$\begin{aligned} \tan \lambda_n l &= -\sinh \lambda_n l, \text{ もしくは} \\ \tan \lambda_n l &= \sinh \lambda_n l \end{aligned} \quad \dots\dots (40)$$

の関係をj得る。本式の第1式を満足する  $\lambda_n l$  は第2象限に存在するため、この第1式は奇数次の振動を表わす振動数方程式であることがわかる。またその第2式を満足する  $\lambda_n l$  は第3象限に存在し、それは偶数次の振動に対する振動数方程式を表わす。

以上述べたように、片持ばりの振動数方程式としては (36) 式のかわりに、(39) 式もしくは (40) 式を採用してもよいことがわかった。振動数方程式をこのような (39) 式と (40) 式の形で表現しておけば、振動次数と端末条件の対応関係が明確になり、かつ振動次数とそのときの端末条件に対応する振動モードも明確に指定できるようになる。

#### 4.2 振動固有数 $\lambda l$ と端末変位の比 $\theta_A/(\lambda \delta_A)$ との関係

(32) 式と (33) 式によれば、端末条件はまた

$$\left(\frac{\theta_A}{\delta_A}\right)^2 = \left(\frac{R_B}{M_B}\right)^2 \quad \dots\dots (41)$$

で表わされる。本式を第1報では (58) 式として示しておいた<sup>1)</sup>。この (41) 式は両辺に  $1/\lambda^2$  を乗じて

$$\frac{\theta_A^2}{\lambda^2 \delta_A^2} = \frac{R_B^2}{\lambda^2 M_B^2} \quad \dots\dots (41')$$

と表わしてもよい。

(41) 式つまり (41') 式の端末条件によれば、端末変位の比は、端末抗力の比に等しい。この結果、端末変位の比  $\theta_A/(\lambda \delta_A)$  と振動固有数  $\lambda l$  との対応関係がわかれば、端末条件と振動次数の対応関係が明確にできるはずである。そこで以下に、 $\lambda l$  に対する  $\theta_A/(\lambda \delta_A)$  の表現法について考えてゆく。

前に (35) 式の第1式と (35') 式の第1式の2個の式を使用すると、振動数方程式が得られることを述べておいた。それゆえに、これら両式の残りの2個の式は、これまでのところでは未使用であるということがわかる。しかし、(35) 式と (35') 式のうちで、これら未使用であった2個の式は、次のように、各振動数に対応する端末変位の比  $\theta_A/(\lambda \delta_A)$  の値を求めするために使用できる。

すなわち、(35) 式の第2式と (35') 式の第2式がこれまでのところ未使用であったが、これら両式によれば

$$(\lambda^2 \delta_A^2 + \theta_A^2) \sin \lambda l = (\lambda^2 \delta_A^2 - \theta_A^2) \sinh \lambda l$$

の関係が存在する。これを書き換えると

$$\begin{aligned} \theta_A^2 (\sinh \lambda l + \sin \lambda l) &= \lambda^2 \delta_A^2 (\sinh \lambda l - \sin \lambda l) \\ \therefore \frac{\theta_A^2}{\lambda^2 \delta_A^2} &= \frac{\sinh \lambda l - \sin \lambda l}{\sinh \lambda l + \sin \lambda l} \end{aligned} \quad \dots\dots (42)$$

となり、本式から  $\theta_A/(\lambda \delta_A)$  の値としては正負の2つのものが得られる。ところが、第1報で (48) 式として示しておいた

$$\frac{\theta_A}{\lambda \delta_A} = -\frac{\cosh \lambda l + \cos \lambda l}{\sinh \lambda l + \sin \lambda l} (<0) \quad \dots\dots (43)$$

の表現式、および第1報で (49) 式として示しておいた

$$\frac{\theta_A}{\lambda \delta_A} = -\frac{\sinh \lambda l - \sin \lambda l}{\cosh \lambda l + \cos \lambda l} (<0) \quad \dots\dots (43')$$

の表現式を参照にすれば、 $\theta_A/(\lambda \delta_A)$  は負の値を採らなければならない<sup>1)</sup>。よって、(42) 式から得られる  $\theta_A/(\lambda \delta_A)$  の値は

$$\frac{\theta_A}{\lambda \delta_A} = -\sqrt{\frac{\sinh \lambda l - \sin \lambda l}{\sinh \lambda l + \sin \lambda l}} \quad \dots\dots (44)$$

として求められる。ただし、上記の (43) 式と (43') 式および (44) 式は奇数次、偶数次の振動数を問わず、すべての振動次数に対して成立する。

ここで (44) 式を前記の (43) 式および (43') 式と比べてみると、その表現式が異なった形をしている。

けれども、これら(43)式と(43')式および(44)式の3者は実質的には同じものであり、それは次のようにして簡単に証明することができる。

従来の境界値問題に対する解法手順に従えば、(34)式から境界条件を使用して(43)式と(43')式が得られ、この2者を組み合わせると、(36)式の振動数方程式が求められることがわかっている<sup>2)</sup>。このことについては前もって、第1報で示しておいた<sup>1)</sup>。しかし、ここでは(34)式を使用することなしに、(43)式の右辺と(44)式の右辺を等しくおいて、振動数方程式を求めてみる。そうすれば

$$\frac{\cosh \lambda l + \cos \lambda l}{\sinh \lambda l + \sin \lambda l} = \sqrt{\frac{\sinh \lambda l - \sin \lambda l}{\sinh \lambda l + \sin \lambda l}}$$

$$\therefore \cosh \lambda l + \cos \lambda l = \sqrt{\sinh^2 \lambda l - \sin^2 \lambda l}$$

を得る。ところがこの両辺を2乗してみると

$$2(\cos \lambda l \cdot \cosh \lambda l + 1) = 0 \quad \dots\dots(45)$$

となり、(36)式と同じ結果が得られる。これはまた、(43)式と(43')式の両辺を、それぞれかけ合わせてみると(42)式が得られ、この(42)式は(44)式を表わす、ということによっても容易に確認できる。このことは(43)式と(43')式の2個の式を総合すれば、それらは(44)式の1個の式で表現できるということの意味しており、この結果、(43)式と(43')式は(44)式の1個で置き換えてもよいことがわかる。

全く同様に、(43')式と(44)式とを組み合わせても、(45)式と同じ結果を得る。したがって、(36)式が成立するとき、(43)式と(43')式および(44)式の3者は全く等価なものになってしまう。つまり、端末変位の比  $\theta_A/(\lambda \delta_A)$  の値としては

$$\frac{\theta_A}{\lambda \delta_A} = -\frac{\cosh \lambda l + \cos \lambda l}{\sinh \lambda l + \sin \lambda l} = -\frac{\sinh \lambda l - \sin \lambda l}{\cosh \lambda l + \cos \lambda l}$$

$$= -\sqrt{\frac{\sinh \lambda l - \sin \lambda l}{\sinh \lambda l + \sin \lambda l}} \quad \dots\dots(46)$$

のように多様な表現が可能となる。

#### 4.3 端末条件と振動数方程式の対応

端末変位の比  $\theta_A/(\lambda \delta_A)$  は(46)式によって、振動固有数  $\lambda l$  で表わされたが、この(46)式の形のままでは振動次数と端末条件との対応関係が、いささか不明確である。したがって、これらの対応関係を、さらに明確にすることを次に考えてみる。

そのためには、(32)式と(33)式の端末条件を、次のように別々にわけて仕分けし、それぞれに対する端末変位の比  $\theta_A/(\lambda \delta_A)$  を求めてゆけばよい。すなわち、

(32)式と(33)式をいま

$$M_B = -(EI\lambda^2)\delta_A, \text{ あるいは } M_B = (EI\lambda^2)\delta_A \}$$

$$R_B = (EI\lambda^2)\theta_A, \text{ あるいは } R_B = -(EI\lambda^2)\theta_A \}$$

$$\dots\dots(47)$$

のように区分しておき、これらの端末条件それぞれに対応する振動数方程式を、(35)式と(35')式によって求めてみる。

このようにすれば、 $M_B = -(EI\lambda^2)\delta_A$  と  $M_B = (EI\lambda^2)\delta_A$  のそれぞれに対して

$$R_B = \pm (EI\lambda^2)\theta_A$$

の複号のうちのいずれの符号をもつ関係式が、同時に成立しなければならないか、といった  $M_B$  と  $R_B$  の対応関係も明らかにできるはずである。そしてさらに、これら  $M_B$  と  $R_B$  の対応関係に対しては、それぞれの振動数を決定する振動数方程式が別途に得られるはずであり、その形も(36)式の表現とは異なったものになるとの見通しが得られる。それゆえに以下では、それぞれの端末条件に対応する振動数方程式を、(35)式と(35')式によって求める方針を取る。

この場合、(35)式と(35')式を少し変形しておく、あとの計算には都合がよい。それですら、(35')式の第1式と(35)式の第1式を辺々差し引くと

$$(EI\lambda^2)\{(\cosh \lambda l - \cos \lambda l)\lambda^2\delta_A^2 - (\cosh \lambda l + \cos \lambda l)\theta_A^2\} = 2\lambda^2\delta_A M_B \quad \dots\dots(48)$$

が得られ、また(35)式の第1式と(35')式の第1式を、辺々加え合わせてみると

$$(EI\lambda^2)\{(\cosh \lambda l + \cos \lambda l)\lambda^2\delta_A^2 - (\cosh \lambda l - \cos \lambda l)\theta_A^2\} = -2\theta_A R_B \quad \dots\dots(48')$$

となる。次に(35)式の第2式と(35')式の第2式からは

$$\frac{\theta_A}{\lambda \delta_A} = -\sqrt{\frac{\sinh \lambda l - \sin \lambda l}{\sinh \lambda l + \sin \lambda l}}$$

として、(44)式が得られることを前に述べておいた。

よって、端末条件と振動モードの対応性を求めるためには、(35)式と(35')式の4個の式のかわりに、いま求めた(48)式、(48')式および(44)式の3式を使用してもよいことがわかる。これら(48)式、(48')式および(44)式の3者を使って、端末条件と  $\lambda l$  の対応関係を示すと以下ようになる。

[i]  $M_B = -(EI\lambda^2)\delta_A$  のとき

$$(48) \text{ 式に } M_B = -(EI\lambda^2)\delta_A \text{ の関係を代入すると}$$

$$(EI\lambda^2)\{(\cosh \lambda l - \cos \lambda l)\lambda^2\delta_A^2 - (\cosh \lambda l + \cos \lambda l)\theta_A^2\} = -2(EI\lambda^2)\lambda^2\delta_A^2$$

$$\therefore \frac{\theta_A^2}{\lambda^2 \delta_A^2} = \frac{\cosh \lambda l - \cos \lambda l + 2}{\cosh \lambda l + \cos \lambda l} \quad \dots\dots(49)$$

のような関係が求まる。そこで本式の右辺で、その分母と分子に  $\cos \lambda l$  を乗じてみる。ただし、(38) 式によると、 $-1 < \cos \lambda l < 0$  の条件が存在したので、 $\cos \lambda l \neq 0$  であることがわかっている。このため、 $\cos \lambda l$  を分母と分子に乗ずることは何等支障がない。このようにして、上の  $\theta_A^2 / (\lambda^2 \delta_A^2)$  の値は

$$\frac{\theta_A^2}{\lambda^2 \delta_A^2} = \frac{\cosh \lambda l \cos \lambda l - \cos^2 \lambda l + 2 \cos \lambda l}{\cosh \lambda l \cos \lambda l + \cos^2 \lambda l} \dots\dots(50)$$

となるが、ここで (36) 式の振動数方程式から得られる  $\cosh \lambda l \cdot \cos \lambda l = -1$  の関係を使用すれば、上式は

$$\frac{\theta_A^2}{\lambda^2 \delta_A^2} = \frac{(1 - \cos \lambda l)^2}{1 - \cos^2 \lambda l} \quad \dots\dots(51)$$

のように書き換えられる。ここでまた、すぐ前に述べたように、(38) 式によって  $1 - \cos \lambda l \neq 0$  の関係が成立しているため、この  $1 - \cos \lambda l$  の項を (51) 式の右辺で、その分母と分子からおとすと

$$\frac{\theta_A^2}{\lambda^2 \delta_A^2} = \frac{1 - \cos \lambda l}{1 + \cos \lambda l} \quad \dots\dots(52)$$

が得られる。本式からは正負 2 個の値を得るが、(43) 式もしくは (43') 式によれば、 $\theta_A / (\lambda \delta_A) < 0$  でなくてはならない。したがって、この場合  $\theta_A / (\lambda \delta_A)$  値のは

$$\frac{\theta_A}{\lambda \delta_A} = -\sqrt{\frac{1 - \cos \lambda l}{1 + \cos \lambda l}} (< 0) \quad \dots\dots(53)$$

とすべきである。

あるいはまた、(36) 式の振動数方程式により、 $\cos \lambda l = -1 / \cosh \lambda l$  を求めて、これを上の (53) 式の右辺に代入すると、この (53) 式は

$$\frac{\theta_A}{\lambda \delta_A} = -\sqrt{\frac{\cosh \lambda l + 1}{\cosh \lambda l - 1}} \quad \dots\dots(53')$$

のようにも表現できる。この結果

$$M_B = -(EI\lambda^2) \delta_A \quad \dots\dots(54)$$

の端末条件が成立するとき、端末変位の比  $\theta_A / (\lambda \delta_A)$  は

$$\frac{\theta_A}{\lambda \delta_A} = -\sqrt{\frac{\cosh \lambda l + 1}{\cosh \lambda l - 1}} = -\sqrt{\frac{1 - \cos \lambda l}{1 + \cos \lambda l}} \quad \dots\dots(55)$$

で表わされることがわかる。本式は (53) 式と (53') 式をまとめて示したものにすぎない。

この (55) 式を満足する振動固有数  $\lambda l$  は、これら 2 個の  $\theta_A / (\lambda \delta_A)$  の値を (44) 式と等しくおいて、振動数方程式を作ることによって求められる。すなわち、(44) 式は (35) 式と (35') 式から得られたものであ

り、かつこの (44) 式はすべての振動次数に対して成立する関係であった。それで、(44) 式の右辺を (53') 式の右辺に等しくおけば、振動数方程式が

$$\sqrt{\frac{\sinh \lambda l - \sin \lambda l}{\sinh \lambda l + \sin \lambda l}} = \sqrt{\frac{\cosh \lambda l + 1}{\cosh \lambda l - 1}} \quad \therefore \sin \lambda l = -\tanh \lambda l \quad \dots\dots(56)$$

の形が得られるが、これは (39) 式の第 2 式と一致する。ところが、(39) 式の第 2 式を満足する  $\lambda l$  の値は、前にも述べたごとく第 3 象限に存在し、そのときの振動数は偶数次に相当するものであった。

よって、(54) 式の端末条件は振動数が偶数次の値を探るときに成立することがわかる。このように振動次数が偶数次に当たることを明示するためには、 $n$  を振動次数として (56) 式を

$$\sin \lambda_n l = -\tanh \lambda_n l, \quad (n=2, 4, 6, \dots) \quad \dots\dots(56')$$

のように表現しておくほうがよい。

なお、この場合 (53) 式と (53') 式を等しく置いたのでは、次式のように

$$\sqrt{\frac{\cosh \lambda l + 1}{\cosh \lambda l - 1}} = \sqrt{\frac{1 - \cos \lambda l}{1 + \cos \lambda l}} \quad \therefore 2(\cosh \lambda l \cdot \cos \lambda l + 1) = 0$$

として、(36) 式の形をした一般性のある振動数方程式が得られるだけである。さらにこのとき、(46) 式の関係によれば、(44) 式は (43) 式ないし (43') 式に等しいわけであるから、(55) 式の値を (43) 式もしくは (43') 式に等しく置いても、(56) 式の振動数方程式が得られる。しかし、その場合には (55) 式が (36) 式の振動数方程式を使用して得られたにもかかわらず、(55) 式を (43) 式もしくは (43') 式と等しく置いたあとの計算過程で、さらに (36) 式の在来形の振動数方程式を再度使用しないと、(56) 式が得られない。このように (43) 式あるいは (43') 式を (55) 式と組み合わせるとき、計算手数がそれだけ余計にかかるのは、(43) 式と (43') 式の値が (35) 式および (35') 式の振動次数方程式とは、直接的な対応関係をもたないことに、その原因があるものと考えらる。

次に全く同様にして、(44) 式の右辺と (53) 式の右辺を等しくおくと

$$\sqrt{\frac{\sinh \lambda l - \sin \lambda l}{\sinh \lambda l + \sin \lambda l}} = \sqrt{\frac{1 - \cos \lambda l}{1 + \cos \lambda l}} \quad \therefore \tan \lambda_n l = \sinh \lambda_n l, \quad (n=2, 4, 6, \dots) \quad \dots\dots(57)$$

となり、これは (40) 式の第 2 式と一致する。この (40) 式の第 2 式はやはり、偶数次の振動数のときに成立する関係であった。よって、(57) 式ではこれを

明示するために、 $\lambda$  のところをあらかじめ  $\lambda_n$  で表現しておいた。この (57) 式を求めるために、(53) 式を (43) 式もしくは (43') 式と組み合わせてもよい。しかし、その場合も計算の途中で再度 (36) 式を使用する必要があり、具合が悪い。

[ii]  $M_B = (EI\lambda^2)\delta_A$  のとき

(48) 式に  $M_B = (EI\lambda^2)\delta_A$  を代入すると

$$(EI\lambda^2) \{ (\cosh \lambda l - \cos \lambda l - 2)\lambda^2 \delta_A^2 - (\cosh \lambda l + \cos \lambda l)\theta_A^2 \} = 0$$

$$\therefore \frac{\theta_A^2}{\lambda^2 \delta_A^2} = \frac{\cosh \lambda l - \cos \lambda l - 2}{\cosh \lambda l + \cos \lambda l} \quad \dots (58)$$

の関係が求まる。前に述べたように、この振動問題の場合には (3) 式が成立し、それによれば  $\cosh \lambda l > 1$  でなくてはならなかった。これからわかるように、(58) 式の右辺でその分母と分子に、それぞれ  $\cosh \lambda l (\neq 0)$  を乗ずることは、何ら差し支えない。このような計算を実行した結果へ、さらに (36) 式の振動数方程式から得られるところの  $\cos \lambda l = -1/\cosh \lambda l$  の関係、つまり (37) 式の関係を使用すると、(58) 式は

$$\frac{\theta_A^2}{\lambda^2 \delta_A^2} = \frac{(\cosh \lambda l - 1)^2}{\cosh^2 \lambda l - 1} \quad \dots (59)$$

となる。しかし本式の右辺で、 $\cosh \lambda l - 1 (\neq 0)$  の項はおちるため、この (59) 式は

$$\frac{\theta_A^2}{\lambda^2 \delta_A^2} = \frac{\cosh \lambda l - 1}{\cosh \lambda l + 1} \quad \dots (60)$$

の形で表わされる。

あるいはまた、(36) 式の振動数方程式、つまり  $\cosh \lambda l = -1/\cos \lambda l$  の関係を用いると、上の (60) 式は

$$\frac{\theta_A^2}{\lambda^2 \delta_A^2} = \frac{1 + \cos \lambda l}{1 - \cos \lambda l} \quad \dots (61)$$

のようにも表現できる。(60) 式と (61) 式に対しても、(43) 式もしくは (43') 式の関係からわかるごとく、 $\theta_A/(\lambda \delta_A) < 0$  とすべきである。よって、この場合の端末条件

$$M_B = (EI\lambda^2)\delta_A \quad \dots (62)$$

に対応して、(60) 式と (61) 式の  $\theta_A/(\lambda \delta_A)$  の値は

$$\frac{\theta_A}{\lambda \delta_A} = -\sqrt{\frac{\cosh \lambda l - 1}{\cosh \lambda l + 1}} = -\sqrt{\frac{1 + \cos \lambda l}{1 - \cos \lambda l}} \quad \dots (63)$$

の形を取らなければならない。

ここで、(63) 式の第1の関係式を (44) 式の右辺に等しくおくと

$$\sqrt{\frac{\cosh \lambda l - 1}{\cosh \lambda l + 1}} = \sqrt{\frac{\sinh \lambda l - \sin \lambda l}{\sinh \lambda l + \sin \lambda l}}$$

$$\therefore \sin \lambda_n l = \tanh \lambda_n l, \quad (n=1, 3, 5, \dots) \quad \dots (64)$$

となり、また (63) 式の第2の関係式と (44) 式からは

$$\sqrt{\frac{1 + \cos \lambda l}{1 - \cos \lambda l}} = \sqrt{\frac{\sinh \lambda l - \sin \lambda l}{\sinh \lambda l + \sin \lambda l}}$$

$$\therefore \tan \lambda_n l = -\sinh \lambda_n l, \quad (n=1, 3, 5, \dots) \quad \dots (65)$$

を得る。(64) 式は (39) 式の第1式と一致しており、また (65) 式は (40) 式の第1式と一致し、これらはいずれも振動次数としては、奇数値を取る場合の振動数方程式であった。よって、(62) 式の端末条件と (63) 式の端末変位の比は、奇数次の振動のときに成立する。この奇数次振動を明示するために、(64) 式と (65) 式では、 $\lambda$  を  $\lambda_n$  の形であらかじめ表現しておいた。

なお、この場合も (63) 式を (43) 式もしくは (43') 式と組み合わせて、(64) 式と (65) 式を求めてもよい。しかし、そこではやはり計算の途中で再度 (36) 式を使用する必要があり、それだけ余計な計算手数が必要となることは、(56') 式および (57) 式の場合と同様である。つまり、(63) 式は (36) 式の振動数方程式を使用して得たものであったが、この (63) 式を (43) 式もしくは (43') 式と組み合わせたときには、再度 (36) 式を使用する必要が生じ、その分だけ計算手数がかかるため具合が悪い。

[iii]  $R_B = (EI\lambda^2)\theta_A$  のとき

(48) 式に  $R_B = (EI\lambda^2)\theta_A$  を代入すれば

$$(EI\lambda^2) \{ (\cosh \lambda l + \cos \lambda l)\lambda^2 \delta_A^2 - (\cosh \lambda l - \cos \lambda l - 2)\theta_A^2 \} = 0$$

$$\therefore \frac{\theta_A^2}{\lambda^2 \delta_A^2} = \frac{\cosh \lambda l + \cos \lambda l}{\cosh \lambda l - \cos \lambda l - 2} \quad \dots (66)$$

が得られ、この式の右辺をいままでと全く同じ手順に従って、(36) 式の振動数方程式から得られる  $\cos \lambda l = -1/\cosh \lambda l$  の関係を用いて、 $\cosh \lambda l$  の項のみで表わすと、上の (66) 式は

$$\frac{\theta_A^2}{\lambda^2 \delta_A^2} = \frac{\cosh^2 \lambda l - 1}{(\cosh \lambda l - 1)^2} \quad \dots (67)$$

となる。ここでまた、(3) 式によれば  $\cosh \lambda l - 1 \neq 0$  の条件が存在するため、上式の右辺でその分子と分母から  $\cosh \lambda l - 1$  の項をおとし、さらに  $\theta_A/(\lambda \delta_A) < 0$  の関係を用いると、(67) 式より

$$\frac{\theta_A}{\lambda \delta_A} = -\sqrt{\frac{\cosh \lambda l + 1}{\cosh \lambda l - 1}} \quad \dots (68)$$

が得られる。あるいは再度、(36) 式によって  $\cosh \lambda l = -1/\cos \lambda l$  を求め、これを上式の右辺に代入すると、

この (68) 式に対しては

$$\frac{\theta_A}{\lambda \delta_A} = -\sqrt{\frac{1-\cos \lambda l}{1+\cos \lambda l}} \quad \dots\dots(68')$$

という形の表現も可能である。よって、 $R_B=(EI\lambda^2)$   
 $\theta_A$  の端末条件が成立するとき、端末変位の比  $\theta_A/$   
 $(\lambda \delta_A)$  は

$$\frac{\theta_A}{\lambda \delta_A} = -\sqrt{\frac{\cosh \lambda l + 1}{\cosh \lambda l - 1}} = -\sqrt{\frac{1-\cos \lambda l}{1+\cos \lambda l}} \quad \dots\dots(69)$$

で表わされることがわかる。

さて、この (69) 式と前の (55) 式とを比較してみると両者は全く一致している。前記の (55) 式は偶数次の振動のときに満足され、そのとき (54) 式の端末条件が成立した。したがってここで、次の結論が得られる。すなわち

$$M_B = -(EI\lambda^2)\delta_A, \text{ ならびに } R_B = (EI\lambda^2)\theta_A \quad \dots\dots(70)$$

の端末条件は同時に成立していなければならない、かつそのときの端末変位の比は (69) 式、つまり (55) 式で表わされる。そして、この (70) 式の端末条件に対応して、振動数方程式としては、(56') 式および (57) 式が成立する。(56') 式は (39) 式の第 2 式であり、また (57) 式は (40) 式の第 2 式に外ならない。

以上の振動次数が偶数値を採るときに、同時に成立する関係式をとりまとめ、見やすくそろえて書くと

$$\left. \begin{aligned} \frac{\theta_{A(n)}}{\lambda_n \delta_{A(n)}} &= -\sqrt{\frac{\cosh \lambda_n l + 1}{\cosh \lambda_n l - 1}} = -\sqrt{\frac{1-\cos \lambda_n l}{1+\cos \lambda_n l}} \\ \sin \lambda_n l &= -\tanh \lambda_n l, \text{ もしくは} \\ &\quad \tan \lambda_n l = \sinh \lambda_n l \\ M_{B(n)} &= -(EI\lambda_n^2)\delta_{A(n)}, \text{ ならびに} \\ R_{B(n)} &= (EI\lambda_n^2)\theta_{A(n)} \\ &\quad (n=2, 4, 6, \dots\dots) \end{aligned} \right\} \dots\dots(70')$$

のようになる。

[iv]  $R_B = -(EI\lambda^2)\theta_A$  のとき  
 (48') 式に  $R_B = -(EI\lambda^2)\theta_A$  の関係を代入すれば  
 $(EI\lambda^2)\{(\cosh \lambda l + \cos \lambda l)\lambda^2 \delta_A^2$   
 $- (\cosh \lambda l - \cos \lambda l + 2)\theta_A^2\} = 0$   
 $\therefore \frac{\theta_A^2}{\lambda^2 \delta_A^2} = \frac{\cosh \lambda l + \cos \lambda l}{\cosh \lambda l - \cos \lambda l + 2}$

となる。いままで全く同様にして、(36) 式から  $\cos \lambda l = -1/\cosh \lambda l$  を求め、これを上式の右辺に代入すると

$$\frac{\theta_A^2}{\lambda^2 \delta_A^2} = \frac{\cosh^2 \lambda l - 1}{(\cosh \lambda l + 1)^2}, \therefore \frac{\theta_A^2}{\lambda^2 \delta_A^2} = \frac{\cosh \lambda l - 1}{\cosh \lambda l + 1}$$

$$\dots\dots(71)$$

が得られる。次に今度は、(36) 式を  $\cosh \lambda l = -1/\cos \lambda l$  と書いて、これを上の (71) 式の右辺に使用すると、この (71) 式は

$$\frac{\theta_A^2}{\lambda^2 \delta_A^2} = \frac{1+\cos \lambda l}{1-\cos \lambda l} \quad \dots\dots(71')$$

で表わされる。前にも述べたように、この片持ばりの場合には、(43) 式もしくは (43') 式により  $\theta_A/(\lambda \delta_A) < 0$  の関係がわかっているため、(71) 式と (71') 式は

$$\frac{\theta_A}{\lambda \delta_A} = -\sqrt{\frac{\cosh \lambda l - 1}{\cosh \lambda l + 1}} = -\sqrt{\frac{1+\cos \lambda l}{1-\cos \lambda l}} \quad \dots\dots(72)$$

としなければならない。

さて、この (72) 式と前記の (63) 式とを比較してみると、両者は完全に一致している。そして (63) 式は  $M_B = (EI\lambda^2)\delta_A$  の端末条件から得られたものであり、かつそれは奇数次の振動のときに成立する条件であった。したがってここで、次の結論が得られる。すなわち、奇数次の振動のとき

$$M_B = (EI\lambda^2)\delta_A, \text{ ならびに } R_B = -(EI\lambda^2)\theta_A \quad \dots\dots(73)$$

の端末条件は同時に成立し、かつ、そのときの端末変位の比は、(72) 式つまり (63) 式で表わされる。そして、この (73) 式の端末条件に対応して、振動数方程式としては、(64) 式および (65) 式が成立する。(64) 式は (39) 式の第 1 式であり、(65) 式は (40) 式の第 1 式のことである。

これらをとりまとめ、奇数次の振動のとき成立する関係式を、見やすくそろえて書けば

$$\left. \begin{aligned} \frac{\theta_{A(n)}}{\lambda_n \delta_{A(n)}} &= -\sqrt{\frac{\cosh \lambda_n l - 1}{\cosh \lambda_n l + 1}} = -\sqrt{\frac{1+\cos \lambda_n l}{1-\cos \lambda_n l}} \\ \sin \lambda_n l &= \tanh \lambda_n l, \text{ もしくは} \\ &\quad \tan \lambda_n l = -\sinh \lambda_n l \\ M_{B(n)} &= (EI\lambda_n^2)\delta_{A(n)}, \text{ ならびに} \\ R_{B(n)} &= -(EI\lambda_n^2)\theta_{A(n)} \\ &\quad (n=1, 3, 5, \dots\dots) \end{aligned} \right\} \dots\dots(73')$$

のようになる。

#### 4.4 振動モード曲線

ここでは、端末条件と振動モードの対応について考える。振動モードは振動固有数  $\lambda l$  によって異なるわけであるが、片持ばりの場合、振動のモード曲線  $\varphi(x)$

は、(34) 式を少し書き換えて

$$\varphi(x) = \frac{\theta_A}{2} \{ \cosh \lambda x + \cos \lambda x + \frac{\theta_A}{\lambda \delta_A} (\sinh \lambda x + \sin \lambda x) \} \quad \dots (74)$$

となる。本式によると、ある振動固有数  $\lambda l$  に対応する振動モードは、 $\theta_A/(\lambda \delta_A)$  の値で定まる。しかも、 $\theta_A/(\lambda \delta_A)$  の値としては、(46) 式のように多様な表現形が存在する。この結果、振動モードの表現式としては、多様な表現が可能であることを知る。

しかしながら、ここでは端末条件との対応を考えているので、振動モード曲線  $\varphi(x)$  を求める目的で、(46) 式の  $\theta_A/(\lambda \delta_A)$  の値を (74) 式に使用するわけにはいかない。なぜならば、この (46) 式の場合には、端末条件との対応関係が明示されていないからである。一方、この (46) 式に対して、(55) 式と (69) 式、もしくは (63) 式と (72) 式で表わされる  $\theta_A/(\lambda \delta_A)$  の値は、それらが (70) 式と (73) 式の端末条件に対応することが明示されている。したがって、これら対応関係が明確になっている (69) 式と (72) 式の値を、(74) 式に代入すれば、それぞれに対応する振動のモード曲線が得られるはずである。

まず、偶数次の振動を表わす (55) 式と (69) 式の  $\theta_A/(\lambda \delta_A)$  の値を使用してみる。このような振動次数が偶数値を取る場合、片持ばりの振動モードを表わす  $\varphi_n(x)$  は、(74) 式の  $\theta_A/(\lambda \delta_A)$  のところへ、(55) 式の第 1 の関係式、つまり (69) 式の第 1 の関係式の値を代入すればよいので、それは

$$\varphi_n(x) = \frac{\theta_{A(n)}}{2} \left\{ \cosh \lambda_n x + \cos \lambda_n x - \sqrt{\frac{\cosh \lambda_n l + 1}{\cosh \lambda_n l - 1}} (\sinh \lambda_n x + \sin \lambda_n x) \right\} \quad (n=2, 4, 6, \dots) \quad \dots (75)$$

となる。あるいはまた、それらの第 2 の関係式の値を使用して

$$\varphi_n(x) = \frac{\theta_{A(n)}}{2} \left\{ \cosh \lambda_n x + \cos \lambda_n x - \sqrt{\frac{1 - \cos \lambda_n l}{1 + \cos \lambda_n l}} (\sinh \lambda_n x + \sin \lambda_n x) \right\} \quad (n=2, 4, 6, \dots) \quad \dots (75')$$

の形で表わしてもよい。(75) 式と (75') 式によれば、 $\varphi_n(x)$  は自由端のたわみで決まることがわかる。

(75) 式と (75') 式の  $\varphi_n(x)$  は全く同じ振動たわみ形を表わすが、これらの式の  $\lambda_n l$  の値は (39) 式と (40) 式の第 2 式から得られる。そしてこれら (75) 式

と (75') 式に対応して、同時に成立すべき関係式を、とりまとめて示したものが (70') 式である。

次に振動次数が奇数値を採るときモード曲線  $\varphi_n(x)$  は、(74) 式の  $\theta_A/(\lambda \delta_A)$  のところに、(63) 式の第 1 の関係式つまり (72) 式の第 1 の関係式の値を代入すると

$$\varphi_n(x) = \frac{\theta_{A(n)}}{2} \left\{ \cosh \lambda_n x + \cos \lambda_n x - \sqrt{\frac{\cosh \lambda_n l - 1}{\cosh \lambda_n l + 1}} (\sinh \lambda_n x + \sin \lambda_n x) \right\} \quad (n=1, 3, 5, \dots) \quad \dots (76)$$

となり、またそれらの第 2 の関係式の値を、 $\theta_A/(\lambda \delta_A)$  のところに使用すると

$$\varphi_n(x) = \frac{\theta_{A(n)}}{2} \left\{ \cosh \lambda_n x + \cos \lambda_n x - \sqrt{\frac{1 + \cos \lambda_n l}{1 - \cos \lambda_n l}} (\sinh \lambda_n x + \sin \lambda_n x) \right\} \quad (n=1, 3, 5, \dots) \quad \dots (76')$$

の形で表わすこともできる。これらの式の  $\lambda_n l$  の値は (39) 式と (40) 式の第 1 式から得られ、そのときの端末条件としては (73) 式の関係が成立する。(73) 式は (76) 式もしくは (76') 式に対応して、同時に成立すべき関係式を、とりまとめて示したものである。

#### 4.5 片持ばりのまとめ

以上、片持ばりに対する振動次数と、それに対応する端末条件を明確にする意味で、振動次数が偶数値を取る場合と、奇数値を取る場合について、別々に考察してきた。ここでは振動次数  $n$  を使用して、これまでに得られた結果をまとめて表現しておくことにする。

まず、(39) 式と (40) 式の振動数方程式をまとめると、 $\cos \lambda l \cdot \cosh \lambda l = -1$  の在来表現式の代りに

$$\begin{aligned} \sin \lambda_n l &= (-1)^{n+1} \tanh \lambda_n l, \text{ もしくは} \\ \tan \lambda_n l &= (-1)^n \sinh \lambda_n l \end{aligned} \quad \dots (77)$$

が振動数方程式として採用できる。ただし、 $n=1, 2, 3, \dots$  とする。

次に、(70) 式と (73) 式をまとめると、片持ばりの端末条件は、(32) 式および (33) 式の代りに、次の式で表わしてもよい。すなわち、 $n=1, 2, 3, \dots$  とした場合

$$\begin{aligned} M_{B(n)} &= (-1)^{n+1} (EI \lambda_n^3) \delta_{A(n)}, \text{ および} \\ R_{B(n)} &= (-1)^n (EI \lambda_n^2) \theta_{A(n)} \end{aligned} \quad \dots (78)$$

のように表わすことができる。

また、振動のモード曲線  $\varphi(x)$  をまとめると、(75)

式と (76) 式より

$$\varphi_n(x) = \frac{\delta_A(n)}{2} \left\{ \cosh \lambda_n x + \cos \lambda_n x - \sqrt{\frac{\cosh \lambda_n l + (-1)^n}{\cosh \lambda_n l + (-1)^{n+1}}} (\sinh \lambda_n x + \sin \lambda_n x) \right\} \quad \dots\dots (79)$$

が得られ、(75) 式および (76) 式からは

$$\varphi_n(x) = \frac{\delta_A(n)}{2} \left\{ \cosh \lambda_n x + \cos \lambda_n x - \sqrt{\frac{1 + (-1)^{n+1} \cos \lambda_n l}{1 + (-1)^n \cos \lambda_n l}} (\sinh \lambda_n x + \sin \lambda_n x) \right\} \quad \dots\dots (80)$$

が求まる。ただし、 $n=1, 2, 3, \dots\dots$  とする。

このようにして、片持ばりにおいては、振動のモード曲線が (79) 式と (80) 式の両式で表わされるが、ここで (74) 式の  $\theta_A/(\lambda\delta_A)$  の値として、(43) 式の右辺を使用すると

$$\varphi(x) = \frac{\delta_A}{2} \left\{ \cosh \lambda x + \cos \lambda x - \left( \frac{\cosh \lambda l + \cos \lambda l}{\sinh \lambda l + \sin \lambda l} \right) (\sinh \lambda x + \sin \lambda x) \right\} \quad \dots\dots (81)$$

が得られる。ただし、本式は振動次数  $n$  が奇数次、偶数次を問わず、すべての  $n$  に対して成立するので、ここでは  $\lambda_n$  を  $\lambda$  と簡略化してある。また (74) 式で  $\theta_A/(\lambda\delta_A)$  のところに、(43) 式の右辺を使用すると

$$\varphi(x) = \frac{\delta_A}{2} \left\{ \cosh \lambda x + \cos \lambda x - \left( \frac{\sinh \lambda l - \sin \lambda l}{\cosh \lambda l + \cos \lambda l} \right) (\sinh \lambda x + \sin \lambda x) \right\} \quad \dots\dots (82)$$

となり、さらにまた、(74) 式で  $\theta_A/(\lambda\delta_A)$  のところへ (44) 式の関係を使用すれば

$$\varphi(x) = \frac{\delta_A}{2} \left\{ \cosh \lambda x + \cos \lambda x - \sqrt{\frac{\sinh \lambda l - \sin \lambda l}{\sinh \lambda l + \sin \lambda l}} (\sinh \lambda x + \sin \lambda x) \right\} \quad \dots\dots (83)$$

を得る。(81) 式、(82) 式および (83) 式は、すべての振動次数に対して適用できるが、これらのうち (81) 式と (82) 式は従来からも、類似表現式が採用されている<sup>2)</sup>。しかし、ここで示した式はそれらがいずれも自由端のたわみ  $\delta_A$  で表現されており、この点が従来とは幾分違った表現法であると考え、このように、振動のたわみ形を、自由端のたわみ  $\delta_A$  で表現してお

けば、固有振動数と  $\delta_A$  を測定して、振動中のたわみを検定するときに便利である。

なおこの場合、 $\varphi(x)$  の中の  $\delta_A$  は、(74) 式を

$$\varphi(x) = \frac{\theta_A}{2\lambda} \left\{ \sinh \lambda x + \sin \lambda x + \frac{\lambda\delta_A}{\theta_A} (\cosh \lambda x + \cos \lambda x) \right\} \quad \dots\dots (84)$$

と書いてみてもわかるように、これまでの  $\theta_A/(\lambda\delta_A)$  の逆数値を採用すれば、 $\varphi(x)$  はいずれも  $\theta_A$  で置き換えて表現できることもちろんである。

#### 4.6 片持ばりの振動数算定

最後に、(77) 式を使用して振動数を求めた場合について、具体的に実行した計算例を述べておく。この片持ばりにおいては、従来 (36) 式の振動数方程式が使用されてきた<sup>2)</sup>。しかし、ここでは (77) 式を使用した場合について、その振動数を求めてみたい。そのためには次のようにすればよい。

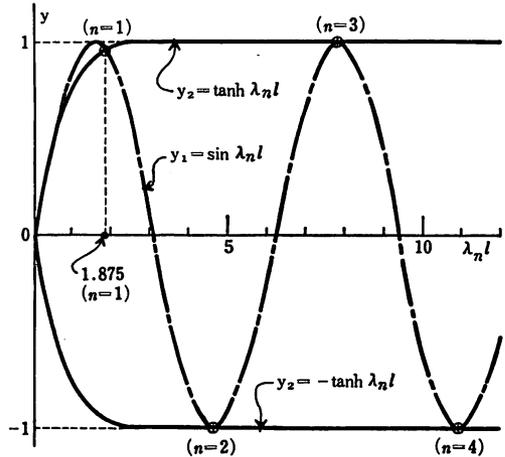


図 2

すなわち、(36) 式は (77) 式で置き換えることができた。そこで (77) 式のうち、 $\sin \lambda_n l = (-1)^{n+1} \tanh \lambda_n l$  の関係を使用して、振動固有数  $\lambda_n l$  を求めてみる。いま  $\lambda_n l$  を横軸に取り、 $y_1 = \sin \lambda_n l$  と  $y_2 = \pm \tanh \lambda_n l$  とを縦軸に取って示すと図 2 のようになる。図には  $y_1$  を一点鎖線で、 $y_2$  を実線で示してあるが、 $n=1$  の基本振動数は  $y_1$  と  $y_2$  の最初の交点を求めると直ちに得られる。次に  $n \geq 2$  の高次振動数に対しては、次のような近似計算が可能となる。つまり  $\lambda_n l$  の値が増大してゆき、 $\lambda_n l \geq 2 \sim 3$  となれば、 $y_2 = \pm \tanh \lambda_n l$  の値は  $\pm 1$  に漸近する。この事実は振動次数  $n$  が  $n \geq 2$

の値になれば、振動数方程式を近似的に  $\sin \lambda_n l \doteq \pm 1$ , すなわち

$$\cos \lambda_n l \doteq 0 \quad \dots\dots (85)$$

で表わしてもよいことを意味している。

同じことは (36) 式の振動数方程式  $\cos \lambda_n l = -1 / \cosh \lambda_n l$  についてもいえるわけであり、 $\lambda_n l \geq 2$  に対しては  $\cosh \lambda_n l$  が非常に大きくなるため、(36) 式は  $\cos \lambda_n l \doteq 0$  で近似してもよい。したがって、この片持ばりに対する振動固有数  $\lambda_n l$  の値は、(85) 式より

$$\lambda_n l \doteq \frac{2n-1}{2}\pi, \quad (n=2, 3, 4, \dots\dots) \quad \dots\dots (86)$$

で表わされることになる。

ところでこの場合、 $y_2 = \tanh \lambda_n l$ , もしくは  $y_2 = -\tanh \lambda_n l$  の曲線と  $y_1 = \sin \lambda_n l$  の曲線との交点は、(86) 式の近似値の両側にごく接近して、2個存在するわけである。しかしながら (38) 式によれば、 $-1 < \cos \lambda_n l < 0$  の条件があるので、この関係を満足する交点は1個に限定され、振動固有数  $\lambda_n l$  の値は確定する。この確定された  $\lambda_n l$  の値を、ここでは (86) 式で近似したという結果になる。

このように (77) 式を使用した場合には、 $-1 < \cos \lambda_n l < 0$  の条件を考慮する必要のあることが、(36) 式の  $\cos \lambda_n l \cdot \cosh \lambda_n l = -1$  を振動数方程式に採用した場合に比べて、不便な点であるように思われる。しかし、(86) 式の近似値を使用すれば、実質的には  $-1 < \cos \lambda_n l < 0$  の条件が不必要となり、この結果 (86) 式の値を使用する限り、(77) 式の振動数方程式を採用しても、実用性はそなわれないものと考えられる。

よってこの片持ばりについては、(86) 式の  $\lambda_n l$  に対する近似値を使用すれば、2次以上の振動数に対する固有円振動数  $\omega_n$  は、(4) 式から

$$\omega_n = \lambda_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho l}} \doteq \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho l}} \quad (n=2, 3, 4, \dots\dots) \quad \dots\dots (87)$$

のように簡単な式で与えられる。なお、(77) 式の第2式を振動数方程式として採用する場合には、両辺の逆数を取って、図式計算を実施すればよい。

次に、(86) 式の値を (80) 式に代入すれば、 $\cos \lambda_n l \doteq 0$  となるため、モード曲線  $\varphi(x)$  は近似的に

$$\varphi_n(x) \doteq \frac{\delta_{A(n)}}{2} \{ \cosh \lambda_n x + \cos \lambda_n x - (\sinh \lambda_n x + \sin \lambda_n x) \}, \quad (n=2, 3, 4, \dots\dots) \quad \dots\dots (88)$$

のように表現できる。

## 5. 結 論

本報告書では、長さ  $l$ , 曲げ剛性  $EI$ , 単位長さあたり  $\rho l$  の質量をもつ、一様な両端支持ばりと片持ばりが自由横振動をするとき、その振動数方程式の在来形が、(1) 式および (2) 式を使用すれば、一般的に求められることを述べた。そしてまた、これらの在来形の振動数方程式の表現法を変更して、別な形の表現式に変形した場合、振動モードと端末条件との対応関係が、より明確にできることを述べた。

なお、本報告書では (1) 式と (2) 式を利用すれば、振動のたわみ形を表わすモード曲線  $\varphi(x)$  の表示としては、多様な表現法の存在することを述べている。

いま、はりの左端をA点とし、右端をB点として、左端Aを座標原点に取り、 $x$  軸をはりの軸線方向に取る。このとき、A点のたわみと傾斜角の最大振幅を  $\delta_A$  と  $\theta_A$  で表わし、またそのときの支持モーメントと支持反力の最大振幅を、 $M_A$  と  $R_A$  で表わすとき、両端支持ばりと片持ばりの振動数方程式と、各振動数に対応するたわみ形  $\varphi(x)$  は次のようになる。ただし、 $n = 1, 2, 3, \dots\dots$  は振動モードを決定する振動次数とし、また  $\lambda_n = \sqrt{\rho l \omega_n^2 / (EI)}$  とする。ここで  $\omega_n$  は  $n$  次の固有円振動数である。

(1) 両端支持ばりの場合、振動数方程式は  $\sin \lambda_n l = 0$  の在来形の代りに

$$\cos \lambda_n l = (-1)^n$$

の形で表わされる。また、各振動次数  $n$  に対応する端末条件としては

$$R_{A(n)} = (-1)^{n+1} R_{B(n)}, \quad \text{および}$$

$$\theta_{A(n)} = (-1)^n \theta_{B(n)}$$

の関係が成立する。ただし、 $R_{A(n)}$ ,  $\theta_{A(n)}$  などは、これらの端末抗力や端末変位の最大振幅が、振動次数  $n$  に対応する値を示す。

(2) 両端支持ばりに対する振動モード曲線  $\varphi(x)$  は

$$\varphi(x) = \frac{\theta_{A(n)}}{\lambda_n} \sin \lambda_n x = \frac{l \theta_{A(n)}}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{l} x$$

で表わされる。ただし、 $\theta_{A(n)}$  は  $n$  次の振動に対する端末点Aの傾斜角振幅の最大値とする。また、 $\varphi(x)$  は

$$\varphi(x) = \frac{l R_{A(n)}}{n\pi (EI \lambda_n^2)} \sin \frac{n\pi}{l} x$$

のように支点反力  $R_{A(n)}$  で表現することもできる。

(3) 片持ばりの場合、振動数方程式は  $\cos \lambda l \cdot$

$\cosh \lambda l = -1$  の在来形の代わりに

$$\sin \lambda_n l = (-1)^{n+1} \tanh \lambda_n l, \text{ もしくは}$$

$$\tan \lambda_n l = (-1)^n \sinh \lambda_n l$$

の形で表わされる。また、各振動次数  $n$  に対応する端末条件としては

$$M_{B(n)} = (-1)^{n+1} (EI \lambda_n^2) \delta_{A(n)}, \text{ および}$$

$$R_{B(n)} = (-1)^n (EI \lambda_n^2) \theta_{A(n)}$$

の関係が満足されていなければならない。ただし、 $M_{B(n)}$ 、 $\delta_{A(n)}$  などは、振動次数  $n$  に対応する端末抗力と端末変位の最大振幅を示す。

(4) A端自由、B端固着の片持ばりに対する振動モード曲線  $\varphi(x)$  は

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \frac{\delta_{A(n)}}{2} \{ \cosh \lambda_n x + \cos \lambda_n x \\ & + \frac{\theta_{A(n)}}{\lambda_n \delta_{A(n)}} (\sinh \lambda_n x + \sin \lambda_n x) \} \end{aligned}$$

で表わされるが、ここで  $\theta_{A(n)} / (\lambda_n \delta_{A(n)})$  の値は

$$-\frac{\theta_{A(n)}}{\lambda_n \delta_{A(n)}} = \sqrt{\frac{\sinh \lambda_n l - \sin \lambda_n l}{\sinh \lambda_n l + \sin \lambda_n l}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\cosh \lambda_n l + \cos \lambda_n l}{\sinh \lambda_n l + \sin \lambda_n l} = \frac{\sinh \lambda_n l - \sin \lambda_n l}{\cosh \lambda_n l + \cos \lambda_n l} \\ &= \sqrt{\frac{1 + (-1)^{n+1} \cos \lambda_n l}{1 + (-1)^n \cos \lambda_n l}} = \sqrt{\frac{\cosh \lambda_n l + (-1)^n}{\cosh \lambda_n l + (-1)^{n+1}}} \end{aligned}$$

のように、多様な表現が可能である。また、 $\theta_{A(n)} / (\lambda_n \delta_{A(n)})$  の逆数値を使用すれば、振動モード曲線  $\varphi(x)$  は

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \frac{\theta_{A(n)}}{2 \lambda_n} \{ \sinh \lambda_n x + \sin \lambda_n x \\ & + \frac{\lambda_n \delta_{A(n)}}{\theta_{A(n)}} (\cosh \lambda_n x + \cos \lambda_n x) \} \end{aligned}$$

のように、自由端のたわみ角  $\theta_{A(n)}$  で表わすこともできる。

#### 参考文献

- 1) 富 武満：一様ばりの横振動時における端末条件（第1報、端末条件について）、鹿児島大学工学部研究報告、第20号(昭53.9)、1-9.
- 2) 谷口 修：振動工学（標準機械工学講座5）、(昭41)、123、コロナ社。

