

## 木材のせん断に関する弾塑性論および破壊力学的研究

(第一報) 振り試験によるせん断応力とひずみ (直交異方弾塑性解析)

大 草 克 己

### Studies on the Shearing of Wood

— Especially on the Elastic-Plastic Theory and Fracture Mechanics —

(I) Evaluating the Relationship between Stress and Strain in the Shearing of Wood from the Torsion Test of Prismatical Bar Considered as Elastic-Plastic Material with Orthotropy

Katsumi OKUSA

### 目 次

はしがき	3 木材の振り試験とせん断特性
1 直交異方弾塑性棒の振りに関する理論	3.1 試片断面の形状寸法
1.1 弾性問題の解	3.2 材料特性値 $\alpha, n, k, q$ と $M \sim \theta$ 曲線
1.2 塑性の応力-ひずみ関係式	3.3 振り試験の方法と結果の解析
1.3 振り問題に対する有限要素法	4 考 察
1.4 ひずみ硬化曲線	要 約
2 有限要素法による弾塑性振り解析のプログラム	参考文献
2.1 プログラムとその解説	付 録
2.2 計算手順	(1) プログラム・ソースリスト
2.3 等方体丸棒の振り (プログラムのチェック)	(2) 付 図

### はしがき

静的試験による破壊までの応力-ひずみ線図は、その構造材料に関するもっとも基本的な情報であるが、木材のせん断についてはこれを定める方法が確立されていない。

一般金属材料ではもっぱら振り試験によってそのせん断性能が定められ、純粹せん断の応力場は、適当な長さの一樣断面棒を振ることによって比較的容易に出現せしめ得るから、木材の強度試験にも振り試験をとり入れることを検討すべきである。ただし木材は著しい力学的異方性を示すから、試験の方法および結果の解析について、等方材料とは異なる取扱いが必要である。

この報告は、木材を均質な直交異方弾塑性体としたときの解析方法およびその結果を示すものであり、概要の一部は文献 1) に発表した。

### 1 直交異方弾塑性棒の振りに関する理論

#### 1.1 弾性問題の解

一樣断面、直線棒の軸を  $z$ 、これに直交して  $x, y$  軸を定め、直交異方体の力学対称軸を座標軸と一致させる。この棒の両端に  $z$  軸まわりの振りモーメント  $M$  を作用させるとき、任意な断面上の点の  $x, y, z$  方向の変位  $u, v, w$  が、St. Venant の理論に従って

$$u = -\theta zy, \quad v = \theta zx, \quad w = \theta \phi(x, y) \quad (1)$$

で示されるものとする<sup>2)</sup>。この式で  $\theta$  は単位長当りの振り角,  $\phi(x, y)$  は振り変位関数と呼ばれる。

(1) 式に対応するひずみは

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0 \\ \gamma_{yz} = \theta(\partial\phi/\partial y + x), \quad \gamma_{zx} = \theta(\partial\phi/\partial x - y) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

となり, 弾性応力は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \\ \tau_{yz} = G_{yz}\theta(\partial\phi/\partial y + x), \quad \tau_{zx} = G_{zx}\theta(\partial\phi/\partial x - y) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

で与えられる。 $G_{yz}$ ,  $G_{zx}$  は異方性対称軸に関するせん断弾性係数である。したがって振り変位関数  $\phi$  は, つり合条件から, 断面内 ( $R$ ) で

$$G_{zx}\partial^2\phi/\partial x^2 + G_{yz}\partial^2\phi/\partial y^2 = 0 \quad (4)$$

断面周縁 ( $C$ ) で

$$G_{zx}(\partial\phi/\partial x - y)\partial F/\partial x + G_{yz}(\partial\phi/\partial y + x)\partial F/\partial y = 0 \quad (5)$$

を満たさなければならない。たじし

$$F = F(x, y) = 0 \quad (6)$$

は断面周縁曲線を表わす。また振りモーメント  $M$  は

$$M = \iint_R (x\tau_{yz} - y\tau_{zx}) dx dy \quad (7)$$

で定まる。

いま次のような置き換えを行うと

$$\left. \begin{aligned} x = x_1/\sqrt{G_{yz}}, \quad y = y_1/\sqrt{G_{zx}} \\ \phi(x, y) = \phi_1(x_1, y_1)/\sqrt{G_{yz}G_{zx}} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \partial\phi/\partial x &= \frac{1}{\sqrt{G_{zx}}}\partial\phi_1/\partial x_1, \quad \partial\phi/\partial y = \frac{1}{\sqrt{G_{yz}}}\partial\phi_1/\partial y_1 \\ \partial^2\phi/\partial x^2 &= \sqrt{G_{yz}/G_{zx}} \cdot \partial^2\phi_1/\partial x_1^2, \quad \partial^2\phi/\partial y^2 = \sqrt{G_{zx}/G_{yz}} \cdot \partial^2\phi_1/\partial y_1^2 \end{aligned}$$

であるから, (4) 式および (5) 式はそれぞれ

$$\partial^2\phi_1/\partial x_1^2 + \partial^2\phi_1/\partial y_1^2 = 0 \quad (9)$$

$$(\partial\phi_1/\partial x_1 - y_1)\partial F_1/\partial x_1 + (\partial\phi_1/\partial y_1 + x_1)\partial F_1/\partial y_1 = 0 \quad (10)$$

となって等方体の問題に変換される。ただし  $F_1$  は

$$F_1 \equiv F_1(x_1, y_1) = F(x_1/\sqrt{G_{yz}}, y_1/\sqrt{G_{zx}})$$

として定義される。すなわち, 断面が (6) 式で与えられる直交異方体の棒には,  $F_1 = 0$  の断面を有する等方体棒が対応するから,  $F_1$  断面等方体棒の振り関数  $\phi_1$  から, (8) 式によって異方体の振り関数  $\phi$  は直ちに求まる。

たとえば, 半径  $r$  の円断面  $F = x^2 + y^2 - r^2 = 0$  には,  $F_1 = x_1^2/G_{yz} + y_1^2/G_{zx} - r^2 = 0$  の円断面が対応する。長, 短半径が  $a_1, b_1$  である等方体円棒の振り関数は<sup>3)</sup>

$$\phi_1(x_1, y_1) = (b_1^2 - a_1^2)/(b_1^2 + a_1^2) \cdot x_1 y_1$$

であるから, (8) 式より

$$\phi(x, y) = (G_{zx} - G_{yz})/(G_{zx} + G_{yz}) \cdot xy$$

となり, (3), (7) 式より次の周知の式を得る<sup>4)</sup>

$$1/G' \equiv 1/2 \cdot (1/G_{zx} + 1/G_{yz}) = \pi r^4 / 2 \cdot \theta / M \quad (11)$$

また Fig. 1 のように断面が  $2a \times 2b$  の長方形

$$F = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2) = 0$$

に対応する  $F_1$  は

$$F_1 = (x_1^2/G_{yz} - a^2)(y_1^2/G_{zx} - b^2) = 0$$

すなわち,  $x_1y_1$  平面での  $2a_1 \times 2b_1 = 2a\sqrt{G_{yz}} \times 2b\sqrt{G_{zx}}$  の長方形となる。等方体長方形断面に対する振り関数は既知<sup>5)</sup>であるから, それを (8) 式で異方体の  $\phi$  に変換し, さらに (3), (7) 式を用いて次の諸式を得る。

$$\tau_{yz} = G_{yz} \theta a \left[ 2X - \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sin n\pi X/2 \cdot \cosh n\pi Y/2}{n^2 \cosh n\pi \lambda/2} \right] \quad (12)$$

$$\tau_{zx} = -G_{zx} \theta a \frac{16}{\pi^2 \sqrt{k}} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\cos n\pi X/2 \cdot \sinh n\pi Y/2}{n^2 \cosh n\pi \lambda/2} \quad (13)$$

$$M = G_{yz} \theta a^3 b \Phi(\lambda) = G_{zx} \theta ab^3 \Phi(1/\lambda)$$

$$\Phi(\lambda) = \frac{16}{3} \left[ 1 - \frac{192}{\pi^2 \lambda} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh n\pi \lambda/2 \right] \quad (14)$$

ここで  $X = x/a$ ,  $Y = y/b$ ,  $\lambda = p\sqrt{k}$ ,  $k = G_{zx}/G_{yz}$ ,  $p = b/a$

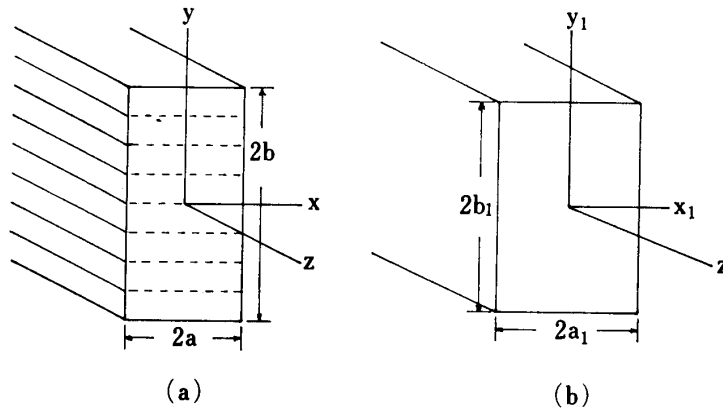


Fig. 1. Orthotropic bar with the rectangular cross section ( $2a \times 2b$ ), and isotropic bar with the rectangular cross section ( $2a_1 \times 2b_1$ ) corresponding to the orthotropic bar.

## 1.2 塑性の応力-ひずみ関係式

異方性材料の降伏に関する Hill の条件<sup>6)</sup>に準じ, (3) 式の振り応力場に対して

$$f^2 = A\tau_{yz}^2 + B\tau_{zx}^2 \equiv \bar{\sigma}^2 \quad (15)$$

を定義する。 $A, B$  は材料定数 (異方性パラメータ) であり, (15) 式で計算される相当応力  $\bar{\sigma}$  が, その材料の特性値  $f_0$  を超えるとき, その部分は降伏して弾性から塑性へ移行する。

塑性状態においては, 全ひずみ  $\{r\}$  が弾性ひずみ  $\{r^e\}$  と塑性ひずみ  $\{r^p\}$  とからなり, 増分形で次のように表わされる。

$$\{dr\} = \begin{Bmatrix} dr_{yz} \\ dr_{zx} \end{Bmatrix} = \{dr^e\} + \{dr^p\} = \begin{Bmatrix} dr_{yz}^e \\ dr_{zx}^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} dr_{yz}^p \\ dr_{zx}^p \end{Bmatrix} \quad (16)$$

降伏後さらに変形が進むとき, 完全塑性体でない材料では, ひずみ硬化, すなわち相当応力の増大がみられる。この硬化関数  $H$  を相当塑性ひずみ  $\bar{\epsilon}^p$  の関数と考える。すなわち

$$f = \bar{\sigma} = H(\bar{\epsilon}^p); \quad \bar{\epsilon}^p = \int d\bar{\epsilon}^p \quad (17)$$

$d\bar{\epsilon}^p$  は相当塑性ひずみ増分で, 相当応力  $\bar{\sigma}$  と関連して, 塑性仕事増分  $dW^p$  から次のように定義される。

$$dW^p = [\tau_{yz} \ \tau_{zx}] \begin{Bmatrix} d\gamma^p_{yz} \\ d\gamma^p_{zx} \end{Bmatrix} = \{\tau\}^T \{d\gamma^p\} \equiv \bar{\sigma} d\bar{\epsilon}^p \quad (18)$$

(右肩の  $T$  は転置を表わす。)

弾性状態での応力-ひずみ関係を増分形で次のようにかく。

$$\{d\tau\} = \begin{Bmatrix} d\tau_{yz} \\ d\tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{yz} & 0 \\ 0 & G_{zx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\gamma^e_{yz} \\ d\gamma^e_{zx} \end{Bmatrix} \equiv [D^e] \{d\gamma^e\} \quad (19)$$

塑性状態では Reuss の式<sup>7)</sup>に従って、塑性ずみ増分  $\{d\gamma^p\}$  が降伏条件式  $f$  の勾配に比例するものとする。

$$\{d\gamma^p\} = \begin{Bmatrix} d\gamma^p_{yz} \\ d\gamma^p_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{g} \begin{Bmatrix} \partial f / \partial \tau_{yz} \\ \partial f / \partial \tau_{zx} \end{Bmatrix} df = \frac{1}{g} \{\partial f / \partial \tau\} df \quad (20)$$

上式の  $g$  は比例定数である。(19), (16) および (20) 式より

$$\{d\tau\} = [D^e] \{d\gamma^e\} = [D^e] \{d\gamma - d\gamma^p\} = [D^e] \{d\gamma\} - \frac{1}{g} [D^e] \{\partial f / \partial \tau\} df \quad (21)$$

(15) 式より

$$\{\partial f / \partial \tau\} = \begin{Bmatrix} \partial f / \partial \tau_{yz} \\ \partial f / \partial \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A\tau_{yz}/f \\ B\tau_{zx}/f \end{Bmatrix}$$

であるから (18) と (20) から

$$dW^p = \bar{\sigma} d\bar{\epsilon}^p = \{\tau\}^T \{d\gamma^p\} = \frac{1}{g} \{\tau\}^T \{\partial f / \partial \tau\} df = \frac{1}{g} [\tau_{yz} \ \tau_{zx}] \begin{Bmatrix} A\tau_{yz} \\ B\tau_{zx} \end{Bmatrix} \frac{df}{f} = \frac{1}{g} f df \quad (22)$$

(17) 式から

$$df = d\bar{\sigma} = H' d\bar{\epsilon}^p; \quad H' = dH/d\bar{\epsilon}^p \quad (23)$$

として硬化率  $H'$  を定義すると (22) 式は

$$dW^p = \frac{1}{g} f df = \frac{1}{g} f H' d\bar{\epsilon}^p$$

となり、これと (18) 式とから

$$g = H' \quad (24)$$

となる。ところで  $f$  の増分  $df$  は  $df = \{\partial f / \partial \tau\}^T \{d\tau\}$  とかけるから、(21) 式を用いると

$$df = \{\partial f / \partial \tau\}^T [D^e] \{d\gamma\} - \frac{1}{g} \{\partial f / \partial \tau\}^T [D^e] \{\partial f / \partial \tau\} df$$

となり、(21) 式の  $df/g$  は

$$df/g = \{\partial f / \partial \tau\}^T [D^e] \{d\gamma\} / (g + \{\partial f / \partial \tau\}^T [D^e] \{\partial f / \partial \tau\})$$

となるから

$$\{d\tau\} = ([D^e] - \frac{[D^e] \{\partial f / \partial \tau\} \{\partial f / \partial \tau\}^T [D^e]}{g + \{\partial f / \partial \tau\}^T [D^e] \{\partial f / \partial \tau\}}) \{d\gamma\} \equiv [D^p] \{d\gamma\} \quad (25)$$

を得る。この (25) 式が塑性状態での応力-ひずみ関係式であり、振り問題に対する応力マトリクス  $[D^p]$  を具体的に示すと次のようになる。

$$[D^p] \equiv \begin{Bmatrix} d_{44} & d_{45} \\ d_{45} & d_{55} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{yz} & 0 \\ 0 & G_{zx} \end{bmatrix} - \frac{1}{S} \begin{bmatrix} S_4 S_4 & S_4 S_5 \\ S_4 S_5 & S_5 S_5 \end{bmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} S_4 = AG_{yz}\tau_{yz}/\bar{\sigma}, \quad S_5 = BG_{zx}\tau_{zx}/\bar{\sigma} \\ S = H' + (AS_4\tau_{yz} + BS_5\tau_{zx})/\bar{\sigma} \end{array} \right\} \quad (26)$$

### 1.3 振り問題に対する有限要素法

(19), (25) および (2) 式から弾性、塑性を通じ応力-ひずみ関係式は次のようにかける。

$$\{d\tau\} = \begin{Bmatrix} d\tau_{yz} \\ d\tau_{zx} \end{Bmatrix} = [D'] \{d\gamma\} = \begin{bmatrix} d_{44}' & d_{45}' \\ d_{45}' & d_{55}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial \phi / \partial y + x \\ \partial \phi / \partial x - y \end{bmatrix} d\theta \quad (27)$$

応力増分についても次のつり合条件

$$\partial(d\tau_{xx})/\partial x + \partial(d\tau_{yz})/\partial y = 0$$

が成立しなければならないから、(27) 式より断面内  $R$  で

$$d_{55}' \partial^2 \phi / \partial x^2 + 2d_{45}' \partial^2 \phi / \partial x \partial y + d_{44}' \partial^2 \phi / \partial y^2 = 0 \quad (28)$$

断面周縁  $C$  での条件

$$l_x d\tau_{xx} + l_y d\tau_{yz} = 0; \quad l_x = \cos(n, x), \quad l_y = \cos(n, y) \quad (29)$$

は、同じく (27) 式から次のようになる。

$$l_x (d_{55}' \partial \phi / \partial x + d_{45}' \partial \phi / \partial y + d_{45}' x - d_{55}' y) + l_y (d_{45}' \partial \phi / \partial x + d_{44}' \partial \phi / \partial y + d_{44}' x - d_{45}' y) = 0 \quad (30)$$

いま次式で定義される汎関数  $I[\phi]$  を考える。

$$I[\phi] = \iint_R \left( \frac{1}{2} d_{55}' \phi_x^2 + d_{45}' \phi_x \phi_y + \frac{1}{2} d_{44}' \phi_y^2 \right) dx dy + \int_C [l_x (d_{45}' x - d_{55}' y) + l_y (d_{44}' x - d_{45}' y)] \phi dC \quad (31)$$

$I$  の変分  $\delta I$  は

$$\begin{aligned} \delta I = & \iint_R (d_{55}' \phi_x \delta \phi_x + d_{45}' \phi_y \delta \phi_x + d_{45}' \phi_x \delta \phi_y + d_{44}' \phi_y \delta \phi_y) dx dy \\ & + \int_C [l_x (d_{45}' x - d_{55}' y) + l_y (d_{44}' x - d_{45}' y)] \delta \phi dC \end{aligned}$$

となり、部分積分によって

$$\begin{aligned} \delta I = & - \iint_R \delta \phi (d_{55}' \phi_{xx} + 2d_{45}' \phi_{xy} + d_{44}' \phi_{yy}) dx dy + \int_C \delta \phi [l_x (d_{55}' \phi_x + d_{45}' \phi_y + d_{45}' x - d_{55}' y) \\ & + l_y (d_{45}' \phi_x + d_{55}' \phi_y + d_{44}' x - d_{45}' y)] dC \end{aligned}$$

となるから、 $\phi$  が (28) の解でしかも (30) の境界条件を満足するなら、恒等的に  $\delta I = 0$  となることが判る。すなわち (28), (30) 式で与えられる微分方程式の境界値問題は、同じ境界条件の下で (31) の  $I[\phi]$  を極値にする変分問題と数学的に等価であることが知れる。

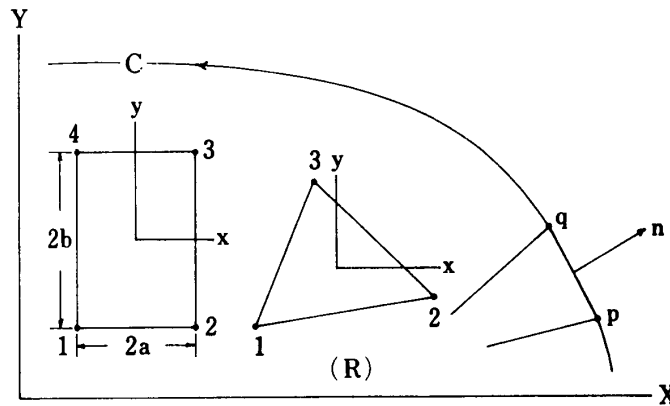


Fig. 2. Triangular, rectangular elements inside the boundary and element with nodal points along on the boundary.

断面  $R$  を有限個の要素（ここでは Fig. 2 のように、三角形要素および座標軸に平行な辺を有する長方形要素を用いる）に分割し、各要素内で  $\phi$  は、長方形の場合 (32) 式、三角形の場合 (33) 式で近似出来るものとする。

$$\phi = 1/4ab[(a-x)(b-y)(a+x)(b-y)(a+x)(b+y)(a-x)(b+y)]\{\phi\}_e \quad (32)$$

$$\phi = [1 \ x \ y][Q]^{-1}\{\phi\}_e; \quad [Q] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \quad (33)$$

(32), (33) 式の  $x, y$  は平行移動によってそれぞれの図心に原点をもつ局所座標であり,  $\{\phi\}_e$  はその要素の各節点での  $\phi$ , すなわち  $\phi_i$ ;  $i=1, 2, 3$  (or 4) の列ベクトルを表わす。

境界  $C$  の上にその辺をもたない内部の要素については, (31) 式より

$$I = \iint_e \left( \frac{1}{2} d_{55}' \phi_x^2 + d_{45}' \phi_x \phi_y + \frac{1}{2} d_{44}' \phi_y^2 \right) dx dy \equiv I_R \quad (34)$$

この式での  $\phi$  に (32) または (33) 式を用い, 極値条件  $\{\partial I / \partial \phi_i\}_e = 0$ ;  $i=1, 2, 3$  (or 4) を適用すると次式を得る。

$$[CK]_e \{\phi\}_e = 0 \quad (35)$$

$[CK]_e$  は, 長方形要素では (36) 式, 三角形要素では (37) 式のようにになる。何れも対称マトリクスであるから, 右上半分だけを示す。

$$[CK]_e = \begin{bmatrix} [2 & 2 & 2] & [-2 & 0 & 1] & [-1 & -2 & -1] & [1 & 0 & -2] \\ & [2 & -2 & 2] & [1 & 0 & -2] & [-1 & 2 & -1] \\ & & [2 & 2 & 2] & [-2 & 0 & 1] \\ & & & [2 & -2 & 2] \end{bmatrix} \{M\} \quad (36)$$

$$\{M\} = [\alpha' \quad \beta' \quad \gamma']^T$$

$$\alpha' = d_{55}' p / 6, \quad \beta' = d_{45}' / 4, \quad \gamma' = d_{44}' / 6p, \quad p = b/a$$

$$[CK]_e = \frac{1}{4\Delta} \begin{bmatrix} [b_i^2 & 2b_i c_i & c_i^2] & [b_i b_j & b_i c_j + b_j c_i & c_i c_j] & [b_i b_k & b_i c_k + b_k c_i & c_i c_k] \\ & [b_j^2 & 2b_j c_j & c_j^2] & [b_j b_k & b_j c_k + b_k c_j & c_j c_k] \\ & & [b_k^2 & 2b_k c_k & c_k^2] \end{bmatrix} \{N\} \quad (37)$$

$$\{N\} = [d_{55}' \quad d_{45}' \quad d_{44}']^T$$

$$b_i = (y_2 - y_3), \quad b_j = (y_3 - y_1), \quad b_k = (y_1 - y_2)$$

$$c_i = (x_3 - x_2), \quad c_j = (x_1 - x_3), \quad c_k = (x_2 - x_1)$$

$$\Delta = 3(x_2 y_3 - x_3 y_2) / 2$$

境界上に辺を有し, その両端の点が, Fig. 2 のように  $p, q$  である要素については

$$I = I_R + I_C$$

$$I_C = \int_p^q [l_x (d_{45}' x - d_{55}' y) + l_y (d_{44}' x - d_{45}' y)] \phi dC \quad (38)$$

ここで  $I_R$  は (34) 式。前述と同様に極値条件

$$\{\partial I / \partial \phi_i\}_e = \{\partial I_R / \partial \phi_i\}_e + \{\partial I_C / \partial \phi_i\}_e = 0$$

を適用すると

$$[CK]_e \{\phi\}_e = \{F\}_e \quad (39)$$

を得る。この式の  $[CK]_e$  は (36) または (37) で与えられ,  $\{F\}_e$  は  $-\{\partial I_C / \partial \phi_i\}_e$  であって,  $i \neq p$  or  $q$  では 0,  $i = p, q$  では次のようになる。

$$F_p = -\partial I_C / \partial \phi_p = d_{44}' (x_p \Delta x / 2 + \Delta x^2 / 6) - d_{45}' (x_p \Delta y / 2 + \Delta x \Delta y / 3 + y_p \Delta x / 2) + d_{55}' (y_p \Delta y / 2 + \Delta y^2 / 6) \quad (40.1)$$

$$F_q = -\partial I_C / \partial \phi_q = d_{44}' (x_q \Delta x / 2 - \Delta x^2 / 6) - d_{45}' (x_q \Delta y / 2 - \Delta x \Delta y / 3 + y_q \Delta x / 2) + d_{55}' (y_q \Delta y / 2 - \Delta y^2 / 6) \quad (40.2)$$

$$\Delta x = x_q - x_p, \quad \Delta y = y_q - y_p$$

節点  $i$  が関与するすべての要素について (35) および (39) 式を計算し,  $\phi_i$  に関する成分を重ね合わせ, これを全節点について行なうと, 節点総数に等しい元数の連立一次代数方程式

$$[CK] \{\phi\} = \{F\} \quad (41)$$

を得る。これを  $\{\phi\}$  について解き, 長方形要素では (42.1) 式, 三角形要素では (42.2) 式から, 要

素図心  $(x_0, y_0)$  におけるひずみ増分 (振り角の増分  $d\theta$  に対応する) を

$$\left. \begin{aligned} d\gamma_{yz} &= d\theta/4b \cdot [-1 \ -1 \ 1 \ 1] \{\phi\}_e + x_0 d\theta \\ d\gamma_{zx} &= d\theta/4a \cdot [-1 \ 1 \ 1 \ -1] \{\phi\}_e - y_0 d\theta \end{aligned} \right\} \quad (42.1)$$

$$\left. \begin{aligned} d\gamma_{yz} &= d\theta/2\Delta \cdot [c_i \ c_j \ c_k] \{\phi\}_e + x_0 d\theta \\ d\gamma_{zx} &= d\theta/2\Delta \cdot [b_i \ b_j \ b_k] \{\phi\}_e - y_0 d\theta \end{aligned} \right\} \quad (42.2)$$

ついで (27) 式より応力増分を求め、

$$dM = \iint_R (x d\tau_{yz} - y d\tau_{zx}) dx dy$$

によって、トルク増分  $dM$  を計算する。

ここで述べた方法は、(36) または (37) 式で  $[CK]_e$ 、(40) 式で  $\{F\}_e$  の成分を計算するとき、その要素が弾性なら  $d_{44}' = G_{yz}$ 、 $d_{45}' = 0$ 、 $d_{55}' = G_{zx}$  とし、降伏して塑性状態にあれば、これらに前節の  $[D^p]$  の成分を用いることにより弾性、塑性を通じて適用し得る。

#### 1.4 ひずみ硬化曲線

$\tau_{yz}$  のみが単独に作用しかつ単調に増大する場合の降伏応力を  $\tau_{yzY}$ 、降伏ひずみを  $\gamma_{yzY}$  で表わし

$$\eta = \tau_{yz} / \tau_{yzY}, \quad \xi = \gamma_{yz} / \gamma_{yzY} \quad (43)$$

とおいたとき、降伏後の応力-ひずみ関係が

$$\xi = \eta + \alpha [\exp(\eta - 1) - \eta]^n; \quad \xi, \eta \geq 1 \quad (44)$$

で表わされるものとする。 $\alpha, n$  は  $\tau_{yz} \geq \tau_{yzY}$  における応力-ひずみ曲線を具体的に定めるパラメータであり、 $\alpha > 0$ 、 $n > 1/2$  であれば、応力はひずみと共に単調に増大し、 $\xi = 1$  で  $\eta = d\eta/d\xi = 1$  となるから降伏点において、応力-ひずみ曲線はその勾配まで連続であることを意味する。

これまで明らかにされている木材の引張および圧縮の応力-ひずみ線図は、軟鋼にみられるような判然とした降伏点を示さず、直線から曲線への移行は漸移的であり、その後最大応力点まで曲線の勾配が徐々に減少している。木材のせん断応力-ひずみ線図も同様な性質をもつという想定の下に (44) の曲線が適合すると仮定した。Fig. 3 に (44) 式の  $\alpha = 0.4$ 、 $n = 0.6$  の場合を例示した。ある  $\eta$  で

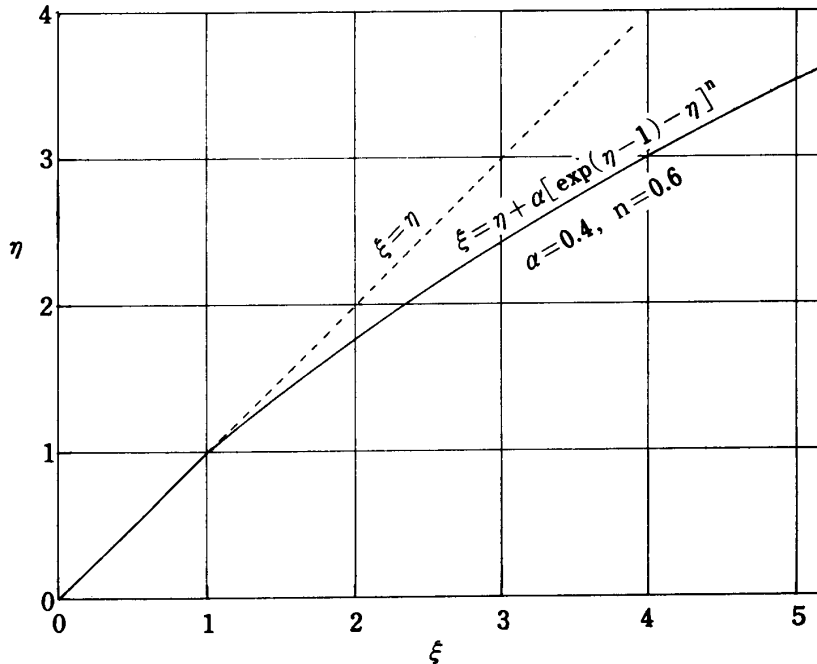


Fig. 3. An example of the assumed strain-hardening-curve.

$\eta = \tau / \tau_Y$ ,  $\xi = \gamma / \gamma_Y$ ;  $\tau_Y, \gamma_Y$ : shearing stress and strain at yielding.

の  $\xi-\eta$  は塑性ひずみ  $\gamma^p$  を降伏ひずみ  $\gamma_Y$  を基準として表わした量を示し、したがって (44) 式は

$$\gamma^p_{yz}/\gamma_{yzY} = \alpha[\exp(\eta-1) - \eta]^n \quad (45)$$

を意味する。(なおこの論文では、応力-ひずみ関係が直線から曲線へ移行する点で、木材は完全弾性から (弾)塑性へ移行するものと考え、比例限=弾性限=降伏点 として取扱う。)

もし  $\tau_{zx}=0$  なら (15) 式より

$$\bar{\sigma} = \sqrt{A} \tau_{yz} \text{ or } \tau_{yz} = \bar{\sigma} / \sqrt{A}$$

であるから定義により

$$f_0 = \sqrt{A} \tau_{yzY} \quad (46)$$

となる。また  $\tau_{yz} > \tau_{yzY}$  では

$$dW^p = \tau_{yz} d\gamma^p_{yz} = \bar{\sigma} d\bar{\epsilon}^p$$

であるから

$$\gamma^p_{yz} = \sqrt{A} \bar{\epsilon}^p$$

であり、(45) 式は

$$\bar{\epsilon}^p = \gamma_{yzY} / \sqrt{A} \cdot \alpha[\exp(\eta-1) - \eta]^n; \quad \eta = \tau_{yz} / \tau_{yzY} = \bar{\sigma} / \sqrt{A} / \tau_{yzY} \quad (47)$$

となって、相当応力  $\bar{\sigma}$  と相当塑性ひずみ  $\bar{\epsilon}^p$  との関係を示すことになる。いま  $\bar{f}_{yz}$  を

$$\bar{f}_{yz} \equiv \bar{\sigma} / \sqrt{A} = (\tau_{yz}^2 + B/A \cdot \tau_{zx}^2)^{1/2} \quad (48)$$

で定義すると、(47) 式より

$$\frac{d\bar{\epsilon}^p}{d\bar{\sigma}} = \frac{\gamma_{yzY}}{A \cdot \tau_{yzY}} \alpha n [\exp(\eta-1) - \eta]^{n-1} [\exp(\eta-1) - 1]; \quad \eta = \bar{f}_{yz} / \tau_{yzY}$$

したがって硬化率  $H'$  は次のようにかける。

$$H' = d\bar{\sigma} / d\bar{\epsilon}^p = A \cdot H^*; \quad H^* \equiv \frac{G_{yz} [\exp(\bar{f}_{yz} / \tau_{yzY} - 1) - \bar{f}_{yz} / \tau_{yzY}]^{1-n}}{\alpha n [\exp(\bar{f}_{yz} / \tau_{yzY} - 1) - 1]} \quad (49)$$

また  $\tau_{zx}$  のみが単独に作用するときの降伏応力を  $\tau_{zxY}$  で表わすと、(15) 式より  $\bar{\sigma} = \sqrt{B} \tau_{zx}$ 、定義により  $f_0 = \sqrt{B} \tau_{zxY}$  であるから、これと (46) 式から次の関係を得る。

$$\tau_{zxY} / \tau_{yzY} = \sqrt{A/B} \equiv q \quad (50)$$

## 2 有限要素法による弾塑性振り解折のプログラム

### 2.1 プログラムとその解説

FORTRAN プログラムのソースリストを付録に示す。これの作成にあたっては山田<sup>8,9)</sup>の平面問題解析プログラムを参考にした。

#### 2.1.1 記号

##### i) 単純変数

**NPOIN** : 節点総数

**NELM** : 要素総数

**NBLN** : 境界上に 1 辺を有する要素の総数

**NB0N** : 振り変位関数  $\phi$  の値が既知である節点の総数。(上下、左右対称の断面形で、対称軸を座標軸とし、かつそれが直交異方の力学対称軸と一致するときには、四分の一断面について解析すれば十分であり、そのとき座標軸上の点では、 $\phi$  はすべて 0 である。)

**NSTN** : 振り角を  $\Delta\theta$  ずつ増加させるその回数。

**GYZ, GZX** :  $G_{yz}, G_{zx}$



**TYZ, TZX** :  $\tau_{yzY}, \tau_{zxY}$

**Q** : (50) 式の  $q$

**SA, AN** : (44) 式の  $\alpha, n$

**MTLK** : 解析すべき材料の種類数

**COEF** :  $\Delta\theta = C \cdot \theta_Y$  の  $C$  (0.1 or 0.2),  $\theta_Y$  は降伏モーメント

## ii) 配列

**X(n), Y(n)** : 第  $n$  番節点の座標  $x, y$

**NOD(m, j)**,  $j=1\sim 4$  : 第  $m$  番要素の節点番号, ただし三角形要素では **NOD(m, 4)**  $= -m'$  とし,  $m'$  は三角形要素について別につけた一連番号。したがって **NOD(m, 4)**  $> 0$  は長方形要素, **NOD(m, 4)**  $< 0$  は三角形要素であることを示す。 **NOD(m, 5)**  $= l$  とし,  $l$  は境界上にある辺要素につけた一連番号であり,  $l=0$  は内部にある要素を表わす。

**NBL(l, j)**,  $j=1, 2$  : 第  $l$  番辺要素の両端の節点番号 (Fig. 2 の  $p, q$ )

**NB0(n)** : 第  $n$  番節点の  $\phi$  が既知なら 1, 未知なら 0 とする

**D(m, j)**,  $j=1\sim 3$  : 第  $m$  番要素の  $d_{44}', d_{45}', d_{55}'$

**IOSM(n, j)** : 第  $n$  番節点を取りまいている, すなわち第  $n$  番節点と直接連結している他の節点の番号。ただし **IOSM(n, 1)** には第  $n$  節点と連結している節点の数 ( $n$  節点自身を含む) が入り, その数は10を超えないように要素分割を行う。

**IESM(m, i, l)** : **NOD(m, i)**  $= n$  であり, **NOD(m, j)**,  $j \neq i$  が  $n_1, n_2, n_3$  であるとき, **IOSM** の第  $n$  行で, 節点番号  $n_1, n_2, n_3$  がそれぞれ  $k_1, k_2, k_3$  番目に位置しておれば **IESM(m, i, i)**  $= 1$ , **IESM(m, i, l)**,  $l=1, 2, 3$  (or 4),  $i \neq l$  に  $k_1, k_2, k_3$  が入る。要するに (35) 式の  $[CK]_e$  から断面全体に関する (41) 式の  $[CK]$  を合成するときの組み込み先を示す表。

**OSM(n, j)** : (41) 式の  $[CK]$ , ただし非零要素だけを記憶させる。 **IOSM(n, j)**  $= n'$  であるとき, 第  $n$  節点と第  $n'$  節点間の  $[CK]$  の成分  $CK_{nn'}$  は **OSM(n, j)** に入り, **OSM(n, 1)** には常に  $CK_{nn}$  が入る。

**ORX(m), ORY(m)** : 第  $m$  番要素の図心  $x_0, y_0$

**AL(m), BL(m)** : 第  $m$  番要素 (長方形) の辺長の二分の一

**AREA(m)** : 第  $m$  番要素の面積

**BE(m', j)**,  $j=1\sim 6$  : 第  $m'$  番要素 (三角形) について (37) 式の  $b_i, b_j, b_k, c_i, c_j, c_k$

**ECK(i, j)** : 各要素について (36) または (37) 式の  $[CK]_e$  の成分を計算する作業用配列

**CKM(m, k)**,  $k=1\sim 10$  : 第  $m$  番要素の  $[CK]_e$

**FI(n)** : (41) 式の  $\{\phi\}$

**DB(n)** : (41) 式の右辺  $\{F\}$

**EDB(j)** : (40.1), (40.2) の  $F_p, F_q$  を計算する作業用配列

**DBM(l, j)** : 第  $l$  番辺要素の  $F_p, F_q$

**DE(m, j)** : 第  $m$  番要素について (42.1) または (42.2) 式の  $\{d\gamma\}$

**TE(m, j)** : 第  $m$  番要素の  $\{\gamma\}$

**DS(m, j), TS(m, j)** :  $\{d\tau\}, \{\tau\}$ , ただし **DS(m, 3)**  $= \Delta \overline{f_{yz}}$ , **TS(m, 3)**  $= \overline{f_{yz}}$ ,  $\overline{f_{yz}}$  は (48) 式。 **TS(m, 4)** には, 一たん降伏して塑性状態になった要素が, 除荷によって弾性を回復するとき, 弾性回復直前の  $\overline{f_{yz}}$  を入れて再降伏の判定に用いる。

**EDF(m, j)** : (42.1) または (42.2) 式の  $\{\phi\}_e$

**LPSTG(i)** : 1 なら第  $i$  ステージの計算結果を全要素について印刷し, 0 なら

**MEPT**( $m$ )=1 の要素についてのみ印刷する。

**IEP**( $m$ ) : 第  $m$  番要素について、その値が 0 なら弾性、1 なら降伏直後、2 なら塑性状態継続、-1 は除荷による弾性回復を表わす。

### 2.1.2 サブルーチン

#### SUB(1) INPUT

節点に関するデータ **X**, **Y**, **NB0**, 要素に関するデータ **NOD**, 辺要素に関するデータ **NBL**, 印刷に関するデータ **LPSTG**, **MEPT** を読みこんでそのまま印刷する。

#### SUB(2) TABLE

**OSM** と **IESM** の表を作製する。

#### SUB(3) CKMM(M, KN)

第  $m$  番要素 (長方形なら **KN**=4, 三角形要素なら **KN**=3) について  $[CK]_e$  の成分を計算し **CKM** ( $m, j$ ) に入れる。

#### SUB(4) CKSUM(M, SI, KN)

第  $m$  番要素について、**SI**=1 なら、直前の **CKMM** で計算された  $[CK]_e$  (= **ECK**) を全断面に関する  $[CK]$  (= **OSM**) に加える。**SI**=-1 なら、**CKM** に記憶されている前段階の  $[CK]_e$  を **OSM** から引く。

#### SUB(5) DBMM (IP, JP, LN, M)

第  $m$  番要素 (第  $l$  番の境界上辺要素をもち、その辺の両端の節点が  $i, j$ ) について、(40) 式の  $F_p$ ,  $F_q$  を **EDB** で計算して **DBM** に入れる。

#### SUB(6) DMAT(M)

$\bar{f}_{yz} > \tau_{yzY}$  により降伏、または  $\bar{f}_{yz}$  が前ステージのそれより小さくなくて塑性状態が継続している第  $m$  番要素について、(26) 式の  $[D^p]$  の成分を計算する。(48) 式から  $\bar{\sigma} = \sqrt{A} \bar{f}_{yz}$ , (49) 式から  $H' = A \cdot H^*$  であるから、(26) 式の  $S_4$ ,  $S_5$ ,  $S$  は次のようにかける。

$$\begin{aligned} S_4 &= \sqrt{A} G_{yz} \tau_{yz} / \bar{f}_{yz} \equiv \sqrt{A} \cdot S_4^* \\ S_5 &= B G_{zx} \tau_{zx} / \sqrt{A} \bar{f}_{yz} = \sqrt{A} G_{zx} \tau_{zx} / q^2 \bar{f}_{yz} \equiv \sqrt{A} S_5^* \\ S &= A [H^* + (S_4^* \tau_{yz} + S_5^* \tau_{zx} / q^2) / \bar{f}_{yz}] \equiv A \cdot S^* \end{aligned} \quad (51.1)$$

したがって

$$\frac{1}{S} \begin{bmatrix} S_4 S_4 & S_4 S_5 \\ S_4 S_5 & S_5 S_5 \end{bmatrix} = \frac{1}{S^*} \begin{bmatrix} S_4^* S_4^* & S_4^* S_5^* \\ S_4^* S_5^* & S_5^* S_5^* \end{bmatrix} \quad (51.2)$$

これらの式での  $\bar{f}_{yz}$  は **TS**( $m, 3$ ) に記憶されているが、それは前ステージでの値であり、そのまま用いると  $H'$  を過大に評価することになるので

$$\text{SIGB} = \bar{\sigma} = \bar{f}_{yz} + 0.5 \Delta \bar{f}_{yz}$$

としている。なお降伏直後 (**IEP**=1) で **CALL** された要素では **IEP** を 2 に変える。

#### SUB(7) SOLVE(NST)

(41) 式を  $\{\phi\}$  (= **FI**) について解く。その解法は、予想される木材のせん断応力-ひずみ曲線から定まる (44) 式の  $\alpha, n$  に対して、破壊振り角の段階まで、Gauss-Seidel 法適用可能の条件が保持されるので、この逐次近似法により、さらに解の収束を速めるために加速緩和係数  $\beta=1.65$  を用いた<sup>10)</sup>。また (41) 式の右辺  $\{F\}$  (= **DB**) の絶対値最大の値を **DBMX** とし、各回の近似解に対する修正量の絶対値最大 **RMX** が、**RMX** < **CRTV** × **DBMX** の条件で計算を打ち切る。**CRTV** は  $0.5 \times 10^{-4}$  とし、繰り返しの回数が元数 (**N**) の 2 倍でなお上記の条件が満されないときは、必用事項を印刷して停止する。

## SUB(8) STRESS(M)

第  $m$  番要素について, (42) 式における  $d\theta=1$  としたときの  $\{d\gamma\}$  を **DE** に, また (27) 式の  $\{d\tau\}$  を **DS** に計算する。

## SUB(9) PRINT(NST)

第 1 ステージ ( $\text{NST}=1$ ) の計算で **R** に  $\theta_Y$  (降伏振り角), **TMY** に  $M_Y$  (降伏モーメント) が求まり, 以後各ステージ ( $\text{NST} \geq 2$ ) での計算結果から **THETA** =  $\theta$  (振り角),  $\text{T1} = \sum x\tau_{yz}\Delta A$ ,  $\text{T2} = \sum y(-\tau_{zx})\Delta A$ ,  $\text{TM} = \text{T1} + \text{T2} = M$  (振りモーメント),  $\text{THETAR} = \theta/\theta_Y$ ,  $\text{TMR} = M/M_Y$  を求めて印刷する。また  $\text{LPSTG}(n)=1$  なら全要素について, 0 なら  $\text{MEPT}(m)=1$  の要素のみについて応力 **TS**, ひずみ **TE**, および剛性 **D** を印刷する。

## 2.2 計算手順

材料の種類毎に, 材料定数  $G_{yz}$ ,  $k(=G_{zx}/G_{yz})$ ,  $\tau_{yzY}$ ,  $q(=\tau_{zxY}/\tau_{yzY})$ ,  $\alpha, n$  を与えてから次の順序で計算を行う。

① 全要素が弾性であるときの (41) 式の  $\{\phi\}$  を, プログラム **MAIN** の **ISN** (内部文番号) = 71 で求める。

② (42) 式の  $d\theta=1$  としたときのひずみ  $\{\gamma\}_1$ , 対応する応力  $\{\tau\}_1$  および (48) 式の  $\bar{f}_{yz1}$  を計算し, 全要素のなかでその最大のものを  $(\bar{f}_{yz1})_{\max}$  として **ISN** = 80 の **TAUMX** に求める。

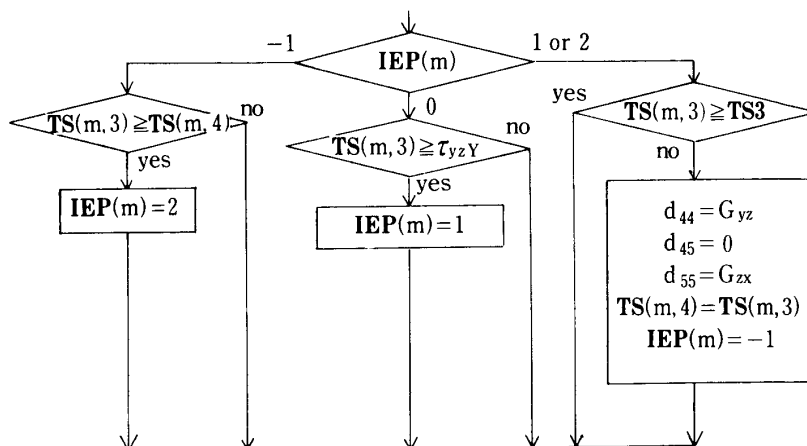
③ **ISN** = 82 の **THETA** =  $\tau_{yzY}/(\bar{f}_{yz1})_{\max} = \theta'_Y$  で要素の相当応力最大値が  $\tau_{yzY}$  に等しくなる振り角を求める。一般にはこの  $\theta'_Y$  をもって降伏振り角とし, **ISN** = 83~91 をとりさり, 92 を **R** = **THETA** と修正する。( **ISN** = 83~91 は, 後に述べる長方形または長方だ円断面の短辺長が 10 である特別の場合, 弾性ねじり応力の最大値が  $x=5, y=0$  の長辺中央に生ずることが明らかであり, 要素法で定まる応力が各要素の図心位置のものであることから, 外挿により  $(\bar{f}_{yz})_{x=5, y=0}$  の値を **TAU0** に求め, 要素分割が比較的粗い場合でも, 降伏振り角  $\theta_Y$  が **ISN** = 92 の **R** に正しく求められるようにしたものである。)

④  $\theta = \theta'_Y$  に対応するひずみ  $\{\gamma\}$ , 応力  $\{\tau\}$  および  $\bar{f}_{yz}$  を求め,  $\bar{f}_{yz} \geq \tau_{yzY}$  である要素は **IEP** = 1 とし, さらに  $\theta'_Y$  に相応する振りモーメントを求めて印刷する (**ISN** = 94~105)。

⑤ **IEP** = 1 (or 2) の要素では  $[D^e] \rightarrow [D^p]$  (or  $[D^p] \rightarrow [D^p]'$ ) とし (41) 式の  $[CK]$  および  $\{F\}$  をこれに応じて修正する (**ISN** = 108~129)。

⑥ 修正された  $[CK]$  と  $\{F\}$  に対する (41) 式の  $\{\phi\}$  を求める (**ISN** = 130)。

⑦ この  $\{\phi\}$  と, 振り角増分  $d\theta = C \cdot \theta_Y$ ;  $C = 0.1$  or  $0.2$  とからひずみ増分  $\{d\gamma\}$ , 応力増分  $\{d\tau\}$



を、つづいて  $\{r+d\tau\}$ ,  $\{\tau+d\tau\}$  を求める ( $ISN=132\sim138$ )。

⑧ 前ステージの  $\bar{f}_{yz}$  を **TS3** とし、このステージで求めた  $\{\tau+d\tau\}$  に対する  $\bar{f}_{yz}$  を **TS(m, 3)** に入れる ( $ISN=139, 140$ )。

⑨ 以下は前ページの流れ図に従う ( $ISN=142\sim152$ )。

⑩ このステージでの応力からモーメントを計算し、 $\theta \rightarrow \theta + d\theta$  として必要な印刷を行なう。

⑪ 所定の繰返し回数 (**NSTN**) になるまで⑤～⑩の処理を反復する。

### 2.3 等方体丸棒の振り (プログラムのチェック)

半径  $r$  の等方体丸棒の振りでは、弾性、塑性を通じて、必要な諸量を積分によって直接計算することが出来る。すなわち Fig. 4 において、中心から任意な距離  $\rho$ ;  $0 \leq \rho \leq r$  におけるせん断ひずみを  $\gamma$ , 外皮 ( $\rho=r$ ) でのひずみを  $\gamma_1$  とすると、単位長当りの振り角  $\theta$  に対し

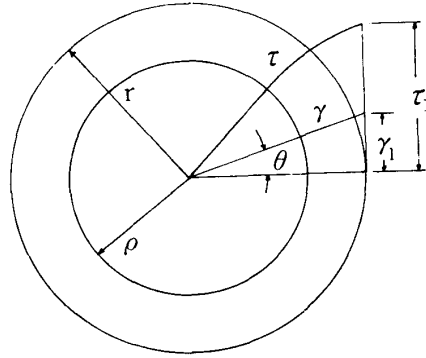


Fig. 4. Distribution of stress ( $\tau$ ) and strain ( $\gamma$ ) along the radius of an isotropic round bar in elastic-plastic torsion.

$$\gamma = \rho\theta, \quad \gamma_1 = r\theta$$

である。純粋せん断の応力-ひずみの関係が

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \tau/G; \quad 0 \leq \gamma \leq \gamma_Y \\ \xi \equiv \gamma/\gamma_Y &= f(\eta) = \eta + \alpha(\exp(\eta-1) - \eta)^n; \quad \eta \equiv \tau/\tau_Y, \gamma \geq \gamma_Y, \tau \geq \tau_Y \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

で表わされるものとする。ただし  $\gamma_Y$ ,  $\tau_Y$  はそれぞれ降伏せん断ひずみおよび応力を表わす。振りモーメント  $M$  は

$$M = 2\pi \int_0^r \rho^2 \tau d\rho$$

であり、 $\rho = \gamma/\theta$ ,  $d\rho = d\gamma/\theta$ ,  $\rho = 0 \sim r$ :  $\gamma = 0 \sim \gamma_1$  であるから

$$M = 2\pi/\theta^3 \int_0^{\gamma_1} \tau \gamma^2 d\gamma = 2\pi/\theta^3 \left[ \int_0^{\gamma_Y} \tau \gamma^2 d\gamma + \int_{\gamma_Y}^{\gamma_1} \tau \gamma^2 d\gamma \right]$$

$$\int_0^{\gamma_Y} \tau \gamma^2 d\gamma = G \int_0^{\gamma_Y} \gamma^3 d\gamma = \frac{G}{4} \gamma_Y^4 = \frac{1}{4} \tau_Y \gamma_Y^3$$

$\int_{\gamma_Y}^{\gamma_1}$  は、 $\tau = \tau_Y \eta$ ,  $\gamma = \gamma_Y \xi$ ,  $d\gamma = \gamma_Y d\xi = \gamma_Y f'(\eta) d\eta$ ;  $\gamma = \gamma_Y \sim \gamma_1$ :  $\tau = \tau_Y \sim \tau_1$ :  $\eta = 1 \sim \eta_1$ ,  $\eta_1 = \tau_1/\tau_Y$  であるから

$$\int_{\gamma_Y}^{\gamma_1} \tau \gamma^2 d\gamma = \tau_Y \gamma_Y^3 \int_1^{\eta_1} \eta [f(\eta)]^2 f'(\eta) \cdot d\eta \equiv \tau_Y \gamma_Y^3 I(\eta_1)$$

$$I(\eta_1) = \int_1^{\eta_1} \eta [\eta + \alpha(e^{\eta-1} - \eta)^n]^2 [1 + \alpha n (e^{\eta-1} - \eta)^{n-1} (e^{\eta-1} - 1)] d\eta \quad (53)$$

したがって

$$M = \pi \tau_Y \gamma^3 [1 + I(\eta_1)] / 2\theta^3$$

ところで、降伏モーメント  $M_Y$  は

$$M_Y = \pi \tau_Y \gamma^3 / 2\theta^3$$

であるから

$$M/M_Y = (\theta_Y/\theta)^3 [1 + I(\eta_1)] = (\gamma_Y/\gamma_1)^3 [1 + I(\eta_1)] = [1 + I(\eta_1)]/\xi_1^3; \quad \xi_1 = \gamma_1/\gamma_Y \quad (54)$$

となる。いま (52) 式の  $\alpha=0.4$ ,  $n=0.6$  のとき (Fig. 3 の実線)  $\eta_1=1.0\sim 5.0$  に対する (53) 式の積分  $I(\eta_1)$ , (52) 式から  $\xi_1=f(\eta_1)$  を求め、さらに (54) 式から  $M/M_Y$  を計算し、それを  $\eta'_{\text{exact}}$  として  $\theta/\theta_Y$  との関係を表 1 の第 1, 第 2 欄に示す。

要素法プログラムで  $r=1.0$  の四分円に、要素数=94, 節点数=98 の分割を用い,  $G_{yz}=\tau_{yzY}=1.0$ ,  $k=q=1.0$ ,  $\alpha$  および  $n$  に前記の値を与え,  $d\theta=0.2\theta_Y$  として  $\theta/\theta_Y=8.0$ , (NSTEN=36) まで計算した結果から各  $\theta/\theta_Y$  に対する  $M/M_Y$  を  $\eta'_{\text{FEM}}$  として同表の第 3 欄に示す。

また要素法の結果から各ステージの  $\theta$  に対して、中心からの距離  $\rho=\sqrt{0.85^2+0.05^2}$  の位置に図心を有する要素の  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zx}$  から合せん断応力  $\tau=\sqrt{\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2}$  を求め  $\tau/\tau_Y=\eta$  に対する  $\xi=\eta+\alpha(e^{\eta-1}-\eta)^n \equiv \xi_{\text{FEM}}$  を計算すると表 1 の第 6 欄のようになる。等方体丸棒では振り角  $\theta$  に対して、 $\rho$  の位置でのせん断ひずみは  $\gamma=\rho\theta$ , したがって  $\xi=\gamma/\gamma_Y=\rho\theta/\gamma_Y=\rho\theta \equiv \xi_{\text{exact}}$ ; ( $\gamma_Y=1$ ) を同表第 5 欄

Table 1. Values calculated by the FEM method and the exact values in the elastic-plastic torsion of isotropic bar having circular cross section.

$\theta/\theta_Y$	$\eta'_{\text{exact}}$	$\eta'_{\text{FEM}}$	$\frac{\eta'_{\text{FEM}}}{\eta'_{\text{exact}}}$	$\xi_{\text{exact}}$	$\xi_{\text{FEM}}$	$\frac{\xi_{\text{FEM}}}{\xi_{\text{exact}}}$
2.0	1.8526	1.8632	1.0057	1.7029	1.7061	1.0019
3.0	2.5723	2.5811	1.0034	2.5544	2.5608	1.0025
4.0	3.2139	3.2206	1.0021	3.4059	3.4176	1.0034
5.0	3.7878	3.7930	1.0014	4.2573	4.2767	1.0046
6.0	4.3012	4.3055	1.0010	5.1088	5.1382	1.0058
7.0	4.7613	4.7649	1.0008	5.9603	6.0030	1.0072
8.0	5.1746	5.1778	1.0006	6.8118	6.8710	1.0087

$$\eta' = M/M_Y, \quad \xi = \gamma/\gamma_Y$$

に示す。第 4 欄は  $\eta'_{\text{FEM}}/\eta'_{\text{exact}}$ , 第 7 欄は  $\xi_{\text{FEM}}/\xi_{\text{exact}}$  の値を示すものであるが、いずれも 1.009 以下であり、この要素法プログラムによる計算値は厳密値と比較して十分満足すべき精度であることが判る。

なお要素内での  $\phi$  の近似式として (32) または (33) 式を用いるときは、長方形要素の方がより高い精度を与えるので<sup>11)</sup>, 三角形要素は曲線境界に適合させるため必要な部分に限って使用すべきものである。

### 3 木材の振り試験とせん断特性

#### 3.1 試片断面の形状寸法

木材の棒の振り試験からせん断弾性係数  $G_{LR}$ ,  $G_{LT}$ ,  $G_{RT}$  を求める方法に関しては Hørig<sup>12), 13), 14)</sup> の研究がある。すなわち、棒の軸が  $L$ ,  $R$ ,  $T$  に一致する 3 種類の丸棒から (11) 式の右辺の値を求めるとそれぞれ

$$(1/G')_L = (1/G_{LR} + 1/G_{LT})/2$$

$$(1/G')_R = (1/G_{RT} + 1/G_{LR})/2$$

$$(1/G')_T = (1/G_{LT} + 1/G_{RT})/2$$

となるから

$$\left. \begin{aligned} 1/G_{LR} &= (1/G')_L + (1/G')_R - (1/G')_T \\ 1/G_{LT} &= (1/G')_T + (1/G')_L - (1/G')_R \\ 1/G_{RT} &= (1/G')_R + (1/G')_T - (1/G')_L \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

よって、 $G_{LR}$ 、 $G_{LT}$ 、 $G_{RT}$  を定めることが出来る。

正方形断面の場合には、(14) 式で  $a=b$  であるから  $p=1$  となり、棒の軸  $z$  が  $L$ 、 $R$ 、 $T$  に一致し、断面の 2 辺が  $(R, T)$ 、 $(T, L)$ 、 $(L, R)$  に平行な 3 種類の試片について弾性域における  $M/\theta$  を測定し、次式左辺の値を求める。

$$\left. \begin{aligned} 1/a^4 \cdot (M/\theta)_L &= G_{LT} \Phi(\lambda_L) = G_{LR} \Phi(1/\lambda_L); \quad \lambda_L = \sqrt{G_{LR}/G_{LT}} \\ 1/a^4 \cdot (M/\theta)_R &= G_{LR} \Phi(\lambda_R) = G_{RT} \Phi(1/\lambda_R); \quad \lambda_R = \sqrt{G_{RT}/G_{LR}} \\ 1/a^4 \cdot (M/\theta)_T &= G_{RT} \Phi(\lambda_T) = G_{LT} \Phi(1/\lambda_T); \quad \lambda_T = \sqrt{G_{LT}/G_{RT}} \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

3 個のせん断弾性係数に対する適当な第一近似値から出発し、(56) 式の関係が必要かつ十分な精度で満足されるまで逐次近似の方法を繰り返す。金<sup>15)</sup>はこの方法に従ってマカンバ、ナラ、エゾマツの  $G$  を求め、別に  $45^\circ$  試片の圧縮試験から、ヤング率  $E_{45^\circ}$ 、ポアソン比  $\mu_{45^\circ}$  を測定し

$$G = E_{45^\circ} / 2(1 + \mu_{45^\circ}) \quad (57)$$

から定まる  $G$  を計算し、両者がよく一致したことを報告している。

沢田<sup>16)</sup>は (55) 式の関係を用いて  $G$  の算定を試み、 $(1/G')_R$  と  $(1/G')_T$  はほぼ同じ大きさであるのに対し、 $(1/G')_L$  がそれらの  $1/10$  以下の大きさであるため、測定の誤差および個々の試片間の材質の変動のために  $G_{LR}$ 、 $G_{LT}$  を正しく決定することが困難であると述べている。

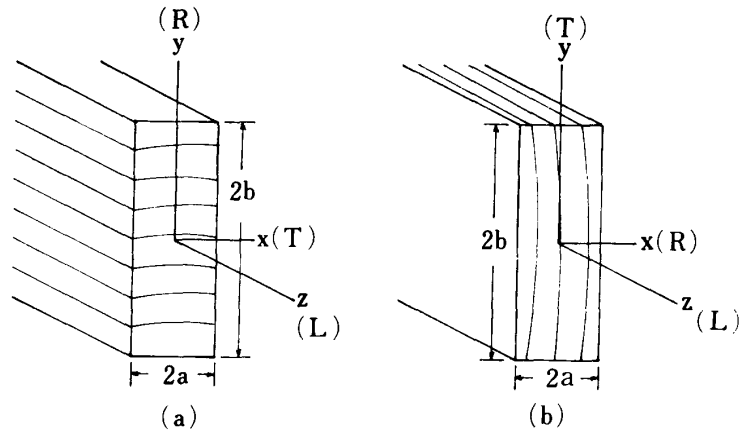


Fig. 5. LR specimen (a) and LT specimen (b) having the rectangular cross section.

はりの設計などに関連して重要な  $G_{LR}$ 、 $G_{LT}$  の測定には、以下に述べる方法が十分有用である。すなわち Fig. 5 のように  $(2a \times 2b)$  の長方形断面の棒の軸  $z$  を  $L$  とし、長辺  $(2b)$  に平行な  $y$  が  $R$  と一致する試片を  $LR$  試片、 $z=L$  で  $y=T$  であるものを  $LT$  試片と名づける。寸法が全く同じ、したがって  $b/a=p$  も一定である 2 種類の試片の振り試験から  $(M/\theta)_{LR}$  および  $(M/\theta)_{LT}$  を測定し、次式で定義される振り剛性比  $\zeta$  を求める。

$$\zeta \equiv (M/\theta)_{LR} / (M/\theta)_{LT} \quad (58)$$

対応するせん断弾性係数比  $\kappa$  を (59) 式で定義すれば

$$\kappa \equiv G_{LR}/G_{LT} \quad (59)$$

LT 試片では,  $G_{zx}=G_{LR}$ ,  $G_{yz}=G_{LT}$ ,  $k=G_{zx}/G_{yz}=G_{LR}/G_{LT}=\kappa$  となるから, (14) の第1式より

$$(M/\theta)_{LT}=G_{LT}a^3b\Phi(p\sqrt{\kappa})$$

となる。LR 試片では,  $G_{zx}=G_{LT}$ ,  $G_{yz}=G_{LR}$ ,  $k=G_{zx}/G_{yz}=G_{LT}/G_{LR}=1/\kappa$  であるから (14) の第2式より

$$(M/\theta)_{LR}=G_{LT}ab^3\Phi(\sqrt{\kappa}/p)$$

となる。したがって (58) 式の  $\zeta$  は

$$\zeta = p^2\Phi(\sqrt{\kappa}/p)/\Phi(p\sqrt{\kappa}) \quad (60)$$

となる。 $\kappa=1.0\sim 2.0$  に対する  $\zeta$  の値を,  $p=2, 3, 4, 5$  の各場合について (60) 式から求め, その関係を示すと Fig. 6 の各実線のようなになる。測定の結果から  $\zeta$  が定まるので, Fig. 6 によって対応する  $\kappa$  を求め

$$G_{LR}=(M/\theta)_{LR}/a^3b\Phi(p/\sqrt{\kappa})$$

$$G_{LT}=(M/\theta)_{LT}/a^3b\Phi(p\sqrt{\kappa})$$

として  $G_{LR}$ ,  $G_{LT}$  を算定することが出来る。 $\Phi(\lambda)$  の表を Table 2 に示す。 $\lambda < 1$  に対しては  $\Phi(\lambda) = \lambda^2\Phi(1/\lambda)$  の関係から求まる。

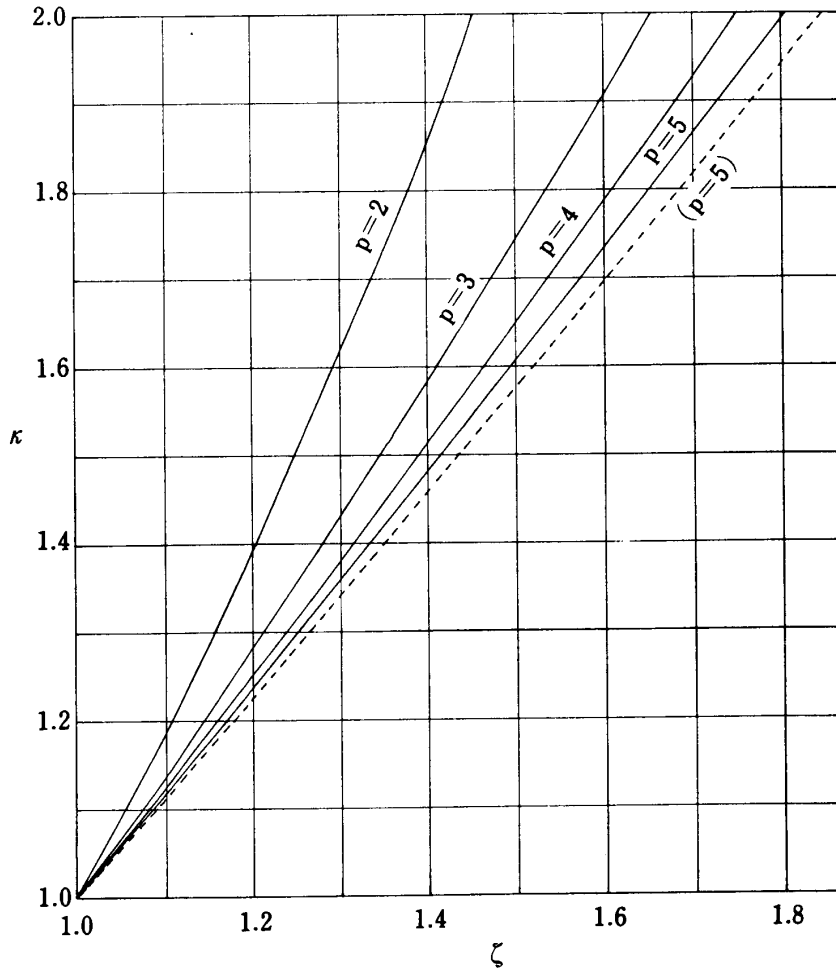


Fig. 6. Relationships between  $\kappa$  and  $\zeta$

$\kappa=G_{LR}/G_{LT}$ : shear-modulus ratio.  $\zeta=(M/\theta)_{LR}/(M/\theta)_{LT}$ : torsional-rigidity ratio.

$p=b/a$ : ratio of height to width in the cross section of bar.

—: rectangular section, .....: rectangular-elliptical section.

Table 2. Values of  $\Phi$  in eq. 14.

$\lambda$	$\Phi(\lambda)$	$\lambda$	$\Phi(\lambda)$	$\lambda$	$\Phi(\lambda)$
1.0	2.2492	2.4	3.9343	9	4.9599
1.1	2.4637	2.6	4.0412	10	4.9972
1.2	2.6579	3.0	4.2131	15	5.1092
1.3	2.8329	3.5	4.3730	20	5.1653
1.4	2.9905	4.0	4.4930	25	5.1989
1.5	3.1322	4.5	4.5864	30	5.2213
1.6	3.2598	5.0	4.6611	40	5.2493
1.7	3.3749	5.5	4.7222	50	5.2661
1.8	3.4789	6.0	4.7731	70	5.2853
2.0	3.6589	7.0	4.8531	100	5.2997
2.2	3.8085	8.0	4.9132	$\infty$	16/3

Fig. 7 では、振りモーメント  $M=2bP$  であるから (14) 式により

$$G_{yz}=2P/\theta a^3\Phi(\lambda)$$

となる。 $z=0$  の面が固定されており C 点  $(0, y, z)$  の荷重方向の変位  $u$  が十分小さいときには、 $u=yz\theta$  とおき得る。また厚さ  $t=2a$  であるから上の式は

$$G_{yz}=16yzP/ut^3\Phi(\lambda)$$

とかける。変位を測定する点を  $y=z=d/\sqrt{2}$  の位置にとると

$$G_{yz}=8d^2P/ut^3\Phi(\lambda)$$

となり、厚さ ( $t=2a$ ) に比べて幅 ( $2b$ ) が十分に大きく、 $\lambda=p\sqrt{k}=\frac{2b}{t}\sqrt{k}$  に対する  $\Phi$  の値に  $\lambda=\infty$  の 16/3 を用いると

$$G_{yz}=3d^2P/2t^3u \quad (61)$$

となる。(61) 式は March ら<sup>17)</sup> によって開発されたいわゆる plate-shear 法での算式であり、合板、繊維板などの平面材料の  $G$  を測定するのに比較的簡単でしかもよい精度が得られるとされている。この方法は ASTM-D3044<sup>18)</sup> に規格化されており、それによると、板の幅と厚さの比を (25~40) 対 1 にとるように規定している。 $\Phi(25)/\Phi(\infty)=0.975$ ,  $\Phi(40)/\Phi(\infty)=0.987$  であるから、 $k \approx 1$  のとき 2.5~1.3% の誤差を伴うことになるが、実用的には十分な精度といえる。継田ら<sup>19)</sup> は、(61) 式を異方性板に適用することを疑問視しており、高見<sup>20)</sup> もまた、plate-shear 法の基本は、試験板が等方材料であることとしているが、上述の誘導過程から明らかなように、厚さに比べて幅が十分大きいときには、直交異方板に対しても理論的に正しい式である。(ただし Fig. 7 の  $yz$  面が弾性対称面と

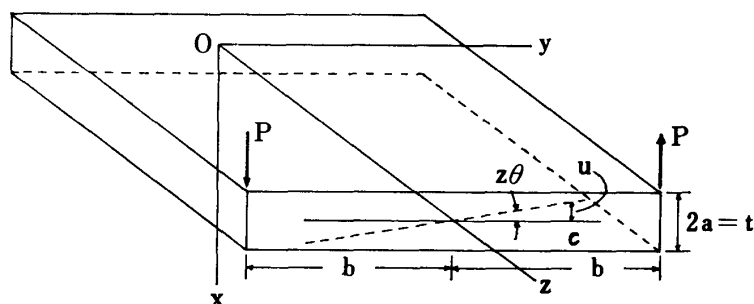


Fig. 7. Explanation of plate-shear-method.



一致し、板の縁が  $y, z$  軸と完全に平行であることが必要である)。木材(素材)の場合には、直交異方かつ均質の条件を保持しながら上のような寸法比の試験板をとることは困難であるから、plate-shear 法を木材(素材)に適用することは常に可能ではない。Fig. 6 から  $p=b/a$  が大きい程、弾性係数比  $\kappa$  の僅小な差による剛性比  $\zeta$  の変化が大きく表われるので、 $\zeta$  から  $\kappa$  を推定するには大きな  $p$  で試験を行うことが好都合のようにみえるが、前記の条件から、余り大きくない丸太では  $p=5$  程度が適当かと考える。

等方材料 ( $k=1$ )、長方形断面棒の  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zx}$  を (12), (13) 式で計算し、合せん断 (弾性) 応力  $\tau$  の分布を、 $p=5$  の場合について示すと Fig. 8.1 のようになる。周知のように  $\tau_{\max}$  は  $A$  点 ( $x=a$ ,  $y=0$ ) に生じ、 $B$  点 ( $x=0$ ,  $y=b$ ) の応力  $\tau_B$  は、 $p=5$  のとき  $0.743 \tau_A$  となる。 $\tau_B/\tau_A$  の  $p$  による変化は Fig. 8.2 に示され、 $p>4$  では殆ど一定である。等方材料 (降伏応力  $=\tau_Y$ ) 長方形断面の場合には、 $\tau_A>\tau_Y$  のとき最初の局部的降伏が  $A$  点に生じ、 $M\sim\theta$  線図はこの点を境として直線から曲線に移行する。

異方性材料では  $\tau_{yz}$  に対する降伏応力  $\tau_{yzY}$  と、 $\tau_{zx}$  に対する  $\tau_{zxY}$  が一般には異なるから、 $a<b$  の長方形断面棒でも、 $A$  点で最初の降伏が生ずるとは限らない。 $q=\tau_{zxY}/\tau_{yzY}=0.55$ ,  $k=G_{zx}/G_{yz}=0.8$  という特性をもつ異方性材料で  $p=5$  の長方形断面の場合、要素法による計算の結果、一定の  $\Delta\theta$  で順次振り変形を大きくして行くとき、 $\bar{f}_{yz}>\tau_{yzY}$  の条件で要素が降伏する順序は、Fig. 8.3 のようになる。すなわち  $\tau_{zxY}$  が  $\tau_{yzY}$  に比べてかなり小さいときには、 $\tau_{yz}>\tau_{yzY}$  で  $A$  点が降伏する前に  $B$  点が  $\tau_{zx}>\tau_{zxY}$  によって降伏する。したがって  $M\sim\theta$  線図から知られる比例限は、異方性長方形断面の場合、 $A$  点での  $\tau_{yz}>\tau_{yzY}$  によるものか、 $B$  点での  $\tau_{zx}>\tau_{zxY}$  によるものか直ちには判定し難い。

Fig. 8.4 の断面 (長方形断面の両端を半だ円形にしたもので、 $AC$  は直線、 $BC$  は  $x^2/a^2+(y-b_1)^2/b_2^2=1$ ;  $a=0.5$ ,  $b_1=1.5$ ,  $b_2=1.0$  で以下“長方だ円形”と呼ぶ) で等方体の場合、弾性合せん断応力  $\tau$  の分布は同図に示される通りであって  $\tau_B/\tau_A$  は  $0.41$  である。

$k=0.8$ ,  $q=0.55$  の異方性材料、長方だ円断面の場合、要素が降伏する順序は Fig. 8.5 のようになる。 $\tau_{yzY}=1$  に対して  $\tau_{zxY}=0.55$  のように小さな値であっても、長方だ円の場合には、 $A$  点における  $\tau_{yz}>\tau_{yzY}$  の条件で降伏が始まることが知れる。すなわち降伏応力未知の異方性材料について、長方だ円断面棒の振り試験から、 $M\sim\theta$  線図の比例限に相当する  $A$  点の  $\tau_{yz}$  を求めればその材料の  $\tau_{yzY}$  を定めることが出来る。

### 3.2 材料特性値 $\alpha$ , $n$ , $k$ , $q$ と $M\sim\theta$ 曲線

(43) 式の  $\eta$ ,  $\xi$  の間に (44) 式の関係を保定し、 $G_{yz}$ ,  $\tau_{yzY}$ ,  $k$ ,  $q$ ,  $\alpha$ ,  $n$  に具体的な数値を与えれば、要素法プログラムによって  $\theta(\geq\theta_Y)$  に対する  $M$  が計算され、

$$\eta'=M/M_Y, \quad \xi'=\theta/\theta_Y \quad (62)$$

とおいて  $\eta'\sim\xi'$  の関係を求めることが出来る。

(44) 式で  $(\eta)_{\xi=1.2}=\eta_{1.2}$ ,  $(\eta)_{\xi=2.0}=\eta_{2.0}$  の値を定めれば、それに対応する  $\alpha, n$  が定まる。付録に示した Fig. A-1, A-2, A-3, A-4, A-5 は、前節の長方だ円断面で  $k=q=1$  の場合について、 $\eta_{1.2}=1.15, 1.16, 1.17, 1.18, 1.19$  に対し、 $\eta_{2.0}$  を種々に変えて得られる  $\eta'\sim\xi'$  の関係である。Fig. A-6 は  $\eta_{1.2}=1.17$ ,  $\eta_{2.0}=1.80$ ,  $q=1.0$  で  $k$  を変化させたとき、Fig. A-7 は、A-6 と同じ  $\eta_{1.2}$ ,  $\eta_{2.0}$  の場合  $k=1$  として  $q$  を変えたときの曲線である。 $G_{yz}$ ,  $\tau_{yzY}$  はその値が変わっても  $\eta\sim\xi$ ,  $\eta'\sim\xi'$  の関係は変わらないからすべて  $G_{yz}=\tau_{yzY}=1$  として計算した。

振り試験によって得られる  $\eta'\sim\xi'$  の関係から直接的に  $\alpha, n$  の値を定める方法がないので、予め  $\alpha, n$  (または  $\eta_{1.2}$ ,  $\eta_{2.0}$ ) の各種の値に対して計算した曲線群 (Fig. A-1~A-7) と照し合わせ、試験結果にもっともよく適合する曲線からその材料の  $\alpha, n$  を推定する。 $k$  の影響は、その値が大きくな

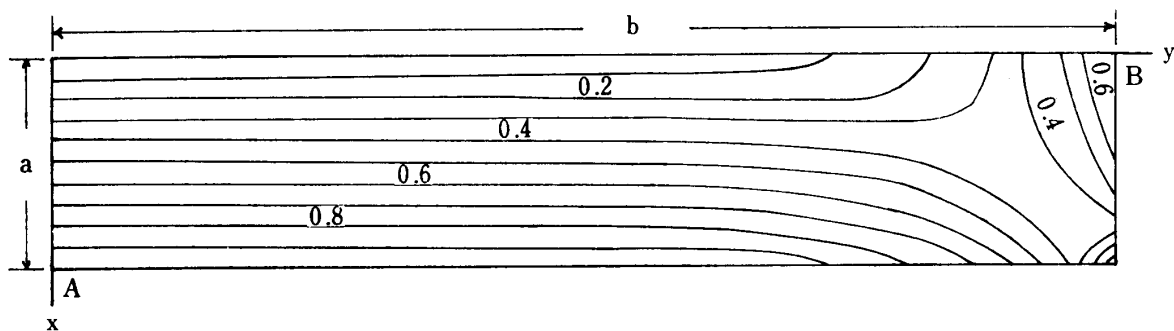


Fig. 8. 1. Distribution of resultant shearing stress on the rectangular cross section of isotropic bar in torsion.

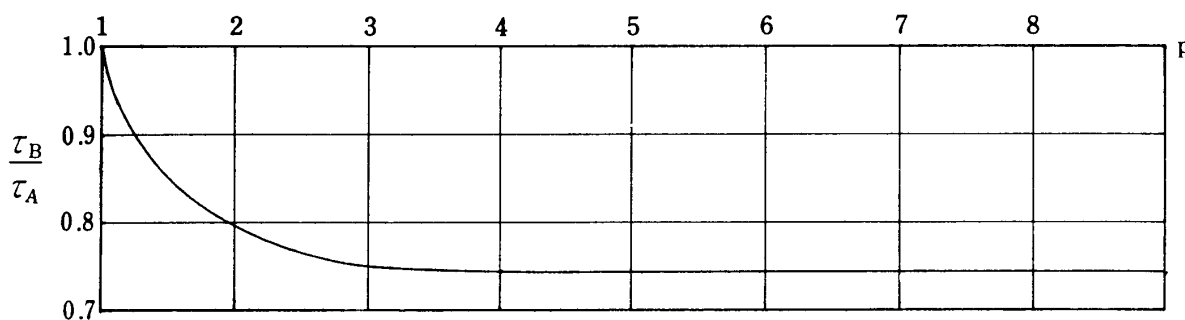


Fig. 8. 2.  $p-\tau_B/\tau_A$  relationship in the isotropic bar having rectangular cross-section ( $p=b/a$ ;  $\tau_B$ ,  $\tau_A$ : shearing stress at B and A in Fig. 8. 1.).

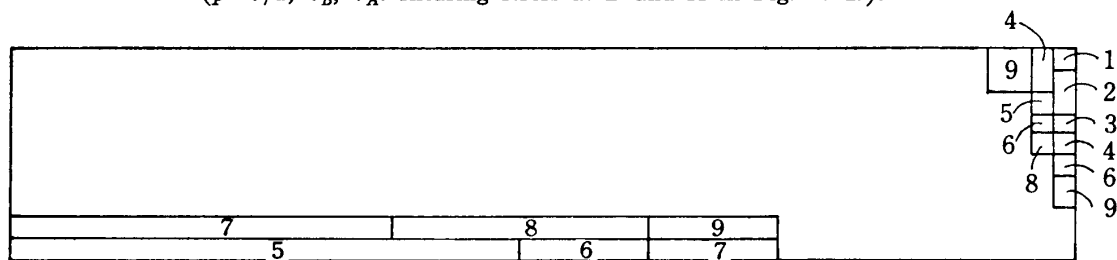


Fig. 8. 3. The order of yielding development occurring in torsion of orthotropic bar having rectangular cross section ( $q=\tau_{xxY}/\tau_{yzY}=0.55$ ;  $\tau_{xxY}$ ,  $\tau_{yzY}$ : yielding strength under shearing stress  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{yz}$ , respectively).

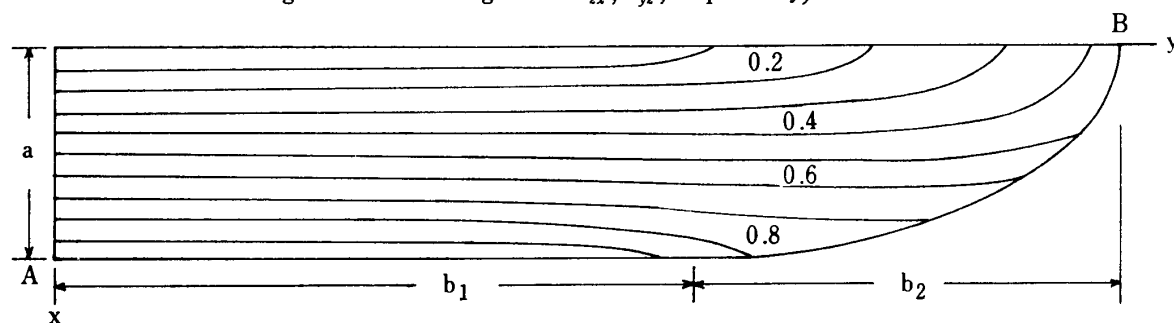


Fig. 8. 4. Distribution of resultant shearing stress on the rectangular-elliptical cross section of isotropic bar in torsion.

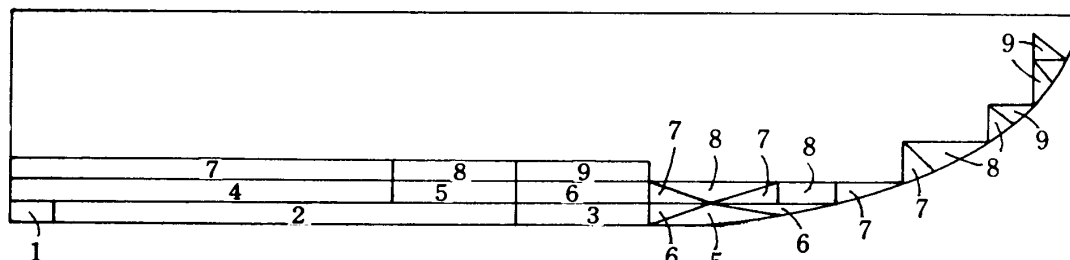


Fig. 8. 5. The order of yielding development occurring in torsion of orthotropic bar having rectangular-elliptical cross section ( $q=0.55$ ).

る程、同じ  $\delta'$  に対する  $\eta'$  は大きくなり、 $q$  の影響は逆に、その値が大きくなるとき  $\eta'$  は小さくなる。

### 3.3 振り試験の方法と結果の解析

気乾状態のスギ、ヒノキ、米マツ辺材から、長方だ円棒の軸を  $L$  軸と一致させ、長さ 30 cm の  $LR$  および  $LT$  試片 (Fig. 9) をそれぞれ 5~6 本作製した。だ円形状の仕上げは、その刃型が所定のだ円形をなすルーターにより、断面寸法は  $\pm 0.2\text{mm}$  の精度で、 $a=0.5$ ,  $b_1=1.5$ ,  $b_2=1.0\text{ cm}$  とした。振り試験機に棒の一端を固定して他端に振りモーメント  $M$  を作用させ、一定の回転速度で振り変形を

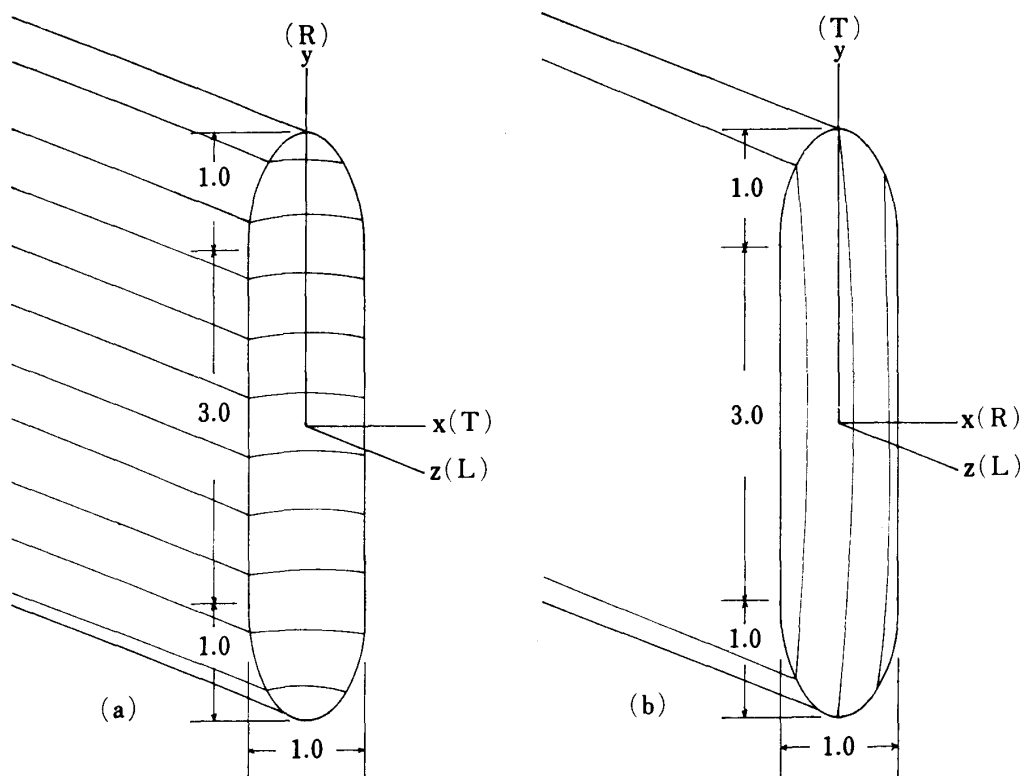


Fig. 9.  $LR$  specimen (a) and  $LT$  specimen (b) having the rectangular-elliptical cross section.

与えた。振り角  $\theta$  は、試片の中央部で、標点間距離=10 cm になるよう 2 個の鏡をとりつけ、振り軸を中心とする半径 100 cm の円形尺の目盛を望遠鏡で測定し、相対的回転角を算出して求めた。各試片についての測定値  $M \sim \theta$  を図上にプロットし、最初の十数点の直線部分から傾斜  $M/\theta$ 、比例限  $M_Y$ ,  $\theta_Y$  を求めた。その結果を、最大振り角  $\theta_m$ 、最大振りモーメント  $M_m$  と共に Table 3 に示す。

Table 3. Measured values of torque and twisting angle.

		$\theta_Y$ $10^{-4}\text{rad/cm}$	$M_Y$ $\text{kg}\cdot\text{cm}$	$M/\theta$ $10^3\text{kg}\cdot\text{cm/rad}/\text{cm}$	$\theta_m$ $10^{-4}\text{rad/cm}$	$M_m$ $\text{kg}\cdot\text{cm}$
Sugi	S-LR	43.0~58.0	33.5~53.0	9.05~9.18	305~396	181~212
	S-LT	45.0~57.5	36.5~50.0	6.00~8.22	404~520	160~242
Hinoki	H-LR	46.5~61.5	53.5~70.5	10.6 ~12.1	334~391	253~262
	H-LT	43.5~64.0	39.5~67.5	9.10~12.3	355~516	207~282
Douglas-Fir	B-LR	33.5~42.5	45.0~59.0	13.5 ~14.9	196~217	205~229
	B-LT	33.0~50.0	45.0~68.0	12.2 ~14.5	204~324	220~255

$\theta_Y$ ,  $\theta_m$ : twisting angle at yielding and failure.

$M_Y$ ,  $M_m$ : torque at yielding and failure.

スギ, ヒノキ, 米マツに対する (58) 式の  $\zeta$  は, 平均値で 1.200, 1.115, 1.084 となった。

$LT$  試片に対応して,  $G_{yz}=G_{LT}=1$ ,  $\tau_{yzY}=\tau_{LTY}=1$  であって,  $k=G_{zx}/G_{yz}=G_{LR}/G_{LT}=\kappa$  が 1.00~2.00 である長方だ円棒の降伏振り角  $\theta_Y$ , 降伏モーメント  $M_Y$  (何れも  $\tau_A=(\tau_{yz})_A=1$  となるときの  $\theta, M$ ) を要素法で計算し, この  $M_Y$  および  $M_Y/\theta_Y$  をそれぞれ  $(M_{LT})_{Y1}$  をよび  $(M/\theta)_{LT1}$  と云う記号で表わし Table 4 の第 2, 3 欄にその値を示す。実際の  $LT$  試片で  $G_{LT}$  が  $G_{LT}'$ ,  $\tau_{LTY}$  が  $\tau_{LTY}'$  であり,  $\kappa$  が既知で  $\kappa'$  である場合, 振り試験で測定される降伏モーメント  $M_Y'$ , 傾斜  $(M/\theta)'$  は,  $k=\kappa'$  に対応する同表第 2, 3 欄の値から

Table 4. Yielding torque ( $M_Y$ ) and torsional-rigidity ( $M/\theta$ ),  
calculated under the condition of  $G_{yzY}=1$  and  $\tau_{yzY}=1$ .

$k=\kappa$	$(M_{LT})_{Y1}$	$(M/\theta)_{LT1}$	$k=1/\kappa$	$(M_{LR})_{Y1}$	$(M/\theta)_{LR1}$	$\zeta$
1.00	1.3058	1.3041	1/1.00	1.3058	1.3041	1.0000
1.02	1.3071	1.3054	1/1.02	1.3046	1.3028	1.0180
1.04	1.3083	1.3068	1/1.04	1.3032	1.3012	1.0355
1.06	1.3096	1.3082	1/1.06	1.3019	1.2998	1.0532
1.08	1.3108	1.3095	1/1.08	1.3007	1.2985	1.0709
1.10	1.3120	1.3107	1/1.10	1.2994	1.2971	1.0886
1.12	1.3131	1.3119	1/1.12	1.2982	1.2957	1.1062
1.14	1.3141	1.3129	1/1.14	1.2969	1.2943	1.1238
1.16	1.3153	1.3142	1/1.16	1.2957	1.2929	1.1412
1.18	1.3163	1.3152	1/1.18	1.2944	1.2915	1.1588
1.20	1.3172	1.3163	1/1.20	1.2932	1.2901	1.1761
1.22	1.3182	1.3173	1/1.22	1.2919	1.2887	1.1935
1.24	1.3193	1.3183	1/1.24	1.2907	1.2874	1.2110
1.26	1.3200	1.3192	1/1.26	1.2895	1.2860	1.2283
1.28	1.3210	1.3202	1/1.28	1.2884	1.2847	1.2456
1.30	1.3218	1.3210	1/1.30	1.2872	1.2833	1.2629
1.32	1.3228	1.3219	1/1.32	1.2860	1.2819	1.2801
1.34	1.3234	1.3227	1/1.34	1.2849	1.2806	1.2973
1.36	1.3243	1.3236	1/1.36	1.2838	1.2793	1.3144
1.38	1.3250	1.3245	1/1.38	1.2826	1.2780	1.3315
1.40	1.3259	1.3254	1/1.40	1.2814	1.2767	1.3486
1.45	1.3279	1.3274	1/1.45	1.2787	1.2735	1.3911
1.50	1.3293	1.3289	1/1.50	1.2760	1.2702	1.4337
1.55	1.3310	1.3306	1/1.55	1.2732	1.2669	1.4758
1.60	1.3324	1.3320	1/1.60	1.2706	1.2638	1.5181
1.65	1.3340	1.3337	1/1.65	1.2681	1.2607	1.5597
1.70	1.3357	1.3354	1/1.70	1.2655	1.2575	1.6009
1.75	1.3369	1.3366	1/1.75	1.2630	1.2543	1.6422
1.80	1.3380	1.3377	1/1.80	1.2606	1.2513	1.6837
1.85	1.3392	1.3389	1/1.85	1.2582	1.2483	1.7248
1.90	1.3408	1.3405	1/1.90	1.2559	1.2453	1.7651
1.95	1.3418	1.3415	1/1.95	1.2535	1.2422	1.8057
2.00	1.3426	1.3425	1/2.00	1.2512	1.2393	1.8463

$k=G_{zx}/G_{yz}$ ,  $\kappa=G_{LR}/G_{LT}$ : shear-modulus ratio.

$\zeta=(M/\theta)_{LR}/(M/\theta)_{LT}$ : torsional rigidity ratio.

$$(M/\theta)' = G_{LT}'(M/\theta)_{LT1}, \quad M_Y' = \tau_{LTY}'(M_{LT})_{Y1}$$

となる筈である。(同一形状寸法の棒の振りでは、 $G$  が  $n$  倍になれば弾性域での  $M/\theta$  は  $n$  倍になり、 $\tau_Y$  が  $m$  倍になれば  $M_Y$  は  $m$  倍になる)。したがって測定の結果  $M_Y'$ ,  $(M/\theta)'$  が求まったなら

$$G_{LT}' = (M/\theta)' / (M/\theta)_{LT1}, \quad \tau_{LTY}' = M_Y' / (M_{LT})_{Y1}$$

として弾性係数および降伏応力を定めることが出来る。

同様に長方だ円  $LR$  試片に対応して、 $G_{yz} = G_{LR} = 1$ ,  $\tau_{yzY} = \tau_{LRY} = 1$  で、 $k = G_{zx}/G_{yz} = G_{LT}/G_{LR} = 1/\kappa$  が  $1/1.00 \sim 1/2.00$  (したがって  $G_{LT} = 1/\kappa$ ) である場合の  $M_Y$  を  $(M_{LR})_{Y1}$ ,  $M_Y/\theta_Y$  を  $(M/\theta)_{LR1}$  として Table 4 の第 5, 6 欄に示す。

いま  $G_{LT} = 1$ ,  $G_{LR}/G_{LT} = \kappa$  (したがって  $G_{LR} = \kappa$ ) である材料から  $LR$  試片をとると、 $G_{yz} = G_{LR} = \kappa$ ,  $k = G_{zx}/G_{yz} = G_{LT}/G_{LR} = 1/\kappa$  であって、前述の  $(M/\theta)_{LR1}$  を計算したときに比べて  $G$  がすべて  $\kappa$  倍になるから、 $M/\theta$  は第 6 欄の値の  $\kappa$  倍になる。

以上のことから、 $G_{LR}/G_{LT} = \kappa$  である同じ材料の  $LR$ ,  $LT$  両試片から定まる (58) 式の振り剛性比  $\zeta$  は、Table 4 の第 3 欄と第 6 欄の値によって

$$\zeta = \kappa \cdot (M/\theta)_{LR1} / (M/\theta)_{LT1} \quad (63)$$

となる筈である。同表第 7 欄の  $\zeta$  はこのようにして計算された値であり、この  $\zeta$  を  $\kappa$  に対してプロットしたものが、Fig. 6 の点線である。

測定の結果スギでは  $\zeta = 1.200$  であったから、Table 4 の補間または Fig. 6 の点線から  $\kappa = G_{LR}/G_{LT} = 1.227$  を得る。 $\kappa$  のこの値に対応する Table 4 の各数値は同じく補間によって  $(M_{LT})_{Y1} = 1.319$ ,  $(M/\theta)_{LT1} = 1.318$ ,  $(M_{LR})_{Y1} = 1.291$ ,  $(M/\theta)_{LR1} = 1.288$  となる。したがってスギ  $LR$  に対しては各試片の測定値から、 $G_{LR} = (M/\theta)/1.288$ ,  $\tau_{LRY} = M_Y/1.291$ , また  $LT$  試片の測定値から  $G_{LT} = (M/\theta)/1.318$ ,  $\tau_{LTY} = M_Y/1.319$  として所要の値が定まる。ヒノキ、米マツについても同様に、それらの結果を Table 5 に示す。同表から  $\tau_{LRY}/\tau_{LTY}$  は、平均値でスギ 0.973, ヒノキ 1.171, 米マツ 0.975 となる。

Table 5. Shear modulus ( $G_{LR}$ ,  $G_{LT}$ ) and yielding stress ( $\tau_{LRY}$ ,  $\tau_{LTY}$ ) measured.

	$\kappa$	$G_{LR}$ 10 <sup>3</sup> kg/cm <sup>2</sup>	$G_{LT}$ 10 <sup>3</sup> kg/cm <sup>2</sup>	$\tau_{LRY}$ kg/cm <sup>2</sup>	$\tau_{LTY}$ kg/cm <sup>2</sup>
Sugi	1.227	7.07(7.13~7.03)	5.75(4.55~6.24)	32.7(25.9~41.0)	33.6(27.8~38.1)
Hinoki	1.130	8.62(8.16~9.35)	7.63(6.05~9.38)	46.6(41.2~54.2)	39.8(30.0~42.9)
Douglas Fir	1.095	10.90(10.40~11.48)	9.95(9.31~11.07)	39.8(34.6~45.5)	40.8(36.4~51.7)

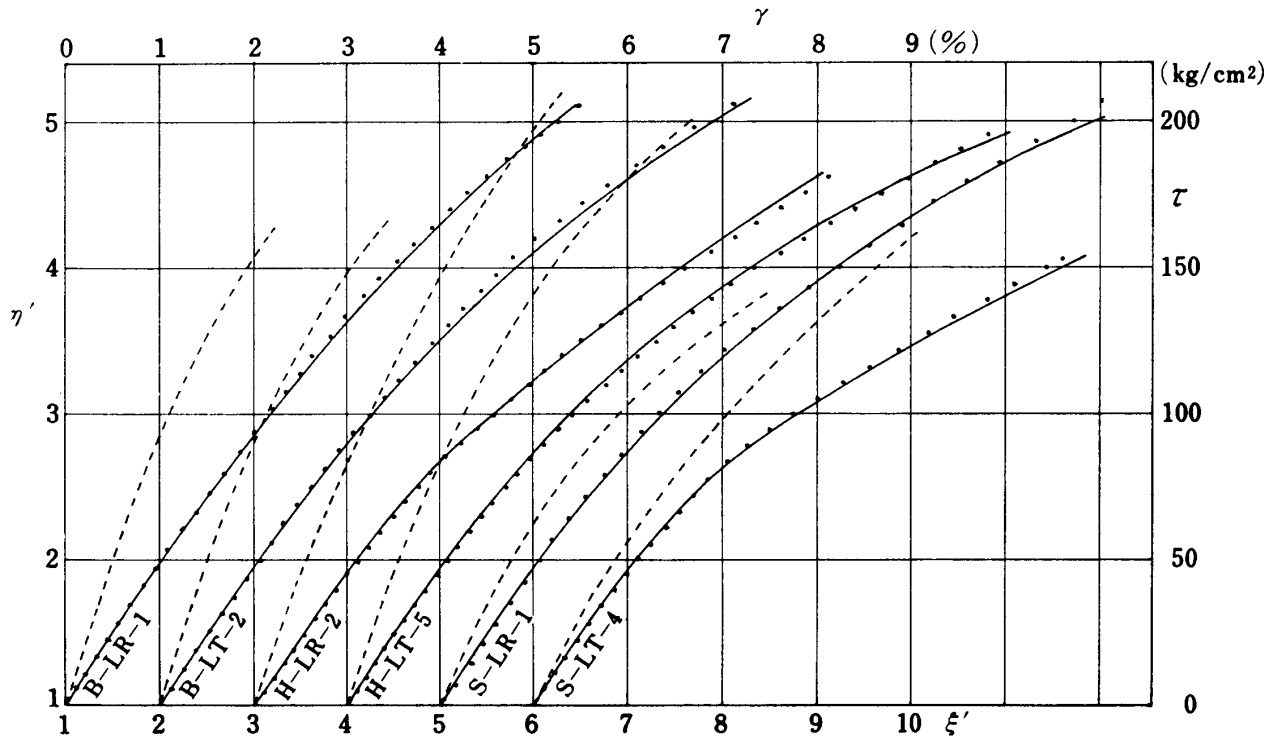
$$\kappa = G_{LR}/G_{LT}$$

測定値  $M \sim \theta$  から  $\xi' (= \theta/\theta_Y) \sim \eta' (= M/M_Y)$  の関係を求め、各樹種の平均値での  $k, q$  (たとえば、スギ  $LR$  の場合  $k = G_{zx}/G_{yz} = G_{LT}/G_{LR} = 1/1.227$ ,  $q = \tau_{zxY}/\tau_{yzY} = \tau_{LTY}/\tau_{LRY} = 1/0.973$ ) を用い、付図 (Fig. A) に示した曲線群を参考にして、各試片の  $\xi' \sim \eta'$  に最もよく適合する  $\alpha, n$  を推定する。Fig. 10 にプロットされている  $\bullet$  は、測定値から直接求めた  $(\xi', \eta')$  であり、それに沿う曲 (実) 線は推定したこの  $\alpha, n$  を用い、要素法で計算されたものである。Table 6 にはこれらパラメータの値を示す。

ここで用いた長方だ円棒の  $A$  点 ( $x=5, y=0$ ) のひずみ  $\gamma_A (= (\gamma_{yz})_A)$  と振り角  $\theta$  の間には、弾、塑性を通じ、1~2%の誤差内で

$$\gamma_A = 2a\theta \quad (64)$$

の関係が成立する。したがって最大振り角  $\theta_m$  より  $(\gamma_A)_{\max} \equiv \gamma_{yzm} = 2a\theta_m$  を、また  $\theta_m/\theta_Y = \gamma_{yzm}/\gamma_{yzY}$

Fig. 10.  $\eta'$ - $\xi'$  and  $\tau$ - $\gamma$  relationships in some specimens.

●: measured value ( $\xi'$ ,  $\eta'$ ), —: calculated curve of  $\eta'$ - $\xi'$  relation,  $\eta' = M/M_Y$ ,  $\xi' = \theta/\theta_Y$ ,  $M_Y$ ,  $\theta_Y$ : torque and twisting angle at yielding, .....:  $\tau$ - $\gamma$  relation.

Table 6. Parameters ( $\alpha, n$ ) in eq. 44, maximum shearing strain ( $\gamma_m$ ) and stress ( $\tau_m$ ) of some specimens.

Specimen	$k$	$q$	$\eta_{1.2}$	$\eta_{2.0}$	$\alpha$	$n$	$\theta_Y$ $10^{-4} \text{r/cm}$	$\tau_{yzY}$ $\text{kg/cm}^2$	$\xi_m$	$\eta_m$	$\gamma_{yzm}$ %	$\tau_{yzm}$ $\text{kg/cm}^2$
S-LR-1	1/1.227	1/0.973	1.18	1.82	0.30787	0.67307	43.1	30.2	8.11	4.70	3.50	142
S-LT-4	1.227	0.973	1.16	1.75	0.43607	0.55502	61.1	38.1	6.61	4.24	4.04	162
H-LR-2	1/1.130	1/1.171	1.16	1.78	0.34805	0.50263	46.5	43.4	7.19	4.88	3.34	212
H-LT-5	1.130	1.171	1.18	1.82	0.30787	0.67307	45.7	42.9	8.15	4.71	3.72	202
B-LR-1	1/1.095	1/0.975	1.19	1.90	0.14869	0.68332	33.4	34.6	6.40	4.50	2.14	162
B-LT-2	1.095	0.975	1.19	1.89	0.16997	0.71718	35.4	34.3	7.17	4.79	2.54	164

$$k = G_{xz}/G_{yz}, \quad q = \tau_{xzY}/\tau_{yzY}, \quad \eta_{1.2} = (\eta)_{\xi=1.2}, \quad \eta_{2.0} = (\eta)_{\xi=2.0}, \quad \xi_m = (\xi)_{\max}, \quad \eta_m = (\eta)_{\max}$$

$\equiv \xi_m$  であるから, (44) 式によつてこの  $\xi_m$  に対応する  $\eta_m$  を求め,  $\tau_{yzm} = \tau_{yzY} \cdot \eta_m$  として最大せん断ひずみ  $\gamma_{yzm}$  と対応する最大せん断応力  $\tau_{yzm}$  を定めることが出来る。Table 6 の後半にはこのようにして得られた各数値を示す。また Fig.10 の点線はそれぞれの試片について定められた  $\alpha, n$  から (44) 式を用いて  $\xi \sim \eta$  を計算し, せん断ひずみ  $\gamma_{yz} = \xi \cdot \gamma_{yzY}$  とせん断応力  $\tau_{yz} = \eta \cdot \tau_{yzY}$  の関係を求めてプロットしたものである。

Table 7 にはここで測定された全試片について, 以上のようにして求められた最大ひずみ  $\gamma_m$  と最大応力  $\tau_m$  を一括して示す。これまで木材の振り試験による最大振りモーメント  $M_m$  から, 振り強さ  $\tau_{ib}$  を求めるのに, 正方形断面 ( $2a \times 2a$ ) の場合は<sup>21)</sup>

$$\tau_{ib} = 4.80 M_m / (2a)^3 \quad (65)$$

直径  $d$  の円形断面の場合には<sup>22), 23)</sup>

Table 7. Maximum shearing strain ( $\gamma_m$ ) and stress ( $\tau_m$ )

	$\gamma_{LRm}$ %	$\tau_{LRm}$ kg/cm <sup>2</sup>	$(\tau_{LR})_{JIS}$ kg/cm <sup>2</sup>	$\gamma_{LTm}$ %	$\tau_{LTm}$ kg/cm <sup>2</sup>	$(\tau_{LT})_{JIS}$ kg/cm <sup>2</sup>
Sugi	3.58 (3.05~3.96)	144 (128~155)	75 (59~91)	4.63 (4.04~5.20)	163 (134~172)	79 (73~83)
Hinoki	3.58 (3.34~3.91)	204 (197~212)	106 (95~115)	4.16 (3.54~5.16)	189 (173~202)	98 (86~118)
Douglas-Fir	2.08 (1.96~2.17)	165 (156~172)	120 (112~123)	2.61 (2.04~3.24)	174 (164~184)	112 (86~125)

( $\tau$ )<sub>JIS</sub>: Shearing strength according to JIS test.

$$\tau_{tb} = 16M_m / \pi d^3 \quad (66)$$

が用いられている。よく知られているように、これらは何れも等方弾性体に適用される式であって、比例限以後の応力—ひずみの関係が (52) 式で表わされ、たとえば  $\alpha=0.4$ ,  $n=0.6$  のとき、正方形断面棒の振りモーメント  $M$  と対応する最大せん断応力  $\tau_m$  との関係は Fig. 11 の曲線①である。いずれも降伏モーメント  $M_Y$ , 降伏応力  $\tau_Y$  に対する比で示してある。これに対し応力—ひずみの関係が最後まで直線であるとしたときの (65) 式の値を  $\tau_m^*$  で表わすと、同図の直線②となり、 $\tau_m^*/\tau_m$  の比は曲線③であって、弾塑性振りに弾性の式を機械的に適用すると数~十数%過大な評価になることが判る。

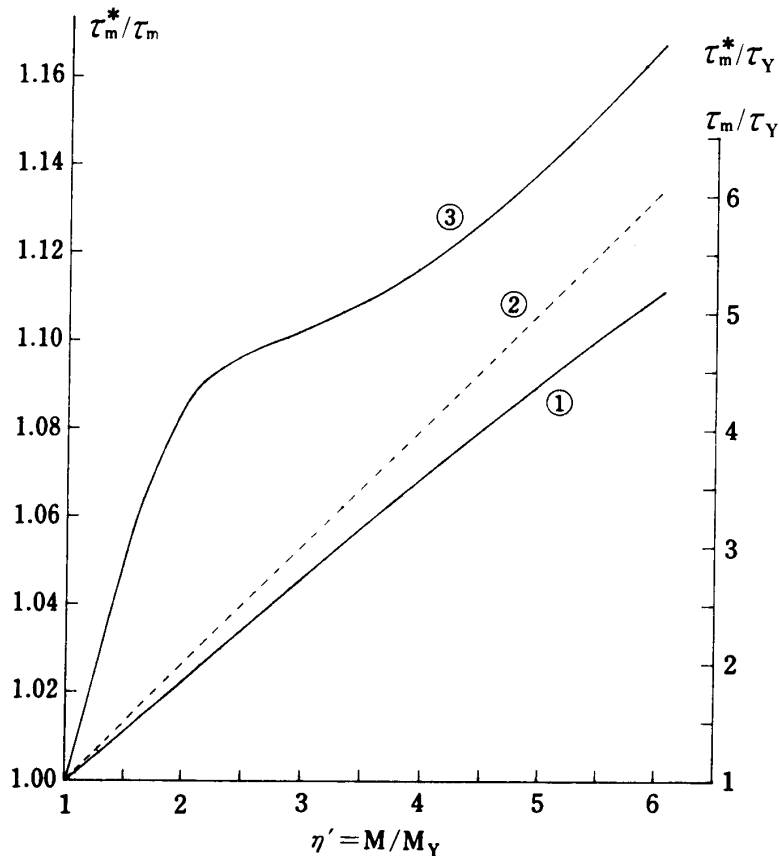


Fig. 11. Maximum stress ( $\tau_m^*$ ) in elastic torsion and maximum stress ( $\tau_m$ ) in elastic-plastic torsion of isotropic bar having the square cross section.

#### 4 考 察

木材の  $G_{LR}$ ,  $G_{LT}$  の測定はこれまで主として  $45^\circ$  圧縮試験による方法 ((57)式), または  $L, R$ ,

$LR_{45}$  の 3 種の試片の圧縮試験から次の Jenkin 式

$$1/G_{LR} = 4/E_{LR45} - 1/E_R - (1 + 2\mu_{LR})/E_L$$

またはこれの近似式<sup>24)</sup>

$$G_{LR} = E_{LR45}/(4 - E_{LR45}/E_R)$$

による方法 ( $G_{LT}$  については上の 2 式で添字  $R$  を  $T$  で置き換えた諸量を用いる) で求められ、いずれも簡便、有効な方法であり、多数の資料が集積されている。ここで得た振り試験からの  $G_{LR}$ ,  $G_{LT}$  はこれまでの資料と比較して妥当な値である。

せん断の比例限度力は Table 6 に示した  $\tau_{LRY}$ ,  $\tau_{LTY}$  である。振り試験の  $M \sim \theta$  からせん断応力の比例限度を定めることは、はりの曲げモーメント～撓み線図から圧縮応力の比例限度を求めることに相当するものであって、一様応力場による試験より、比例限度は少し高目に表われる傾向がある<sup>25), 26)</sup>。にもかかわらず Table 6 の比例限度は、Table 7 の最大応力  $\tau_m$  にに対して 20～25% でかなり低い値を示している。このことは木材のせん断に関しては応力—ひずみの直線域が相対的にかなり小さいことを意味する。

Fig. 10 の点線で各一例を示したように、比例限度を超えて後の応力—ひずみは、破壊点まで極めてゆるやかにその勾配を減少する単調な曲線となり、最大ひずみは 3～4% で比較的大きな変形に耐えることが知れる。しかし木材の破壊ひずみは、変形速度または荷重速度に強く依存することはよく知られており、ここでの試験が 5～6 kg/cm<sup>2</sup>/min というかなり低速で行なわれたことと密接な関連があると考えられる。

最大応力  $\tau_m$  は Table 7 に併記した JIS 試験によるせん断強さ ( $\tau$ )<sub>JIS</sub> (振り試験と同一材料について試験した結果であり、試片数は各 10～12 個である) に比べて 1.4～2.1 倍である。Fig. 12 は同じ米マツの板から採った厚さ 0.5cm, 長さ 20cm の試片について Rail-Shear-Test<sup>27), 28)</sup> を行い、2 組の Rail 間の幅 ( $w$ ) とせん断面の長さ ( $l$ ) の比を変えて得られた結果である。すべてせん断面

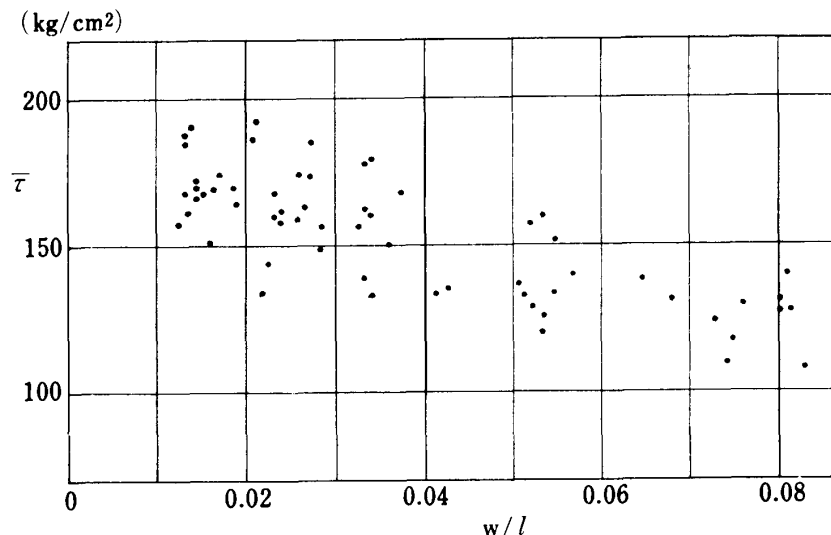


Fig. 12. Relationship between rail-shear-strength ( $\bar{\tau}$ ) and ratio ( $w/l$ ).

$w$ : distance between two pairs of loading-rails.

$l$ : length of specimen (shear-length).

が柾目面の場合 (Table 7 の  $\tau_{LTm}$  に対応する) であり、破壊荷重をせん断面積で除した平均破壊応力  $\bar{\tau}$  は  $w/l$  が小さくなるに従って大きくなり、 $w/l=0$  の極限で平均値はおよそ 180 kg/cm<sup>2</sup> 程度と推定される。平面応力問題として Rail-Shear 試験体の弾性応力を数値解析すると、 $w/l$  が小さくな



る程一樣かつ純粹せん断の状態に近づく。JIS のせん断試験体は鋭い直角の切欠きをもつから、高い応力集中を生じ、そのために比較的低い平均応力で破壊することが予想される。木材の繊維に平行な純粹せん断に対する強さは Table 7 にみられるように、これらの樹種では  $140 \sim 200 \text{ kg/cm}^2$  程度の相当に高い値を有するものと判断する。

## 要 約

木材を近似的に均質な直交異方弾塑性体とみなせば、棒の振り試験から、以下のような方法でせん断応力—ひずみの関係を定めることが出来る。

1) 振り応力場に対する降伏条件に (15) 式、塑性ひずみ増分に Reuss の式を適用すれば、塑性状態での応力—ひずみ関係式は (25), (26) 式となる。

2) 有限要素法を適用して振り変位関数  $\phi$  を求めるための方程式は、要素に関して (35), (39) 式となり,  $[CK]_e$ ,  $[F]_e$  は (36), (37) および (40.1), (40.2) 式となる。

3) 試片の断面を Fig. 9 のように選べば、降伏は常に A 点より始まり, LR 試片, LT 試片での  $M \sim \theta$  の比例限は、それぞれ  $\tau_{LR}$ ,  $\tau_{LT}$  の比例限に対応し、また直線域での  $M/\theta$  から  $G_{LR}$ ,  $G_{LT}$  を定め得る。

4) 比例限を超えて後の応力—ひずみ関係を (44) 式で表わせば,  $M \sim \theta$  の実測値に要素法の計算値がよく適合するように  $\alpha$ ,  $n$  の値を定めることが出来る。

5) この断面の棒では弾塑性を通じて  $\gamma_A = 2a\theta$  の関係が成立するから,  $\alpha$ ,  $n$  および比例限応力, 比例限ひずみとから、破壊までの全域にわたる  $\tau \sim \gamma$  の関係が定まる。

## 参 考 文 献

- 1) 大草克己：直交異方弾塑性体としての木材の棒の振り，木材学会誌 Vol. 23, p.217~227 (1977)
- 2) Timoshenko, S.P. and J.N. Goodier: "Theory of Elasticity", McGraw-Hill, New York p.293 (1970)
- 3) 鵜戸口英善：“弾性学”，共立，p.64 (1957)
- 4) Hearmon, R.F.S.: "Applied Anisotropic Elasticity", Oxford Univ. Press, London, p.51 (1961)
- 5) 文献 3), p.68
- 6) 山田嘉昭：“塑性力学”，日刊工業，p.57 (1965)
- 7) ———：“塑性・粘弾性”，培風館，p.69 (1975)
- 8) 同上，p.180~235
- 9) Yamada, Y.: Recent Developments in Matrix Displacement Method for Elastic-Plastic Problems in Japan, Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis and Design, Alabama Univ. Press, p.283~316 (1971)
- 10) 山田嘉昭（編）：マトリックス法の応用，東大出版会，p.27~29 (1972)
- 11) 大草克己：木材強度試験体(割裂・横引張・部分横圧縮)応力の数値的解析，鹿大農演報 No. 4, p.1~84 (1976)
- 12) Horig, H.: Über die rechnerische Auswertung von Verdrehungsmessungen an Holzstäben, Ing.-Arch. Vol. 4, p.570~576 (1933)
- 13) ———: Anwendung der Elastizitätstheorie anisotroper Körper auf Messungen an Holz, ibid. Vol. 6, p.8~14 (1935)
- 14) ———: Berechnung der Gleitzahlen  $S_{44}$ ,  $S_{55}$ ,  $S_{66}$  aus den Verdrehungen von Stäben mit rechteckigen Querschnitten bei rhombischer Symmetrie, ibid. Vol. 7, p.165~170 (1936)
- 15) 金俊三：圧縮及び振り実験による木材のせん断弾性係数の比較について，北大工彙報 No. 1, p. 144~156 (1948)

- 16) 沢田稔, 石田知子: 木材のせん断弾性係数について, 北大農演報 Vol. 20, No.1, p. 153~173 (1959)
- 17) March, H. W., E. W. Kuenzi and W. J. Kommers: Method of Measuring the Shearing Moduli in Wood, U. S. For. Prod. Lab., Madison, Mimeo. No. 1301, p.1~4 (1942)
- 18) A.S.T.M.: "1973 Annual Book of ASTM Standards, part 16", p.897~899 (1973)
- 19) 継田視明, 山田純也, 平井信二: 合板, ハードボード, パーティクルボードの剪断弾性係数, 木材学会誌 Vol. 5, p.127~130 (1959)
- 20) 高見勇: 合板のパネルおよびプレートせん断剛性試験について, 同上 Vol. 10, p.1~9 (1964)
- 21) Kollmann, F.: "Principles of Wood Science and Technology I, Springer-Verlag, Berlin, p.395~396 (1968)
- 22) 佐野益太郎: 木材の機械的性質に関する温度の影響 (第3報) 振り試験, 木材学会誌 Vol.7, p.191~193 (1961)
- 23) 南義夫: 木材の振り試験, 木材工業 Vol. 8, p.32~34 (1953)
- 24) 沢田稔: 木材の強度特性に関する研究, 林試報 No. 113, p.115~224 (1958)
- 25) 沢田稔: 木材梁に関する研究 (第3報) 矩形断面梁の荷重-撓曲線, 同上 No.77, p.69~102 (1955)
- 26) 浅野猪久夫: 木梁の塑性曲げにおける圧縮応力について, 木材学会誌 Vol. 12, p.155~160 (1966)
- 27) 文献 18) p.330~331 and p.349~351
- 28) Yen-Ming Chiu and E.J. Biblis: Edgewise Shear Properties of 3-ply, 4-ply, and 5-ply 1/2-inch Southern Pine Plywood, Forest Prod. J. Vol.23, No.1, p.51~55 (1973)

### Summary

In the shearing of wood, no confirmed method to determine the stress-strain diagram, furnishing the most fundamental informations on the mechanical behavior of structural materials, has been established yet. Therefore, a method to determine the relationship between the shearing stress ( $\tau$ ) and strain ( $\gamma$ ) in wood was ascertained and reported in this paper.

As shown in Fig. 9, wooden bars whose cross-section shows rectangular-elliptical shape, having the axis which is parallel to  $L$  and with either  $y=R$  ( $LR$  specimen) or  $y=T$  ( $LT$  specimen), are twisted, and the relationship between  $M$  (torque) and  $\theta$  (twisting angle per unit length) are measured.

Shear-modulus of elasticity ( $G$ ), yielding-shear-stress ( $\tau_Y$ ) and-strain ( $\gamma_Y$ ) are ascertained from the data obtained on the torsional rigidity ( $M/\theta$ ), yielding-moment ( $M_Y$ ) and rigidity-ratio ( $\zeta = (M/\theta)_{LR} / (M/\theta)_{LT}$ ).

The FORTRAN program which renders possible the solution of the torsion problems of elastic-plastic bar with orthotropy, under the use of finite element method, and the curves calculated by this program are presented in the appendix. By making the measured  $M$ - $\theta$  curve be fitted to any one of these culculated curves, the values of strain-hardening-parameters ( $\alpha$ ,  $n$  in eq. 44) are to be estimated.

By substituting the values of  $\alpha$ ,  $n$  to eq. 44, with the use of following relationships:  $\gamma_A$  (shearing strain at point A in Fig. 9)  $= 2a$  (width of the specimen)  $\times \theta$ ,  $\gamma_{\max} = 2a \times \theta_{\max}$ , " $\tau$ - $\gamma$  curve" extending from yielding to failure is to be determined.

The above mentioned procedure was applied to the torsion specimens of Sugi, Hinoki, Douglas-fir; and as shown in Fig. 10, the relationships  $\eta' (= M/M_Y) - \xi' (= \theta/\theta_Y)$ , and that of  $\tau$ - $\gamma$  were obtained in diagrams made of solid and dotted lines.

Concerning these specimens, the values of  $G$ ,  $\tau_Y$  and those of maximum stress ( $\tau_m$ ), strain ( $\gamma_m$ ) were ascertained as given in Table 5, and Table 7, respectively.

## Appendix-1

SOURCE LIST

```

C ***** FACOM 230-45S,FORTRAN *****
C ***** PRISMATICAL BAR TORSION, ELASTIC AND PLASTIC, ORTHOTROPY *****
C ***** FINITE ELEMENT METHOD *****
C
C ***** MAIN PROGRAM *****
0001 COMMON X(150),Y(150),NOD(150,5),NBL(100,2),NBO(150),D(150,3),
      1 IOSM(150,10),IESM(150,4,4),OSM(150,10),ORX(150),ORY(150),AL(150),
      2 BL(150),AREA(150),BE(100,6),CKM(150,10),ECK(4,4),FI(150),DB(150),
      3 TS(150,4),DS(150,3),TE(150,2),DE(150,2),EDB(2),DBM(100,2),EDF(4),
      4 LPSTG(100),MEPT(150),IEP(150),
      5 NPOIN,NELM, NBLN,NBON,NSTN,GYZ,GZX,TYZ,TZX,AK,Q,SA,AN
0002 COMMON /BL/ R,T1,T2,THETA,TMY
0003 DIMENSION XE(4),YE(4)
0004 READ(5,101) MTLK,COEF,NSTN
0005 101 FORMAT(I5,F10.5,I5)
0006 WRITE(6,102) MTLK,COEF,NSTN
0007 102 FORMAT(1H0,5HMTLK=,I3,10X,5HCOEF=,F6.3,10X,5HNSTN=,I3/)
0008 CALL INPUT
0009 CALL TABLE
0010 DO 7001 MK=1,MTLK
0011 READ(5,200) GYZ,TYZ,AK,Q,SA,AN
0012 200 FORMAT(4F10.5,2F15.10)
0013 GZX=GYZ*AK
0014 TZX=TYZ*Q
0015 WRITE(6,202) MK
0016 202 FORMAT(1H1,10X,3HMK=,I2/)
0017 WRITE(6,201) GYZ,GZX,TYZ,TZX,AK,Q,SA,AN
0018 201 FORMAT(1H0,4HGYZ=,F6.2,3X,4HGX=,F6.2,3X,4HTYZ=,F6.3,3X,4HTZX=,
      1 F6.3,3X,3HAK=,F5.3,3X,2HQ=,F5.3,3X,3HSA=,E12.6,3X,3HAN=,E12.6)
0019 NST=1
0020 WRITE(6,100) NST
0021 100 FORMAT(1H0,'***** NST=,I3,' *****')
0022 DO 40 N=1,NPOIN
0023 FI(N)=DB(N)=0.
0024 DO 40 I=1,10
0025 40 OSM(N,I)=0.
0026 DO 50 M=1,NELM
0027 D(M,1)=GYZ
0028 D(M,2)=0.
0029 D(M,3)=GZX
0030 50 IEP(M)=0
0031 DO 60 M=1,NELM
0032 IF(NOD(M,4).GT.0) 70,80
0033 70 KN=4
0034 GO TO 90
0035 80 KN=3
0036 90 DO 110 J=1,KN
0037 JJ=NOD(M,J)
0038 XE(J)=X(JJ)
0039 110 YE(J)=Y(JJ)
0040 IF(KN.EQ.3) 120,130
0041 120 MT=-NOD(M,4)
0042 ORX(M)=(XE(1)+XE(2)+XE(3))/3.
0043 ORY(M)=(YE(1)+YE(2)+YE(3))/3.
0044 DO 122 J=1,3
0045 XE(J)=XE(J)-ORX(M)
0046 122 YE(J)=YE(J)-ORY(M)
0047 BE(MT,1)=YE(2)-YE(3)
0048 BE(MT,2)=YE(3)-YE(1)
0049 BE(MT,3)=YE(1)-YE(2)
0050 BE(MT,4)=XE(3)-XE(2)
0051 BE(MT,5)=XE(1)-XE(3)
0052 BE(MT,6)=XE(2)-XE(1)
0053 AREA(M)=3.*(XE(2)*YE(3)-XE(3)*YE(2))/2.
0054 GO TO 140
0055 130 ORX(M)=(XE(2)+XE(1))*0.5
0056 ORY(M)=(YE(3)+YE(2))*0.5
0057 AL(M)=(XE(2)-XE(1))*0.5
0058 BL(M)=(YE(3)-YE(2))*0.5
0059 AREA(M)=4.*AL(M)*BL(M)
0060 140 CALL CKMM(M,KN)

```

```

0061      SI=1.
0062      CALL CKSUM(M,SI,KN)
0063      IF(NOD(M,5).EQ.0) 60,150
0064      150 LN=NOD(M,5)
0065          IP=NBL(LN,1)
0066          JP=NBL(LN,2)
0067          CALL DBMM(IP,JP,LN,M)
0068          DB(IP)=DB(IP)+EDB(1)
0069          DB(JP)=DB(JP)+EDB(2)
0070      60 CONTINUE
0071      CALL SOLVE(NST)
0072      TAUMX=0.
0073      DO 180 M=1,NELM
0074          CALL STRESS(M)
0075          DO 190 J=1,2
0076              TE(M,J)=DE(M,J)
0077      190 TS(M,J)=DS(M,J)
0078              TS(M,3)=SQRT(TS(M,1)**2+(TS(M,2)/Q)**2)
0079              IF(TAUMX.LT.TS(M,3)) 210,180
0080      210 TAUMX=TS(M,3)
0081      180 CONTINUE
0082          THETA=TYZ/TAUMX
0083          XA=5.
0084          TAU0=0.
0085          DO 7004 M=6,10
0086              C=1.
0087              DO 7006 I=6,10
0088                  IF(I.EQ.M) 7006,7008
0089      7008 C=C*(XA-ORX(I))/(ORX(M)-ORX(I))
0090      7006 CONTINUE
0091      7004 TAU0=TAU0+TS(M,3)*C
0092          R=TYZ/TAU0
0093          DTHETA=R*COEF
0094          T1=T2=0.
0095          DO 220 M=1,NELM
0096              DO 230 J=1,2
0097                  TE(M,J)=THETA*TE(M,J)
0098      230 TS(M,J)=THETA*TS(M,J)
0099                  TS(M,3)=THETA*TS(M,3)
0100                  T1=T1+TS(M,1)*ORX(M)*AREA(M)
0101                  T2=T2+TS(M,2)*ORY(M)*AREA(M)
0102                  IF(TS(M,3).GE.TYZ) 240,220
0103      240 IEP(M)=1
0104      220 CONTINUE
0105          CALL PRINT(NST)
0106          DO 10 NST=2,NSTN
0107              WRITE(6,100) NST
0108              DO 260 M=1,NELM
0109                  IF(IEP(M)) 260,260,270
0110      270 IF(NOD(M,4).GT.0) 272,274
0111      272 KN=4
0112              GO TO 276
0113      274 KN=3
0114      276 SI=-1.
0115          CALL CKSUM(M,SI,KN)
0116          CALL DMAT(M)
0117          CALL CKMM(M,KN)
0118          SI=1.
0119          CALL CKSUM(M,SI,KN)
0120      330 IF(NOD(M,5).EQ.0) 260,330
0121      330 LN=NOD(M,5)
0122          IP=NBL(LN,1)
0123          JP=NBL(LN,2)
0124          DB(IP)=DB(IP)-DBM(LN,1)
0125          DB(JP)=DB(JP)-DBM(LN,2)
0126          CALL DBMM(IP,JP,LN,M)
0127          DB(IP)=DB(IP)+EDB(1)
0128          DB(JP)=DB(JP)+EDB(2)
0129      260 CONTINUE
0130          CALL SOLVE(NST)
0131          T1=T2=0.
0132          DO 340 M=1,NELM
0133              CALL STRESS(M)

```

```

0134      DO 350 J=1,2
0135      DE(M,J)=DTHETA*DE(M,J)
0136      DS(M,J)=DTHETA*DS(M,J)
0137      TE(M,J)=TE(M,J)+DE(M,J)
0138      TS(M,J)=TS(M,J)+DS(M,J)
0139      TS3=TS(M,3)
0140      TS(M,3)=SQRT(TS(M,1)**2+(TS(M,2)/Q)**2)
0141      DS(M,3)=TS(M,3)-TS3
0142      IF(IEP(M)) 362,364,366
0143      362 IF(TS(M,3).GE.TS(M,4)) IEP(M)=2
0144      GO TO 342
0145      364 IF(TS(M,3).GE.TYZ) IEP(M)=1
0146      GO TO 342
0147      366 IF(TS(M,3).GE.TS3) GO TO 342
0148      D(M,1)=GYZ
0149      D(M,2)=0.
0150      D(M,3)=GZX
0151      TS(M,4)=TS3
0152      IEP(M)=-1
0153      342 T1=T1+TS(M,1)*ORX(M)*AREA(M)
0154      T2=T2-TS(M,2)*ORY(M)*AREA(M)
0155      340 CONTINUE
0156      THETA=THETA+DTHETA
0157      CALL PRINT(NST)
0158      10 CONTINUE
0159      7001 CONTINUE
0160      STOP
0161      END

```

```

C ***** SUB(1) *****
C

```

```

0001      SUBROUTINE INPUT
0002      COMMON X(150),Y(150),NOD(150,5),NBL(100,2),NBO(150),D(150,3),
1      IOSM(150,10),IESM(150,4,4),OSM(150,10),ORX(150),ORY(150),AL(150),
2      BL(150),AREA(150),BE(100,6),CKM(150,10),ECK(4,4),FI(150),DB(150),
3      TS(150,4),DS(150,3),TE(150,2),DE(150,2),EDB(2),DBM(100,2),EDF(4),
4      LPSTG(100),MEPT(150),IEP(150),
5      NPOIN,NELM,NBLN,NBON,NSTN,GYZ,GZX,TYZ,TZX,AK,@,SA,AN
0003      READ(5,100) NPOIN,NELM,NELMT,NBLN,NBON
0004      100 FORMAT(5I5)
0005      READ(5,200) (X(N),Y(N),N=1,NPOIN)
0006      200 FORMAT(16F5.3)
0007      READ(5,300) ((NOD(M,J),J=1,5),M=1,NELM)
0008      300 FORMAT(25I3)
0009      READ(5,500) ((NBL(L,J),J=1,2),L=1,NBLN)
0010      500 FORMAT(16I5)
0011      READ(5,800) (NBO(I),I=1,NPOIN)
0012      800 FORMAT(50I1)
0013      READ(5,800) (LPSTG(I),I=1,NSTN)
0014      READ(5,800) (MEPT(M),M=1,NELM)
0015      WRITE(6,101) NPOIN,NELM,NELMT,NBLN,NBON
0016      101 FORMAT(1H0,5X,6HNPOIN=,I4,5X,5HNELM=,I4,5X,6HNELMT=,I4,5X,5HNBLN=,
1      I4,5X,5HNBON=,I4)
0017      WRITE(6,301) NPOIN
0018      301 FORMAT(1H0,'X(I),Y(I),I=1,NPOIN',10X,'NPOIN=',I4//)
0019      WRITE(6,302) (I,X(I),Y(I),I=1,NPOIN)
0020      302 FORMAT(5(I4,2F11.4))
0021      WRITE(6,401) NELM
0022      401 FORMAT(1H0,' (NOD(M,J),J=1,5),M=1,NELM',10X,'NELM=',I4//)
0023      WRITE(6,402) (M,(NOD(M,J),J=1,5),M=1,NELM)
0024      402 FORMAT(5(I6,1H),5I4))
0025      WRITE(6,501) NBLN
0026      501 FORMAT(1H0,' (NBL(L,J),J=1,2),L=1,NBLN',10X,'NBLN=',I4//)
0027      WRITE(6,502) (L,(NBL(L,J),J=1,2),L=1,NBLN)
0028      502 FORMAT(10(2H (,I3,1H),I3,I4))
0029      WRITE(6,601)
0030      601 FORMAT(1H0,' NBO(I),I=1,NPOIN'/)
0031      WRITE(6,602) (NBO(I),I=1,NPOIN)
0032      602 FORMAT(5(10I2,5X))
0033      WRITE(6,801) NSTN

```

```

0034      801 FORMAT(1H0,'(LPSTG(NST),NST=1,NSTN)',10X,'NSTN=',13/)
0035      WRITE(6,802)(LPSTG(I),I=1,NSTN)
0036      802 FORMAT(10(3X,10I1))
0037      WRITE(6,901)
0038      901 FORMAT(1H0,' MEPT(M),M=1,NELM'/)
0039      WRITE(6,802)(MEPT(M),M=1,NELM)
0040      RETURN
0041      END

```

```

C ***** SUB(2) *****
C

```

```

0001      SUBROUTINE TABLE
0002      COMMON X(150),Y(150),NOD(150,5),NBL(100,2),NBO(150),D(150,3),
1      IOSM(150,10),IESM(150,4,4),OSM(150,10),ORX(150),ORY(150),AL(150),
2      BL(150),AREA(150),BE(100,6),CKM(150,10),ECK(4,4),F1(150),DB(150),
3      TS(150,4),DS(150,3),TE(150,2),DE(150,2),EDB(2),DBM(100,2),EDF(4),
4      LPSTG(100),MEPT(150),IEP(150),
5      NPOIN,NELM, NBLN,NBON,NSTN,GYZ,GZX,TYZ,TZX,AK,Q,SA,AN
0003      DO 10 I=1,NELM
0004      DO 10 J=1,4
0005      DO 10 K=1,4
0006      IESM(I,J,K)=0
0007      10 CONTINUE
0008      DO 20 I=1,NPOIN
0009      DO 20 J=1,10
0010      20 IOSM(I,J)=0
0011      DO 30 I=1,NPOIN
0012      30 IOSM(I,1)=1
0013      DO 40 M=1,NELM
0014      IF(NOD(M,4).LT.0) 50,60
0015      50 KN=3
0016      GO TO 70
0017      60 KN=4
0018      70 KN1=KN-1
0019      DO 40 IX=1,KN1
0020      JX=NOD(M,IX)
0021      IJ=IX+1
0022      IY=IOSM(JX,1)
0023      DO 40 II=IJ,KN
0024      KX=NOD(M,II)
0025      IF(IY.EQ.1) 80,90
0026      90 DO 120 L=2,IY
0027      IF(IOSM(JX,L).EQ.KX) 40,120
0028      120 CONTINUE
0029      80 JY=IOSM(JX,1)+1
0030      IF(JY.GT.10) GO TO 99
0031      IOSM(JX,JY)=KX
0032      IOSM(JX,1)=JY
0033      JY=IOSM(KX,1)+1
0034      IF(JY.GT.10) GO TO 99
0035      IOSM(KX,JY)=JX
0036      IOSM(KX,1)=JY
0037      40 CONTINUE
0038      DO 130 M=1,NELM
0039      IF(NOD(M,4).LT.0) 180,190
0040      180 KN=3
0041      GO TO 210
0042      190 KN=4
0043      210 DO 130 IL=1,KN
0044      DO 130 JL=1,KN
0045      IF(IL.EQ.JL) 140,150
0046      140 IESM(M,IL,JL)=1
0047      GO TO 130
0048      150 KL=NOD(M,IL)
0049      LUP=IOSM(KL,1)
0050      DO 160 ML=2,LUP
0051      IF(NOD(M,JL).EQ.IOSM(KL,ML)) 170,160
0052      170 IESM(M,IL,JL)=ML
0053      160 CONTINUE
0054      130 CONTINUE

```

```

0055      RETURN
0056      99 WRITE(6,900) M,(NOD(M,J),J=1,4)
0057      900 FORMAT(1H0,'IOSM OVER , M=',I3,10X,4I5)
0058      STOP
0059      END

```

```

C ***** SUB(3) *****
C

```

```

0001      SUBROUTINE CKMM(M,KN)
0002      COMMON X(150),Y(150),NOD(150,5),NBL(100,2),NBO(150),D(150,3),
1      IOSM(150,10),IESM(150,4,4),OSM(150,10),ORX(150),ORY(150),AL(150),
2      BL(150),AREA(150),BE(100,6),CKM(150,10),ECK(4,4),FI(150),DB(150),
3      TS(150,4),DS(150,3),TE(150,2),DE(150,2),EDB(2),DBM(100,2),EDF(4),
4      LPSTG(100),MEPT(150),IEP(150),
5      NPOIN,NELM,NBLN,NBON,NSTN,GYZ,GZX,TYZ,TZX,AK,Q,SA,AN
0003      D44=D(M,1)
0004      D45=D(M,2)
0005      D55=D(M,3)
0006      IF(KN,EQ,3) 10,20
0007      10 N=NOD(M,4)
0008      ECK(1,1)=(D55*BE(N,1)**2+D45*BE(N,1)*BE(N,4)*2.+D44*BE(N,4)**2)
1      /(4.*AREA(M))
0009      ECK(2,2)=(D55*BE(N,2)**2+D45*BE(N,2)*BE(N,5)*2.+D44*BE(N,5)**2)
1      /(4.*AREA(M))
0010      ECK(3,3)=(D55*BE(N,3)**2+D45*BE(N,3)*BE(N,6)*2.+D44*BE(N,6)**2)
1      /(4.*AREA(M))
0011      ECK(1,2)=ECK(2,1)=(D55*BE(N,1)*BE(N,2)+D45*(BE(N,1)*BE(N,5)
1      +BE(N,2)*BE(N,4))+D44*BE(N,4)*BE(N,5))/(4.*AREA(M))
0012      ECK(1,3)=ECK(3,1)=(D55*BE(N,1)*BE(N,3)+D45*(BE(N,1)*BE(N,6)
1      +BE(N,3)*BE(N,4))+D44*BE(N,4)*BE(N,6))/(4.*AREA(M))
0013      ECK(2,3)=ECK(3,2)=(D55*BE(N,2)*BE(N,3)+D45*(BE(N,2)*BE(N,6)
1      +BE(N,3)*BE(N,5))+D44*BE(N,5)*BE(N,6))/(4.*AREA(M))
0014      ECK(1,4)=ECK(2,4)=ECK(3,4)=ECK(4,4)=ECK(4,1)=ECK(4,2)=ECK(4,3)=0.
0015      GO TO 30
0016      20 CX=D55*BL(M)/AL(M)/6.
0017      CXY=D45/4.
0018      CY=D44*AL(M)/BL(M)/6.
0019      ECK(1,1)=ECK(3,3)=2.*(CX+CXY+CY)
0020      ECK(2,2)=ECK(4,4)=2.*(CX-CXY+CY)
0021      ECK(1,2)=ECK(2,1)=ECK(3,4)=ECK(4,3)=-2.*CX+CY
0022      ECK(1,3)=ECK(3,1)=-CX-2.*CXY-CY
0023      ECK(1,4)=ECK(4,1)=ECK(2,3)=ECK(3,2)=CX-2.*CY
0024      ECK(2,4)=ECK(4,2)=-CX+2.*CXY-CY
0025      30 CKM(M,1)=ECK(1,1)
0026      CKM(M,2)=ECK(1,2)
0027      CKM(M,3)=ECK(1,3)
0028      CKM(M,4)=ECK(1,4)
0029      CKM(M,5)=ECK(2,2)
0030      CKM(M,6)=ECK(2,3)
0031      CKM(M,7)=ECK(2,4)
0032      CKM(M,8)=ECK(3,3)
0033      CKM(M,9)=ECK(3,4)
0034      CKM(M,10)=ECK(4,4)
0035      RETURN
0036      END

```

```

C ***** SUB(4) *****
C

```

```

0001      SUBROUTINE CKSUM(M,SI,KN)
0002      COMMON X(150),Y(150),NOD(150,5),NBL(100,2),NBO(150),D(150,3),
1      IOSM(150,10),IESM(150,4,4),OSM(150,10),ORX(150),ORY(150),AL(150),
2      BL(150),AREA(150),BE(100,6),CKM(150,10),ECK(4,4),FI(150),DB(150),
3      TS(150,4),DS(150,3),TE(150,2),DE(150,2),EDB(2),DBM(100,2),EDF(4),
4      LPSTG(100),MEPT(150),IEP(150),
5      NPOIN,NELM,NBLN,NBON,NSTN,GYZ,GZX,TYZ,TZX,AK,Q,SA,AN
0003      IF(SI) 10,10,20
0004      10 ECK(1,1)=CKM(M,1)

```

```

0005      ECK(1,2)=ECK(2,1)=CKM(M,2)
0006      ECK(1,3)=ECK(3,1)=CKM(M,3)
0007      ECK(1,4)=ECK(4,1)=CKM(M,4)
0008      ECK(2,2)=CKM(M,5)
0009      ECK(2,3)=ECK(3,2)=CKM(M,6)
0010      ECK(2,4)=ECK(4,2)=CKM(M,7)
0011      ECK(3,3)=CKM(M,8)
0012      ECK(3,4)=ECK(4,3)=CKM(M,9)
0013      ECK(4,4)=CKM(M,10)
0014      20 DO 30 IL=1,KN
0015          DO 30 JL=1,KN
0016              IE=IL
0017              IO=NOD(M,IL)
0018              JE=JL
0019              JO=IESM(M,IL,JL)
0020      30 OSM(IO,JO)=OSM(IO,JO)+S1*ECK(IE,JE)
0021      RETURN
0022      END

```

```

C ***** SUB(5) *****
C

```

```

0001      SUBROUTINE DBMM(IP,JP,LN,M)
0002      COMMON X(150),Y(150),NOD(150,5),NBL(100,2),NBO(150),D(150,3),
1 IOSM(150,10),IESM(150,4,4),OSM(150,10),ORX(150),ORY(150),AL(150),
2 BL(150),AREA(150),BE(100,6),CKM(150,10),ECK(4,4),FI(150),DB(150),
3 TS(150,4),DS(150,3),TE(150,2),DE(150,2),EDB(2),DBM(100,2),EDF(4),
4 LPSTG(100),MEPT(150),IEP(150),
5 NPOIN,NELM, NBLN,NBON,NSTN,GYZ,GZX,TYZ,TZX,AK,Q,SA,AN
0003      X1=X(IP)
0004      X2=X(JP)
0005      Y1=Y(IP)
0006      Y2=Y(JP)
0007      DX=X2-X1
0008      DY=Y2-Y1
0009      D44=D(M,1)
0010      D45=D(M,2)
0011      D55=D(M,3)
0012      EDB(1)=D44*(X1/2.+DX/6.)*DX-D45*(X1*DY/2.+DX*DY/3.+Y1*DX/2.)
1 +D55*(Y1/2.+DY/6.)*DY
0013      EDB(2)=D44*(X2/2.-DX/6.)*DX-D45*(X2*DY/2.-DX*DY/3.+Y2*DX/2.)
1 +D55*(Y2/2.-DY/6.)*DY
0014      DBM(LN,1)=EDB(1)
0015      DBM(LN,2)=EDB(2)
0016      RETURN
0017      END

```

```

C ***** SUB(6) *****
C

```

```

0001      SUBROUTINE DMAT(M)
0002      COMMON X(150),Y(150),NOD(150,5),NBL(100,2),NBO(150),D(150,3),
1 IOSM(150,10),IESM(150,4,4),OSM(150,10),ORX(150),ORY(150),AL(150),
2 BL(150),AREA(150),BE(100,6),CKM(150,10),ECK(4,4),FI(150),DB(150),
3 TS(150,4),DS(150,3),TE(150,2),DE(150,2),EDB(2),DBM(100,2),EDF(4),
4 LPSTG(100),MEPT(150),IEP(M)=2
5 NPOIN,NELM, NBLN,NBON,NSTN,GYZ,GZX,TYZ,TZX,AK,Q,SA,AN
0003      SIGB=TS(M,3)+DS(M,3)*.5
0004      ETA=SIGB/TYZ
0005      H=GYZ*(EXP(ETA-1.)-ETA)**(1.-AN)/(EXP(ETA-1.)-1.)/SA/AN
0006      S4=GYZ*TS(M,1)/TS(M,3)
0007      S5=GZX*TS(M,2)/TS(M,3)/Q**2
0008      S0=H+(S4*TS(M,1)+S5*TS(M,2)/Q**2)/TS(M,3)
0009      IF(IEP(M).EQ.1) IEP(M)=2
0010      D(M,1)=GYZ-S4**2/S0
0011      D(M,2)=-S4*S5/S0
0012      D(M,3)=GZX-S5**2/S0
0013      RETURN
0014      END

```



```

C ***** SUB(7) *****
C
0001      SUBROUTINE SOLVE(NST)
0002      COMMON X(150),Y(150),NOD(150,5),NBL(100,2),NB0(150),D(150,3),
1      IOSM(150,10),IESM(150,4,4),OSM(150,10),ORX(150),ORY(150),AL(150),
2      BL(150),AREA(150),BE(100,6),CKM(150,10),ECK(4,4),FI(150),DB(150),
3      TS(150,4),DS(150,3),TE(150,2),DE(150,2),EDB(2),DBM(100,2),EDF(4),
4      LPSTG(100),MEPT(150),IEP(150),
5      NPOIN,NELM, NBLN,NB0N,NSTN,GYZ,GZX,TYZ,TZX,AK,Q,SA,AN
0003      LIMIT=NPOIN*2
0004      BETA=1.65
0005      CRTV=.5E-04
0006      IF(NST.NE.1) GO TO 5
0007      WRITE(6,100) LIMIT,CRTV,BETA
0008 100 FORMAT(1H0,'SUBROUTINE SOLVE',10X,6HLIMIT=,I4.5X,5HCRTV=,E9.2,5X,
1      5HBETA=,F5.2/)
0009      5 DBMX=0.
0010      DO 10 I=1,NBLN
0011      L=NBL(I,1)
0012      IF(DBMX.LT.ABS(DB(L))) 20,10
0013 20 DBMX=ABS(DB(L))
0014 10 CONTINUE
0015      NC=1
0016      1 DO 30 N=1,NPOIN
0017      IF(NB0(N).EQ.1) 30,40
0018 40 LUP=IOSM(N,1)
0019      ANN=OSM(N,1)
0020      FI1=DB(N)/ANN
0021      DO 50 J=2,LUP
0022      I=IOSM(N,J)
0023 50 FI1=FI1-OSM(N,J)/ANN*FI(I)
0024      DELT=FI1-FI(N)
0025      FI(N)=FI(N)+BETA*DELT
0026 30 CONTINUE
0027      RMX=0.
0028      DO 60 N=1,NPOIN
0029      IF(NB0(N).EQ.1) 60,70
0030 70 LUP=IOSM(N,1)
0031      RES=DB(N)-OSM(N,1)*FI(N)
0032      DO 80 J=2,LUP
0033      I=IOSM(N,J)
0034 80 RES=RES-OSM(N,J)*FI(I)
0035      IF(RMX.LT.ABS(RES)) RMX=ABS(RES)
0036 60 CONTINUE
0037      IF(RMX.LT.DBMX*CRTV) 2,90
0038 90 NC=NC+1
0039      IF(NC.GE.LIMIT) 99,1
0040 99 WRITE(6,200) CRTV,LIMIT,NC,RMX,DBMX
0041 200 FORMAT(1H0,5HCRTV=,E8.1,5X,6HLIMIT=,I4.5X,3HNC=,I4.5X,4HRMX=,E9.2,
1      5X,5HDBMX=,E9.2,5X,'SOLVE NO CONVERGE')
0042      STOP
0043      2 WRITE(6,300) RMX,DBMX,NC
0044 300 FORMAT(1H0,4HRMX=,E13.5,5X,5HDBMX=,E13.5,5X,'SOLVE ITERATION NC=',
1      I4)
0045      RETURN
0046      END

```

```

C ***** SUB(8) *****
C
0001      SUBROUTINE STRESS(M)
0002      COMMON X(150),Y(150),NOD(150,5),NBL(100,2),NB0(150),D(150,3),
1      IOSM(150,10),IESM(150,4,4),OSM(150,10),ORX(150),ORY(150),AL(150),
2      BL(150),AREA(150),BE(100,6),CKM(150,10),ECK(4,4),FI(150),DB(150),
3      TS(150,4),DS(150,3),TE(150,2),DE(150,2),EDB(2),DBM(100,2),EDF(4),
4      LPSTG(100),MEPT(150),IEP(150),
5      NPOIN,NELM, NBLN,NB0N,NSTN,GYZ,GZX,TYZ,TZX,AK,Q,SA,AN

```

```

0003      IF(NOD(M,4).GT.0) 10,20
0004      10 KN=4
0005      GO TO 30
0006      20 KN=3
0007      L=-NOD(M,4)
0008      30 DO 40 J=1,KN
0009      JJ=NOD(M,J)
0010      40 EDF(J)=FI(JJ)
0011      IF(KN.EQ.4) 50,60
0012      50 DE(M,1)=(EDF(3)+EDF(4)-EDF(1)-EDF(2))/4./BL(M)+ORX(M)
0013      DE(M,2)=(EDF(3)-EDF(4)-EDF(1)+EDF(2))/4./AL(M)-ORY(M)
0014      GO TO 70
0015      60 DE(M,1)=(BE(L,4)*EDF(1)+BE(L,5)*EDF(2)+BE(L,6)*EDF(3))/AREA(M)/2.
0016      1+ORX(M)
0016      DE(M,2)=(BE(L,1)*EDF(1)+BE(L,2)*EDF(2)+BE(L,3)*EDF(3))/AREA(M)/2.
0016      1-ORY(M)
0017      70 DS(M,1)=D(M,1)*DE(M,1)+D(M,2)*DE(M,2)
0018      DS(M,2)=D(M,2)*DE(M,1)+D(M,3)*DE(M,2)
0019      RETURN
0020      END

C ***** SUB(9) *****
C
0001      SUBROUTINE PRINT(NST)
0002      COMMON X(150),Y(150),NOD(150,5),NBL(100,2),NBO(150),D(150,3),
1 IOSM(150,10),IESM(150,4,4),OSM(150,10),ORX(150),ORY(150),AL(150),
2 BL(150),AREA(150),BE(100,6),CKM(150,10),ECK(4,4),FI(150),DB(150),
3 TS(150,4),DS(150,3),TE(150,2),DE(150,2),EDB(2),DBM(100,2),EDF(4),
4 LPSTG(100),MEPT(150),IEP(150),
5 NPOIN,NELM,NBLN,NBON,NSTN,GYZ,GZX,TYZ,TZX,AK,Q,SA,AN
0003      COMMON /BL/ R,T1,T2,THETA,TMY
0004      T1=4.*T1
0005      T2=4.*T2
0006      TM=T1+T2
0007      IF(NST.NE.1) GO TO 500
0008      TMY=TM*R/THETA
0009      WRITE(6,100) TMY,R
0010      100 FORMAT(1H0,10X,4HTMY=,E13.5,5X,7HTHETAY=,E13.5/)
0011      500 TMR=TM/TMY
0012      THETAR=THETA/R
0013      WRITE(6,200) THETA,T1,T2,TM,THETAR,TMR
0014      200 FORMAT(1H0,6HTHETA=,E12.5,4X,3HT1=,E12.5,4X,3HT2=,E12.5,4X,3HTM=,
1 E12.5,4X,13HTHETA/THETAY=,E12.5,4X,7HTM/TMY=,E12.5)
0015      WRITE(6,300)
0016      300 FORMAT(1H0,10X,' IEP(M),M=1,NELM'/)
0017      WRITE(6,301) (IEP(M),M=1,NELM)
0018      301 FORMAT(5(5X,10I2))
0019      WRITE(6,400)
0020      400 FORMAT(1H0,' M ORX ORY',4X,7HTS(M,1),6X,7HTS(M,2),6X,
1 7HTS(M,3),6X,7HTE(M,1),6X,7HTE(M,2),6X,6HD(M,1),7X,6HD(M,2),7X,
2 6HD(M,3)/)
0021      401 FORMAT(1H ,14,2F7.3,8E13.5)
0022      DO 10 M=1,NELM
0023      IF(LPSTG(NST).EQ.0) 20,30
0024      20 IF(MEPT(M).EQ.0) 10,30
0025      30 WRITE(6,401) M,ORX(M),ORY(M),(TS(M,J),J=1,3),(TE(M,J),J=1,2),
1 (D(M,J),J=1,3)
0026      10 CONTINUE
0027      RETURN
0028      END

```

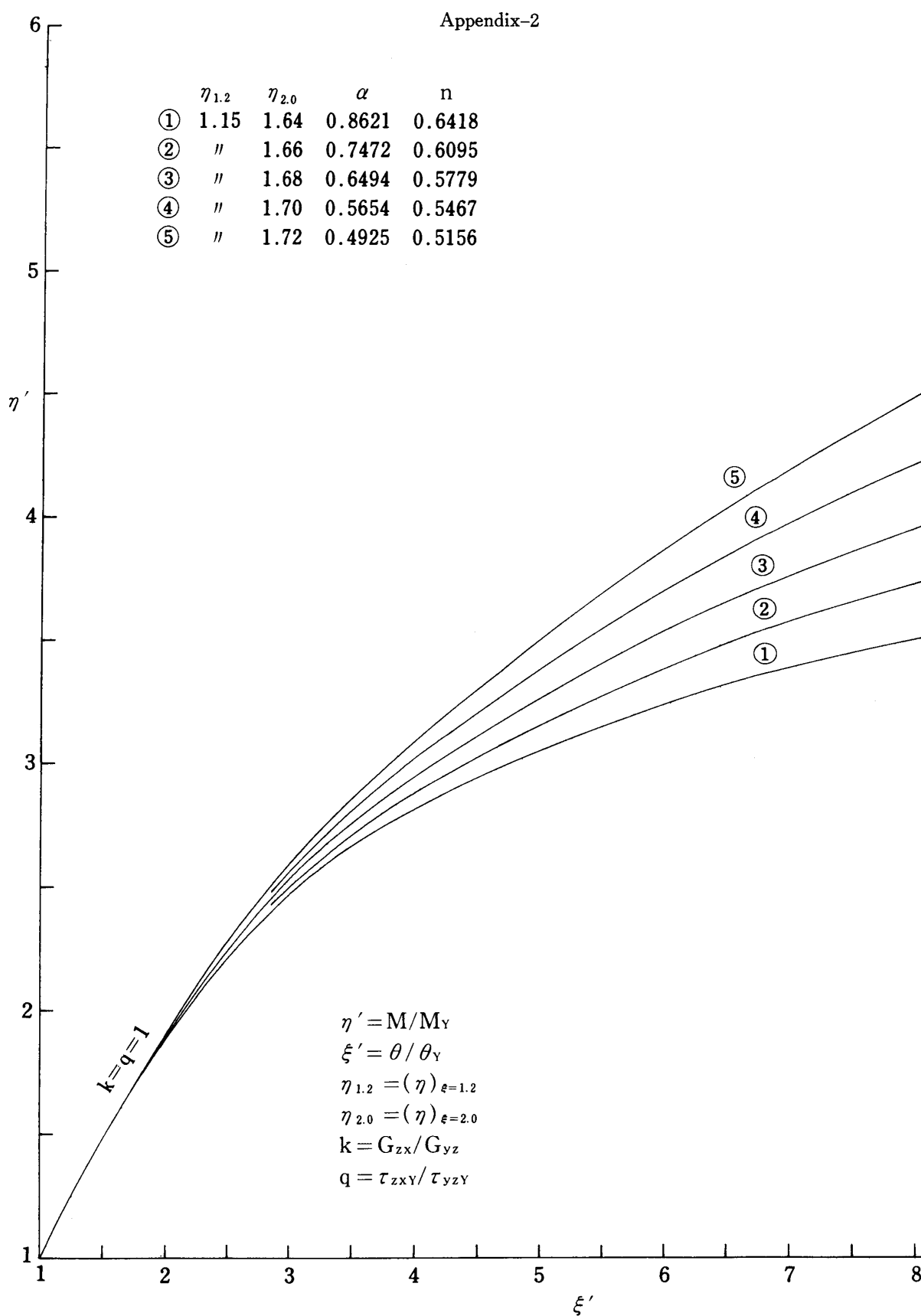


Fig. A-1.  $\eta'$ - $\xi'$  curves calculated by the FEM method on the torsion of the bar having rectangular-elliptical cross-section.

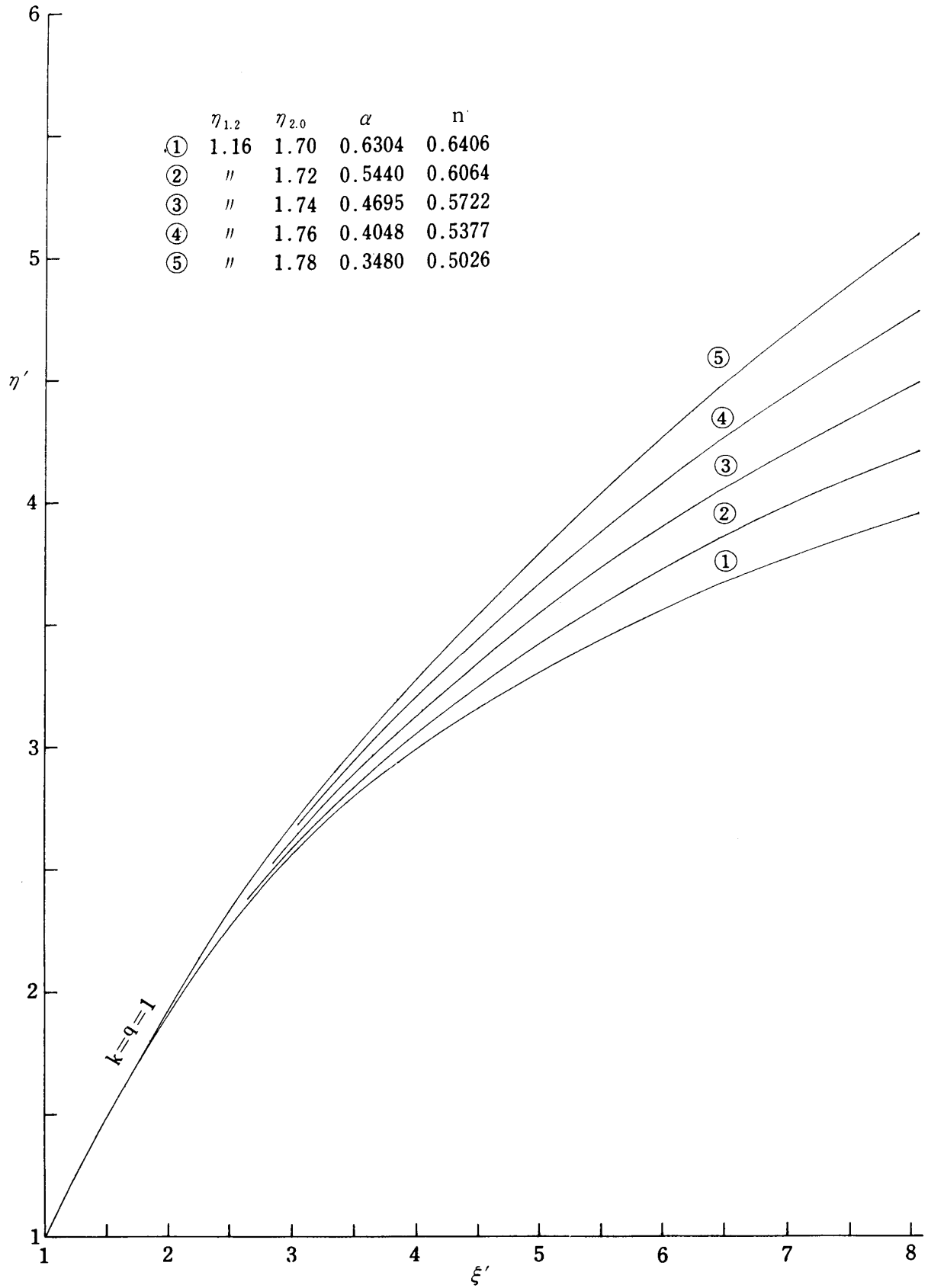


Fig. A-2.  $\eta' - \xi'$  curves calculated by the FEM method on the torsion of the bar having rectangular-elliptical cross-section.

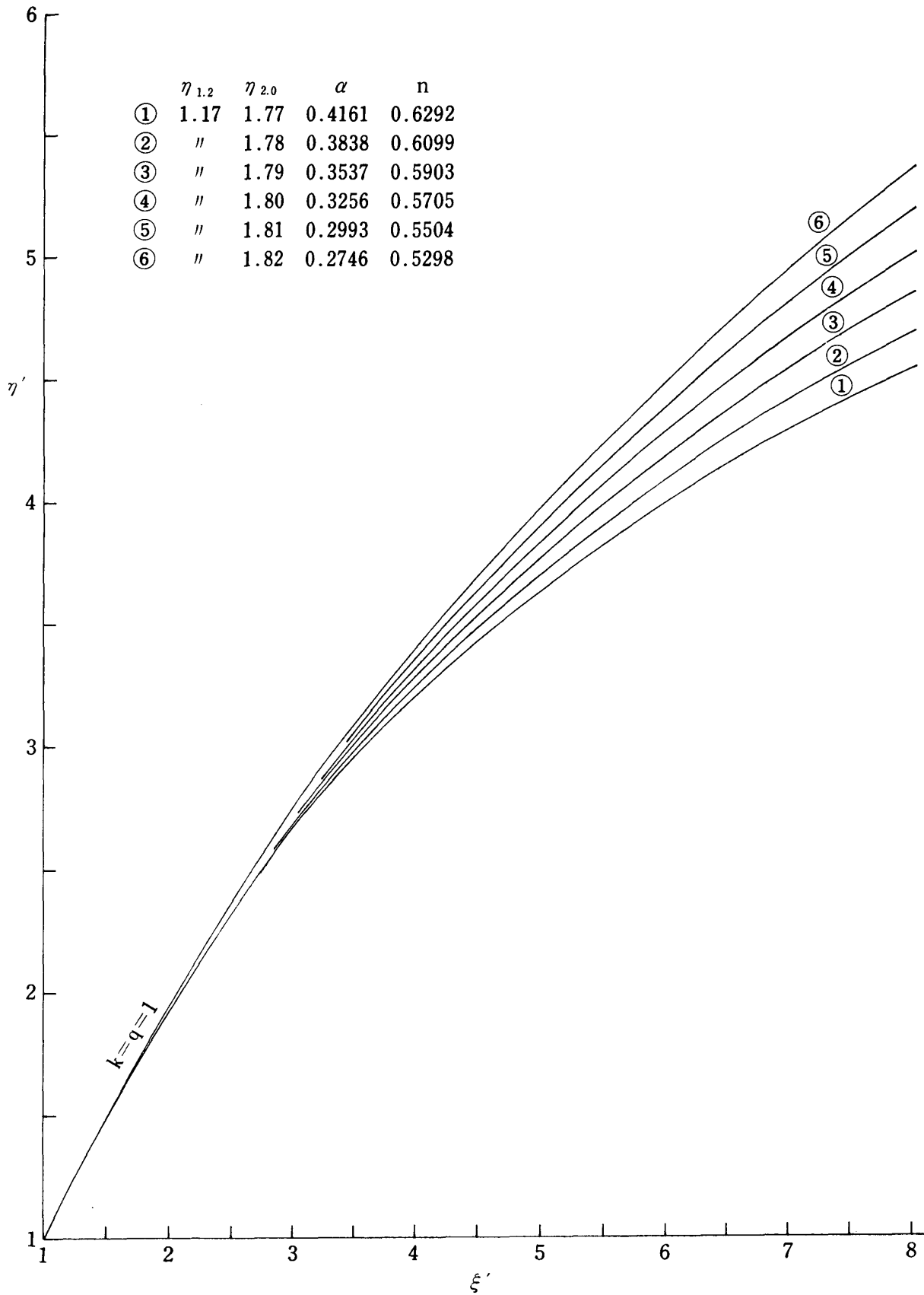


Fig. A-3.  $\eta' - \xi'$  curves calculated by the FEM method on the torsion of the bar having rectangular-elliptical cross-section.

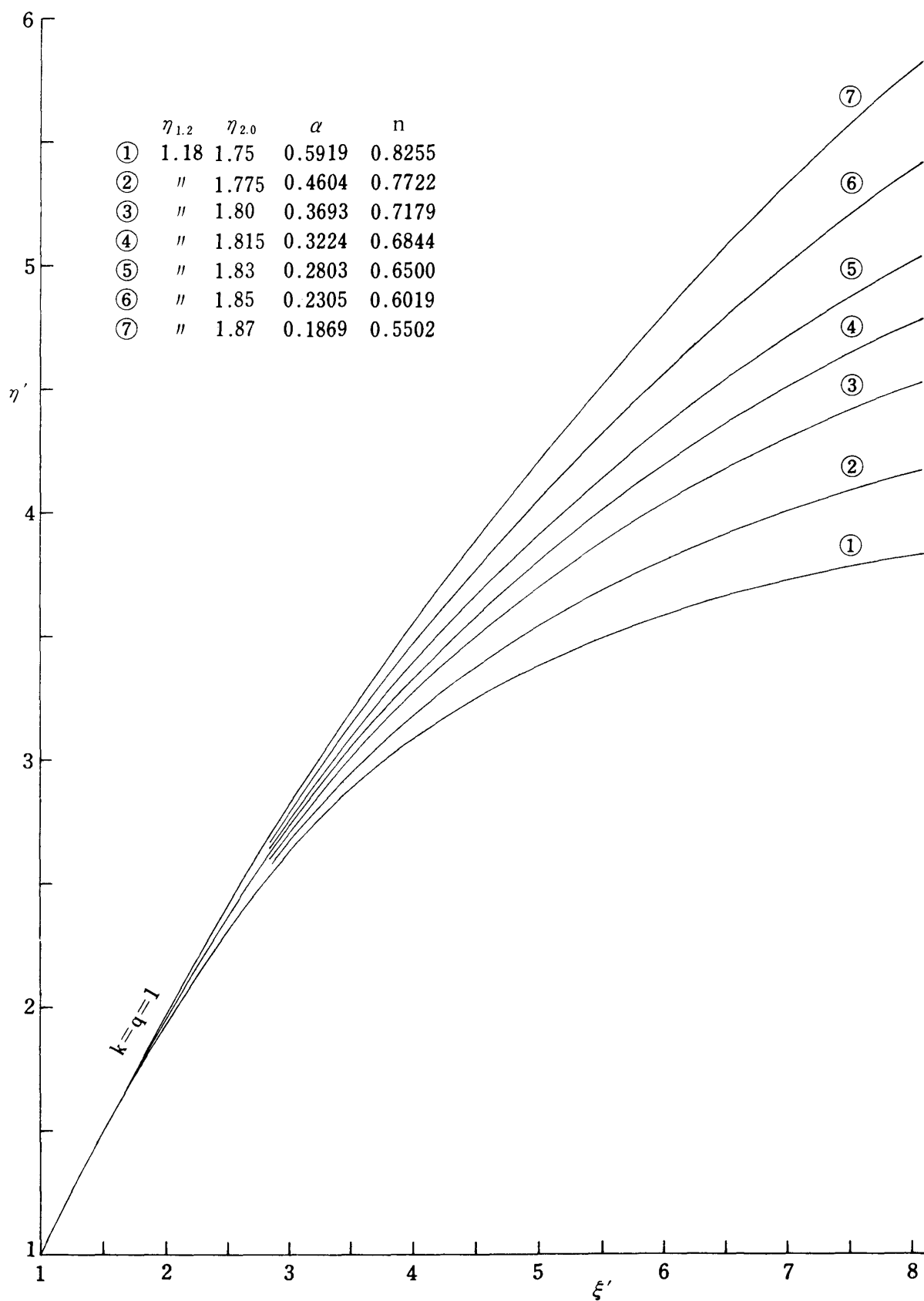


Fig. A-4.  $\eta' - \xi'$  curves calculated by the FEM method on the torsion of the bar having rectangular-elliptical cross-section.

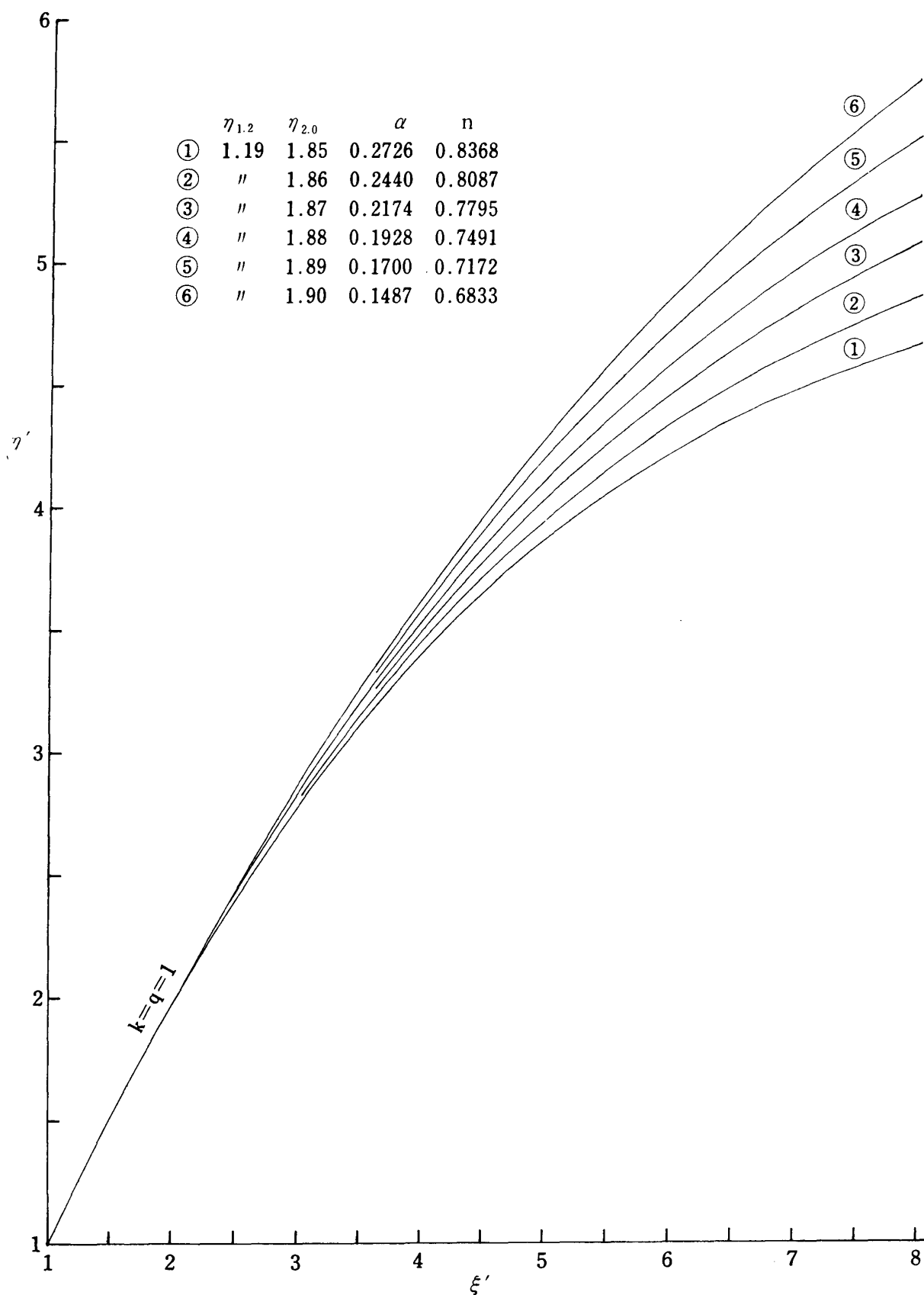


Fig. A-5.  $\eta'$ - $\xi'$  curves calculated by the FEM method on the torsion of the bar having rectangular-elliptical cross-section.

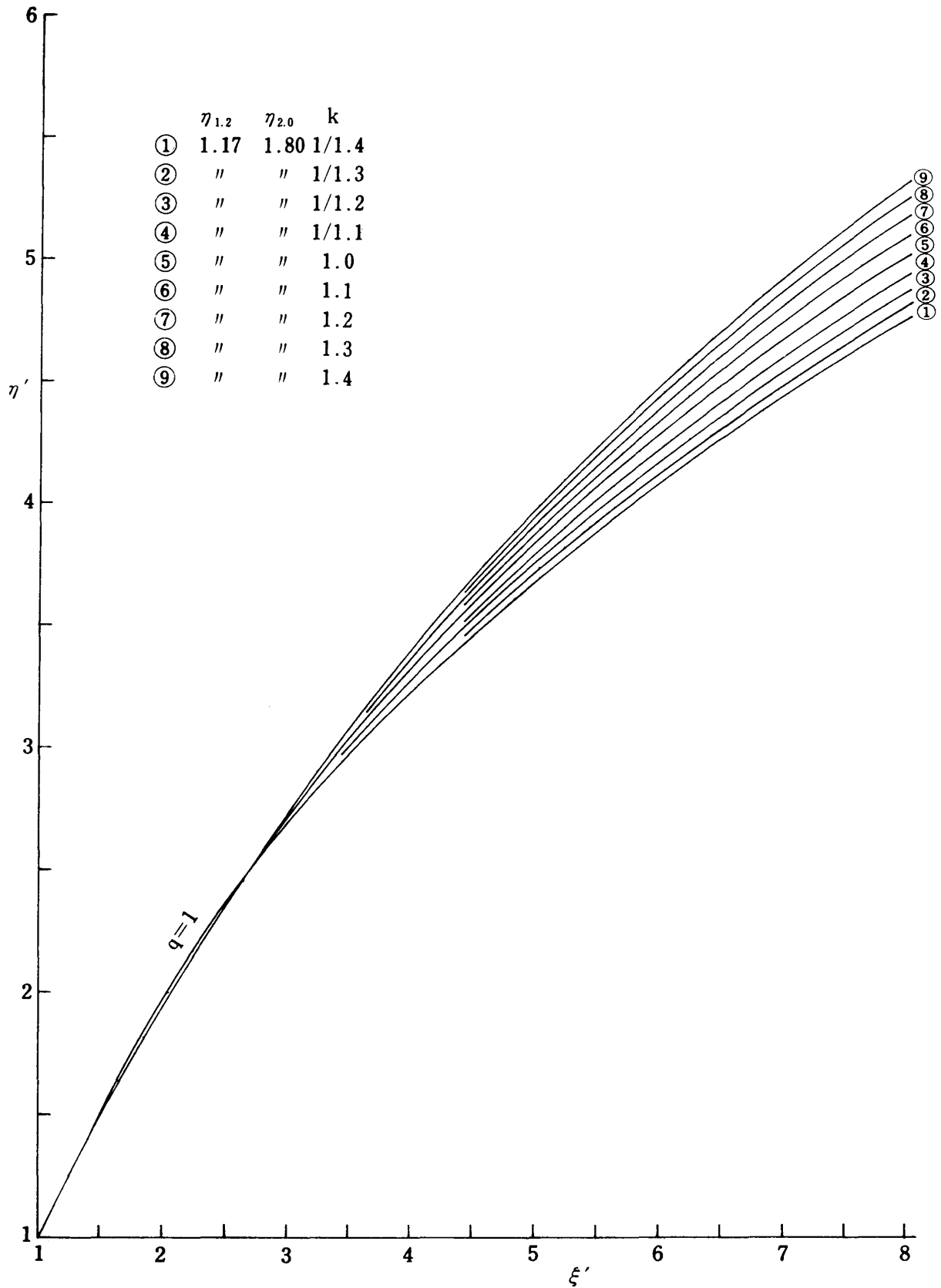


Fig. A-6.  $\eta' - \xi'$  curves calculated by the FEM method on the torsion of the bar having rectangular-elliptical cross-section.



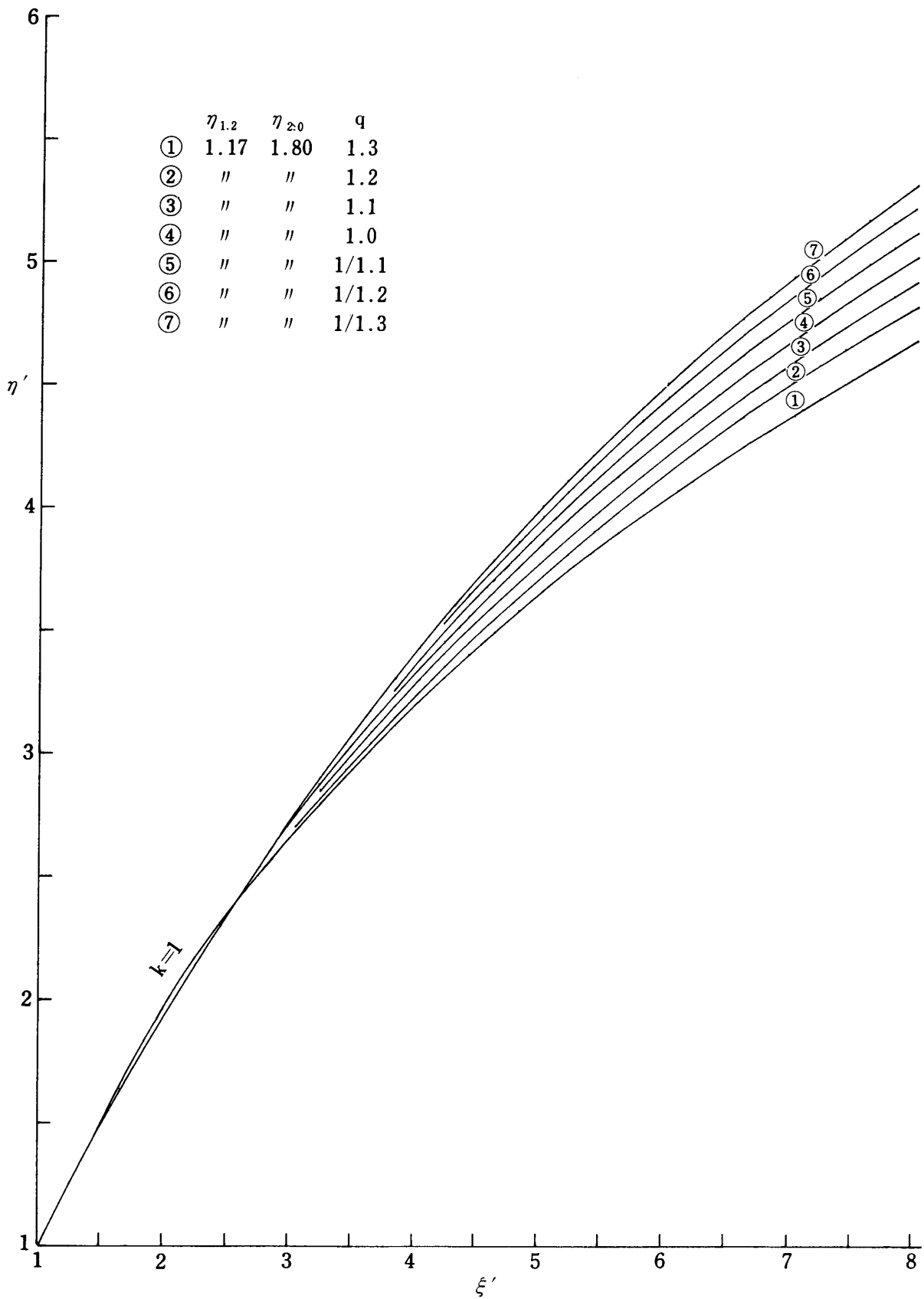


Fig. A-7.  $\eta' - \xi'$  curves calculated by the FEM method on the torsion of the bar hav in rectangular-elliptical cross-section.