中心地モデルにおける各階層の中心地人口（雇用労働量）について

石　塚　孔　信

1、はじめに

いかなる国においても大都市と中小都市が混在しており，その中で種々の都市機能が一方で集中し，他方で分散されていることによって，諸都市は相互に依存しあっているのである。われわれは，このことをもって諸都市間に以下に述べるような意味で階層性が存在していると考える。

規模の異なる種々の都市が成立していることについては，自然的・地理的条件がその大きな要因となっていることはいうまでもないが，さらに，社会的・経済的条件もまた都市間の規模格差をもたらしている重要な要因となっている。なぜなら，すべての都市が平等に同程度の都市機能を有することは決して社会全体の立場から経済的でないのと同時に人々が都市に求める財やサービスは極めて多様であり，そのすべてをどの都市もが備えることは出来ないからである。

ところで，この都市機能の分布，あるいは諸都市の階層的構造を理論的に分析するものとして中心地理論がある。中心地理論は，ほとんどの商品が何らかの市場センターで販売され，各市場センターはその商品の性質に応じて異なる大きさの市場圏をもつという事実から出発する。商品によって市場圏の大きさが異なるのは，消費者が最小の費用で商品を購入しようとするからである。したがって，消費者は頻繁に必要とする商品を得るためには近距離しか交通しようとしないであろうが，逆に購買頻度のより少ない商品の場合にはより遠距離の交通を行うことをいとわないであろう。

こうして，ある市場センターでは，もっぱら近距離を交通する消費者を吸引するが，他の市場センターは，より広い地域に対してより多様な商品を販売・供給することになる。このようなさまざまな市場圏の中心に位置し，市場センターとして機能する性質をその市場の中心性と呼び，この市場センターの立地点が中心地と呼ばれるのである。

このように，中心地という概念で都市をとらえ，中心地理論をうち立てたのは，W.Christaller である。彼は，［２］において都市に大小がある理由，その分布を支配している原理，さらに経済活動から見た都市の最適な空間的パターンを明らかにしようとして，諸都市がもつ財やサービスの供給という機能に注目した。そして，この機能を有する都市を中心地と名づけた。また，Losch.A.は，［６］において，都市を生産の立地ないし集積地としてとらえることによって空間経済学の立場から中心地理論を提唱した。

これらの中心地理論は，さまざまな階層的都市規模モデル，すなわち，中心地モデルに

対する概念的フレームワークを準備してきた。たとえば，Beckmann, M.J.and Mcpherson, J.C.［1］，Parr,J.B［9］，Mulligan, G.F.［7］，［8］等は，これらの中心地理論を基礎にして中心地モデルを構成している。

本稿の目的は，Mulligan,G.F.［8］に従い，クリスタラー型の中心地システムの各階層レベルで用いられる労働と資本の均衡量を決定することである。労働に関する均衡解は，各階層レベルの中心地の雇用量（＝中心地人口）を示している。ムリガンは，中心地システムの各階層で中心地とその市場地域を分けて財の総需要量を算定し，総供給量との均衡から労働の均衡量を求めて各階層の中心地の雇用量（＝中心地人口）を決定しているが，その際，市場価格を一定にして労働の均衡量を求めているので，完全な意味での均衡解とはなっていない。そこで，本稿では，コブ＝ダグラス型の生産関数と効用関数を用いて供給関数と需要関数を導出し，そのうえで，市場均衡から求められる均衡価格を用いて労働の均衡量を求めて各階層の中心地の雇用量（＝中心地人口）を決定する。

本稿の構成は，次のとおりである。まず第2章では，中心地モデルの基本的概念について述べる。２－１では，中心地モデルの定義について，２－２では，モデルを構成する際に前提となる条件について，２－３では，モデルを構成する際に用いられる用語と表記法についてそれぞれ説明する。次に第3章では，モデルの構成と分析について述べる。そこで，３－１では，各中心地の財の供給側について考察し，その供給関数を導出する。３－２では，各中心地の財の需要側について考察し，個人の需要関数を導出し，さらに，３－３で市場の需要関数を導く。そして，第4章では，各中心地において供給関数と需要関数から市場均衡解を求め，各階層の中心地の雇用量（＝中心地人口）を決定する。

2，中心地モデルの基本概念

2－1　中心地モデルの定義

中心地理論は，中心地の規模と数，それにそれらの空間的分布を説明する理論である。そして，それを基礎として構成される中心地モデルは，基本的には市場地域の立地モデルである。この立地モデルにおいては，まず大きな前提として，一方に財およびサービスを需要する消費者が存在し，他方にこれを供給する企業が存在することがあげられる。両者は，効用・利潤の最大化という最適行動をとることによって自らの目的を果たそうとしており，その過程で何らかの状況に適応するシステムが形成されると予想される。

通常の経済理論の場合，需要と供給の量的関係から均衡価格が決定され，消費者と企業はこれに従って行動する。このとき，消費者は単一市場の構成員であるため，価格に対するその反応はすべて等しく，そこに空間的システムが形成される余地はなんら存在しない。なぜなら，そこでは前提条件に空間に関する条件が欠如しているからである。したがって，中心地モデルを構成する場合には，この空間に関する条件を考慮に入れなければならない。

そこで，まず，中心地モデルを構成する際に必要となるいくつかの基本的概念を定義する。

1）市場中心地

財およびサービスを必要とする消費者に対して，それらを供給する企業が立地する場所。

2）市場地域（補完地域）

市場中心地に立地する企業が，実際に財およびサービスを供給する範囲。

3）中心地が供給する財およびサービスの集合のレベル（階層）。

財およびサービスあるいは，それらを供給する中心地の相対的な重要性を示す一般的な指標。中心地が供給する財およびサービスの集合のレベルは，その到達範囲の大きさで規定され，同様に，中心地のレベルは，そこから供給される財およびサービスの集合のレベルによって規定される。レベルの表示法ならびに序列については後述する。

2－2　モデルの構成のための条件

つぎに，中心地モデルを構成する場合に前提とされるいくつかの条件を示しておく。

1）財の取引が行われる無限の空間（平野）が存在する。

2）財の取引活動は，空間内部のどこでも同じようになされる。

3）空間内部における移動は，すべての方向について均一の費用でなされる。

4）移動を支える交通手段は1種類であり，すべて均等に分布する。

5）移動に伴う交通費は，距離に比例する。

6）消費者は，空間内部に均等に分布している。

7）市場の条件（財の価格や質，市場の位置など）について完全な情報をもっている。

8）消費者と企業は，ともに合理的な行動（効用最大化や利潤最大化）を行う。

9）すべての消費者は，距離抵抗が出来るだけ少なくて済むような意思決定を行う。ここで，距離抵抗とは，財の入手のための移動にかかる費用の総計のことである。

10）財は，固有の価格をもち，この価格はどの中心地においても均一である。

11）所与の財の質は，空間の内部ではすべて均一である。

12）空間の内部においては，いかなる消費者もかならず財の供給を受ける。

2－3　用語と表記法

最後に本稿で用いられる用語と表記法を次のように定義する。

M：階層レベルの総数（M は正の整数）

m：中心地システム内の階層レベル。

$\{G_m\}$：第 m 番目の階層レベルとして分類される財の集合。すなわち，所与の期間（たとえば1年間）に第 m 次中心地が供給する財のうち第1次中心地から第 m－1 次中心地が供給する財を除いた財の集合。

x_{mi}：$\{G_i\}$ を供給する第 m 次中心地で所与の期間（例えば1年間）に使用される労働量（人口）。（$1 \leqq i \leqq m$，i，m は整数）

y_{mi}：$\{G_i\}$ を供給する第 m 次中心地で所与の期間（例えば1年間）に使用される資本量。

（$1 \leqq i \leqq m$，i，m は整数）

w_{mi}：$\{G_i\}$ を供給する第 m 次中心地で使用される労働の賃金率。

r_{mi}：$\{G_i\}$ を供給する第 m 次中心地で使用される資本の利子率。

p_i：第 m 次中心地（$m \geqq i$）における 1 単位の $\{G_i\}$ の工場価格。

s：消費者が移動する距離。

t_i：1 単位の $\{G_i\}$ を購入するために移動する消費者についての移動費用。

p_i^d：1 単位の $\{G_i\}$ についての消費者に対する引渡し価格。

$$p_i^d = p_i + t_i s$$

q_i：消費者が所与の期間に購入する $\{G_i\}$ の量。

Y_r：市場地域（農村）の消費者の所得。

Y_{mi}：第 m 次中心地において，$\{G_i\}$ を供給する労働者（中心地に居住している消費者）の所得。

Y_m：第 m 次中心地の消費者の総所得。

$$Y_m = \sum_{i=1}^{m} Y_{mi} x_{mi}$$

R：第 1 次中心地から，その市場地域の境界までの距離の最小値。

3，モデルの構成と分析

3－1　供給関数

はじめに次のような仮定をおく。

1）各中心地における各財の生産関数は，コブーダグラス型である。

2）すべての生産要素と生産物の市場は完全競争市場であり，企業は利潤最大化を目標に行動している。

各第 1 次中心地において供給される第 1 次財の集合 $\{G_1\}$ についての生産関数は，

$$Q_{11}^S = b_{11} x_{11}^{\alpha_{11}} y_{11}^{\beta_{11}} \tag{1}$$

で示される。ここで，関数 Q_{11}^S は，2 回微分可能な連続関数であり，は規模パラメーター，x_{11} は労働投入量，y_{11} は資本投入量である。また，指数 α_{11}，β_{11} は，各々 $0<\alpha_{11}<1$, $0<\beta_{11}<1$，$\alpha_{11}+\beta_{11}<1$ をみたす定数とする。

費用は，次のように定式化できる。

$$C_{11} = w_{11} x_{11} + r_1 y_{11} \tag{2}$$

ただし，w_{11} は賃金率，r_1 は利子率である。したがって，利潤 π は，

$$\begin{aligned} \pi &= p_{11} Q_{11}^S - C_{11} \\ &= p_{11} b_{11} x_{11}^{\alpha_{11}} y_{11}^{\beta_{11}} - (w_{11} x_{11} + r_1 y_{11}) \end{aligned} \tag{3}$$

利潤最大化の 1 階の条件より，次のような関係が成り立つ。

$$\alpha_{11} p_{11} b_{11} x_{11}^{\alpha_{11}-1} y_{11}^{\beta_{11}} = w_{11} \tag{4}$$

$$\beta_{11} p_{11} b_{11} x_{11}^{\alpha_{11}} y_{11}^{\beta_{11}-1} = r_1 \tag{5}$$

（4），（5）から，労働投入量 x_{11} と資本投入量 y_{11} は次のようになる。

$$x_{11}=\left(\frac{\alpha_{11}^{\beta_{11}-1}r_1^{\beta_{11}}w_{11}^{1-\beta_{11}}}{p_{11}b_{11}\beta_{11}^{\beta_{11}}}\right)^{\frac{1}{\alpha_{11}+\beta_{11}-1}} \tag{6}$$

$$y_{11}=\left(\frac{\beta_{11}^{\alpha_{11}-1}w_{11}^{\alpha_{11}}r_1^{1-\alpha_{11}}}{p_{11}b_{11}\alpha_{11}^{\alpha_{11}}}\right)^{\frac{1}{\alpha_{11}+\beta_{11}-1}} \tag{7}$$

（6），（7）を（1）を代入すると次のような供給関数が求められる。

$$Q_{11}^{S}=\alpha_{11}^{\frac{\alpha_{11}\beta_{11}-\alpha_{11}-\beta_{11}}{\alpha_{11}+\beta_{11}-1}}\cdot r_1^{\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{11}+\beta_{11}-1}}\cdot w_{11}^{\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{11}+\beta_{11}-1}}\cdot \beta_{11}^{\frac{\alpha_{11}\beta_{11}-\beta_{11}-\alpha_{11}}{\alpha_{11}+\beta_{11}-1}}\cdot$$

$$p_{11}^{\frac{-\alpha_{11}-\beta_{11}}{\alpha_{11}+\beta_{11}-1}}\cdot b_{11}^{\frac{-1}{\alpha_{11}+\beta_{11}-1}} \tag{8}$$

第２次中心地は，第２次財の集合｛G_2｝と同時に第１次財の集合｛G_1｝をも供給する。したがって，第２次中心地における第１次財の集合｛G_1｝と第２次財｛G_2｝についての生産関数は，

$$Q_{21}^{S}=b_{21}x_{21}^{\alpha_{21}}y_{21}^{\beta_{21}} \tag{9}$$

$$Q_{22}^{S}=b_{22}x_{22}^{\alpha_{22}}y_{22}^{\beta_{22}} \tag{10}$$

で示される。ここで，関数 Q_{21}^{S}，Q_{22}^{S} はともに２回微分可能な連続関数であり，b_{21}, b_{22} は規模パラメータ，x_{21}, x_{22} は労働投入量，y_{21}, y_{22} は資本投入量である。また，指数 α_{21}，α_{22}，β_{21}，β_{22} は，それぞれ $0<\alpha_{21}<1$, $0<\alpha_{22}<1$, $0<\beta_{21}<1$, $0<\beta_{22}<1$, $\alpha_{21}+\beta_{21}<1$, $\alpha_{22}+\beta_{22}<1$ をみたす定数とする。

第２次中心地における第１次財生産企業と第１次財生産企業の利潤最大化の１階の条件から，次のような関係が成り立つ。

$$\alpha_{21}p_{21}b_{21}x_{21}^{\alpha_{21}-1}y_{21}^{\beta_{21}}=w_{21} \tag{11}$$

$$\beta_{21}p_{21}b_{21}x_{21}^{\alpha_{21}-1}y_{21}^{\beta_{21}-1}=r_2 \tag{12}$$

$$\alpha_{22}p_{22}b_{22}x_{22}^{\alpha_{22}-1}y_{22}^{\beta_{22}}=w_{22} \tag{13}$$

$$\beta_{22}p_{22}b_{22}x_{22}^{\alpha_{22}-1}y_{22}^{\beta_{22}-1}=r_2 \tag{14}$$

（11），（12）から，労働投入量 x_{21} と資本投入量 y_{21} は次のようになる。

$$x_{21}=\left(\frac{\alpha_{21}^{\beta_{21}-1}w_{21}^{\beta_{21}}r_2^{1-\beta_{21}}}{p_{21}b_{21}\beta_{21}^{\beta_{21}}}\right)^{\frac{1}{\alpha_{21}+\beta_{21}-1}} \tag{15}$$

$$y_{21}=\left(\frac{\beta_{21}^{\alpha_{21}-1}w_{21}^{\alpha_{21}}r_1^{1-\alpha_{21}}}{p_{21}b_{21}\alpha_{21}^{\alpha_{21}}}\right)^{\frac{1}{\alpha_{21}+\beta_{21}-1}} \tag{16}$$

(15), (16) を (9) を代入すると次のような供給関数が求められる。

$$Q_{21}^{S}=\alpha_{21}{}^{\frac{\alpha_{21}\beta_{21}-\alpha_{21}-\beta_{21}}{\alpha_{21}+\beta_{21}-1}}\cdot r_2{}^{\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{21}+\beta_{21}-1}}\cdot w_{21}{}^{\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{21}+\beta_{21}-1}}\cdot \beta_{21}{}^{\frac{\alpha_{21}\beta_{21}-\beta_{21}-\alpha_{21}}{\alpha_{21}+\beta_{21}-1}}\cdot$$

$$p_{21}{}^{\frac{-\alpha_{21}-\beta_{21}}{\alpha_{21}+\beta_{21}-1}}\cdot b_{21}{}^{\frac{-1}{\alpha_{22}+\beta_{22}-1}} \tag{17}$$

また, (13), (14) から, 労働投入量 x_{22} と資本投入量 y_{22} は次のようになる。

$$x_{22}=\left(\frac{\alpha_{22}^{\beta_{22}-1}w_{22}^{\beta_{22}}r_2^{1-\beta_{22}}}{p_{22}b_{22}\beta_{22}^{\beta_{22}}}\right)^{\frac{1}{\alpha_{22}+\beta_{22}-1}} \tag{18}$$

$$y_{22}=\left(\frac{\beta_{22}^{\alpha_{22}-1}w_{22}^{\alpha_{22}}r_2^{1-\alpha_{22}}}{p_{22}b_{22}\alpha_{22}^{\alpha_{22}}}\right)^{\frac{1}{\alpha_{22}+\beta_{22}-1}} \tag{19}$$

(18), (19) を (10) に代入すると次のような供給関数が求められる。

$$Q_{21}^{S}=\alpha_{22}{}^{\frac{\alpha_{22}\beta_{22}-\alpha_{22}-\beta_{22}}{\alpha_{22}+\beta_{22}-1}}\cdot r_2{}^{\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{22}+\beta_{22}-1}}\cdot w_{22}{}^{\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{22}+\beta_{22}-1}}\cdot \beta_{22}{}^{\frac{\alpha_{22}\beta_{22}-\beta_{22}-\alpha_{22}}{\alpha_{22}+\beta_{22}-1}}\cdot$$

$$p_{22}{}^{\frac{-\alpha_{22}-\beta_{22}}{\alpha_{22}+\beta_{22}-1}}\cdot b_{22}{}^{\frac{-1}{\alpha_{22}+\beta_{22}-1}} \tag{20}$$

第 m 次中心地 ($1\leqq m\leqq M$, m, M は整数) は, 第 m 次財の集合 $\{G_m\}$ と同時に第 1 次財の集合 $\{G_1\}$ から第 m−1 次財の集合 $\{G_{m-1}\}$ までの財の集合をも供給する。したがって, 第 m 次中心地における各財の集合 $\{G_1\}$, $\{G_2\}$, ・・・, $\{G_i\}$, ・・・$\{G_m\}$ ($1\leqq i\leqq m$, i, m は整数) についての生産関数は,

$$Q_{mi}^{S}=b_{mi}x_{mi}{}^{\alpha_{mi}}y_{mi}{}^{\beta_{mi}} \qquad (1\leqq i\leqq m,\ i,\ m は整数) \tag{21}$$

で示される。ここで, Q_{mi}^{S} は 2 回微分可能な連続関数であり, b_{mi} は規模パラメーター, x_{mi} は労働投入量, y_{mi} は資本投入量である。また, 指数 α_{mi}, β_{mi} は, 各々 $0<\alpha_{mi}<1$, $0<\beta_{mi}<1$, $\alpha_{mi}+\beta_{mi}<1$ をみたす定数とする。

第 m 次中心地における第 1 次財生産企業から第 m 次財生産企業までの利潤最大化の 1 階の条件から, 次のような 2×m 個の方程式が得られる。

$$\alpha_{mi}p_{mi}b_{mi}x_{mi}^{\alpha_{mi}-1}y^{\beta_{mi}}=w_{mi} \tag{22}$$

$$\beta_{mi}p_{mi}b_{mi}x_{mi}^{\alpha_{mi}}y_{mi}^{\beta_{mi}-1}=r_m \tag{23}$$

(22), (23) から, 労働投入量 x_{mi} と資本投入量 y_{mi} は次のようになる。

$$x_{mi}=\left(\frac{\alpha_{mi}^{\beta_{mi}-1}w_{mi}^{\beta_{mi}}r_m^{1-\beta_{mi}}}{p_{mi}b_{mi}\beta_{mi}^{\beta_{mi}}}\right)^{\frac{1}{\alpha_{mi}+\beta_{mi}-1}} \tag{24}$$

$$y_{mi}=\left(\frac{\beta_{mi}^{\alpha_{mi}-1}w_{mi}^{\alpha_{mi}}r_m^{1-\alpha_{mi}}}{p_{mi}b_{mi}\alpha_{mi}^{\alpha_{mi}}}\right)^{\frac{1}{\alpha_{mi}+\beta_{mi}-1}} \tag{25}$$

（24），（25）を（21）を代入すると次のような供給関数が求められる。

$$Q_{mi}^{S}=\alpha_{mi}^{\frac{\alpha_{mi}\beta_{mi}-\alpha_{mi}-\beta_{mi}}{\alpha_{mi}+\beta_{mi}-1}}\cdot r_m^{\frac{\alpha_{mi}}{\alpha_{mi}+\beta_{mi}-1}}\cdot w_{mi}^{\frac{\alpha_{mi}}{\alpha_{mi}+\beta_{mi}-1}}\cdot$$

$$\beta_{mi}^{\frac{\alpha_{mi}\beta_{mi}-\beta_{mi}-\alpha_{mi}}{\alpha_{mi}+\beta_{mi}-1}}\cdot p_{mi}^{\frac{-\alpha_{mi}-\beta_{mi}}{\alpha_{mi}+\beta_{mi}-1}},\quad b_{mi}^{\frac{-1}{\alpha_{mi}+\beta_{mi}-1}} \tag{26}$$

3－2　個人の需要関数

はじめに，仮定を次のようにおく。

1）各消費者は合理的な行動（効用最大化行動）をとる。

2）各消費者は，市場の条件（財の価格や質，市場の位置など）について完全な情報を保持している。

3）各消費者は，同一の効用関数を保持している。

4）各消費者は，1単位の第i次財の集合 $\{G_i\}$（$1\leqq i\leqq m$，i,m は整数）を距離sだけ輸送するために均一価格 $t_i s$ を支払う。このとき，t_i は，単位距離あたりの輸送費である。

5）第i次財の集合 $\{G_i\}$ の出荷価格は，全中心地システムにわたって均一である。

6）単位距離あたり輸送費 t_i は，すべての方向において同一である。

7）多目的消費行動は，現在不可能であるとする。

各消費者は，最も低い引渡し価格で第1次財の集合 $\{G_1\}$ から第m次財の集合 $\{G_m\}$ までの財の集合 $\{G_1\}$，$\{G_2\}$，・・・，$\{G_m\}$ を供給する第m次中心地（$1\leqq m\leqq M$，m，M は整数）をもっぱら選好する。なぜなら，仮定1）から仮定4）より各消費者は第i次財の集合 $\{G_i\}$ をもっとも近い第i次中心地でもっぱら購入するからである。第m次中心地から距離sだけ離れて居住している消費者にとっては，第i次財の集合 $\{G_i\}$ の引渡し価格は，

$$p_i^d=p_i+t_i s \qquad (1\leqq i\leqq m\leqq M \quad i,m,M\text{ は整数}) \tag{27}$$

である。

各消費者の効用関数は，次のような形である。

$$U=U(q_1,q_2,\cdots,q_M)=\Pi\, q_i^{\phi_i}. \tag{28}$$

ここで，q_i は所与の期間（例えば1年間）における第i次財の集合 $\{G_i\}$ の消費量である。また，ϕ_i は定数とする。各期間における各消費者についての予算制約は，

$$Y-\sum_{i=1}^{M}p_i^d q_i=0 \tag{29}$$

で示される。ここで，Yは各消費者の所得である。

関数（28）と（29）から，次のようなラグランジュ方程式を考える。

$$V=\prod_{i=1}^{M} q_i^{\Psi_i}+\lambda(Y-\sum_{i=1}^{M} p_i^d q_i) \tag{30}$$

ここで，λはラグランジュ乗数である。

(30) を変数 $q_1, q_2, \cdot\cdot\cdot, q_M, \lambda$に関して偏微分し，それらをゼロに等しくおくと

$$\frac{\partial V}{\partial q_i}=\frac{\psi_i u}{q_i}-\lambda p_i^d=0 \tag{31}$$

(1 ≦i≦m≦M,i,m,M は整数)

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda_i}=Y-\sum_{i=1}^{M} p_i^d q_i=0 \tag{32}$$

その結果，第 i 次財の集合 $\{G_i\}$ についての個人の需要関数は，

$$q_i=\frac{\psi_i Y}{\psi p_i^d} \tag{33}$$

となる。このとき，

$$\Psi=\sum_{i=1}^{M} \Psi_i \tag{34}$$

である。各財の需要量は，比率$\frac{\Psi_i}{\Psi}$，所得 Y，価格 p_i^d の関数である。

3－3　市場の需要関数

はじめに，市場地域の形状として可能なものを明らかにする。このとき，円形の市場地域は，必然的に財の未供給地域を残すために除外される。空間を同一形状の市場地域で完全に包含できる形状としては正三角形，正四角形，正六角形がある。本稿では，その中で，正四角形の市場地域について考察することにし，その場合，クリスタラーの供給原理[注1)]にもとづき，K=2 システム[注2)]を採用することにする。

つぎに，個人の需要関数を用いて，市場地域の総需要を求める。[注3)] 第 1 次中心地のサイズ R の正四角形市場地域における第 1 次財の総需要Q_{11}^Dは，

$$Q_{22}^D=2\cdot 4\cdot A\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{R}{\cos\theta}}\left\{\frac{\Psi_1 Y_r}{\Psi(p_1+t_1 s)}\right\}dsd\theta$$
$$=\frac{8A\psi_1 Y_r}{\psi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\frac{Rt_1}{p_1\cos\theta})dsd\theta \tag{35}$$

で示される。ただし，A は，市場地域内の各点の人口密度，θは中心地と市場地域の境界線上で最も中心地に近い点を結ぶ線がその点にもっとも近い角と中心を結ぶ線と中心で作る角度である。また，R は第 1 次中心地からその市場地域の境界までの距離の最小値，Y は市

場地域内の消費者の所得である。

第２次中心地は，サイズＲの市場地域に第１次財を供給し，サイズ$\sqrt{2}$Ｒの市場地域に第２次財を供給する。サイズＲの市場地域における第１次財の総需要Q_{21}^{D}は，(35) 式のQ_{11}^{D}と一致している。サイズ$\sqrt{2}$Ｒの市場地域における第２次財の総需要Q_{22}^{D}は，

$$Q_{22}^{D}=2\cdot 4\cdot A\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}R}{\cos\theta}}\left\{\frac{\Psi_2 Y_r}{\Psi(p_2+t_2 s)}\right\}dsd\theta \tag{36}$$

$$=\frac{8A\psi_1 Y_r}{\Psi}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\frac{\sqrt{2}Rt_2}{p_2\cos\theta})d\theta$$

で示される。

第ｍ次中心地（$2\leqq m\leqq M$　m，Ｍは整数）は，第ｉ次中心地（$1\leqq i\leqq m$　i,m は整数）の立場で，第ｉ次財の集合$\{G_i\}$を供給する。したがって，第ｍ次中心地は，ｍ個の市場地域と第ｍ次中心地内に$\{G_1\}$，$\{G_2\}$，・・・$\{G_m\}$ を供給するので，第ｍ次中心地の市場地域における第ｉ次財の総需要$Q_{mi}{}^{D}$は，

$$Q_{mi}^{D}=2\cdot 4\cdot A\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}^{i-1}R}{\cos\theta}}\left\{\frac{\Psi_i Y_r}{\Psi(p_i+t_i s)}\right\}dsd\theta$$

$$=\frac{8A\psi_1 Y_r}{\Psi}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\frac{\sqrt{2}^{i-1}Rt_i}{p_i\cos\theta})d\theta \tag{37}$$

で示される。

４，市場均衡と中心地人口の導出

第１次中心地における第１次財の供給関数Q_{11}^{S}は（８）式であり，需要関数Q_{11}^{D}は（35）式であることより，第 1 次財についての均衡価格p_{11}^{*}は，$Q_{11}^{S}=Q_{11}^{D}$より次式から求められる。ただし，r_1とw_{11}は第１次中心地の生産要素市場である水準に決定されているとする。

$$\alpha_{11}^{\frac{\alpha_{11}\beta_{11}-\alpha_{11}-\beta_{11}}{\alpha_{11}+\beta_{11}-1}}\cdot Y_1^{\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{11}+\beta_{11}-1}}\cdot w_{11}^{\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{11}+\beta_{11}-1}}\cdot \beta_{11}^{\frac{\alpha_{11}\beta_{11}-\beta_{11}-\alpha_{11}}{\alpha_{11}+\beta_{11}-1}}\cdot p_{11}^{\frac{-\alpha_{11}-\beta_{11}}{\alpha_{11}+\beta_{11}-1}}\cdot b_{11}^{\frac{-1}{\alpha_{11}+\beta_{11}-1}}$$

$$=\frac{8A\psi_1 Y_r}{\Psi}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\frac{\sqrt{2}Rt_1}{p_{11}\cos\theta})d\theta \tag{38}$$

（38）で求められる均衡価格p_{11}^{*}を（６）式と（７）式に代入すると第１次中心地における均衡労働量x_{11}^{*}と均衡資本量y_{11}^{*}が決定される。したがって，この均衡労働量x_{11}^{*}が，第１次中心地の中心地人口（＝雇用労働量）となる。

次に，第２次中心地における第１次財の供給関数Q_{21}^{S}は（17）式であり，需要関数はQ_{21}^{D}は（35）式であることより，第 1 次財についての均衡価格p_{21}^{*}は，$Q_{21}^{S}=Q_{21}^{D}$より次式から求められる。ただし，r_2とw_{21}は第２次中心地の生産要素市場である水準に決定されている

とする。

$$\alpha_{21}^{\frac{\alpha_{21}\beta_{21}-\alpha_{21}-\beta_{21}}{\alpha_{21}+\beta_{21}-1}} \cdot Y_2^{\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{21}+\beta_{21}-1}} \cdot w_{21}^{\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{21}+\beta_{21}-1}} \cdot \beta_{21}^{\frac{\alpha_{21}\beta_{21}-\beta_{21}-\alpha_{21}}{\alpha_{21}+\beta_{21}-1}} \cdot$$

$$p_{21}^{\frac{-\alpha_{21}-\beta_{21}}{\alpha_{21}+\beta_{21}-1}} \cdot b_{21}^{\frac{-1}{\alpha_{21}+\beta_{21}-1}} = \frac{8A\Psi_2 Y_r}{\Psi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\frac{Rt_2}{p_{21}\cos\theta})d\theta \tag{39}$$

(39) で求められる均衡価格p_{21}^*を (15) 式と (16) 式に代入すると第2次中心地における第1次財の均衡労働量x_{21}^*と均衡資本量y_{21}^*が決定される。また，第2次中心地における第2次財の供給関数Q_{22}^Sは (20) 式であり，需要関数はQ_{22}^Dは (36) 式であることより，第2次財についての均衡価格p_{22}^*は，$Q_{22}^S=Q_{22}^D$より次式から求められる。ただし，r_2とw_{22}は第2次中心地の生産要素市場である水準に決定されているとする。

$$\alpha_{22}^{\frac{\alpha_{22}\beta_{22}-\alpha_{22}-\beta_{22}}{\alpha_{22}+\beta_{22}-1}} \cdot Y_2^{\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{22}+\beta_{22}-1}} \cdot w_{22}^{\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{22}+\beta_{22}-1}} \cdot \beta_{22}^{\frac{\alpha_{22}\beta_{22}-\beta_{22}-\alpha_{22}}{\alpha_{22}+\beta_{22}-1}} \cdot p_{22}^{\frac{-\alpha_{22}-\beta_{22}}{\alpha_{22}+\beta_{22}-1}} \cdot b_{22}^{\frac{-1}{\alpha_{22}+\beta_{22}-1}}$$

$$= \frac{8A\Psi_2 Y_r}{\Psi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\frac{\sqrt{2}Rt_2}{p_{22}\cos\theta})d\theta \tag{40}$$

(40) で求められる均衡価格p_{22}^*を (18) 式と (19) 式に代入すると第2次中心地における第2次財の均衡労働量x_{22}^*と均衡資本量y_{22}^*が決定される。したがって，第1次財についての均衡労働量x_{21}^*と第2次財についての均衡労働量x_{22}^*の和，

$$x_2 = x_{21}^* + x_{22}^* \tag{41}$$

が，第2次中心地の中心地人口（=雇用労働量）となる。

さらに，第m次中心地における第i次財の供給関数（$1 \leqq i \leqq m$，i，mは整数）Q_{mi}^Sは，(26) 式であり，需要関数はQ_{mi}^Dは (37) 式であることより，第i次財についての均衡価格p_{mi}^*は，$Q_{mi}^S=Q_{mi}^D$より次式から求められる。ただし，r_mとw_{mi}は第2次中心地の生産要素市場である水準に決定されているとする。

$$\alpha_{mi}^{\frac{\alpha_{mi}\beta_{mi}-\alpha_{mi}-\beta_{mi}}{\alpha_{mi}+\beta_{mi}-1}} \cdot Y_{mi}^{\frac{\alpha_{mi}}{\alpha_{mi}+\beta_{mi}-1}} \cdot w_{mi}^{\frac{\alpha_{mi}}{\alpha_{mi}+\beta_{mi}-1}} \cdot \beta_{mi}^{\frac{\alpha_{mi}\beta_{mi}-\beta_{mi}-\alpha_{mi}}{\alpha_{mi}+\beta_{mi}-1}} \cdot p_{mi}^{\frac{-\alpha_{mi}-\beta_{mi}}{\alpha_{mi}+\beta_{mi}-1}} \cdot b_{mi}^{\frac{-1}{\alpha_{mi}+\beta_{mi}-1}}$$

$$= \frac{8A\Psi_i Y_r}{\Psi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\frac{\sqrt{2}^{i-1}Rt_i}{p_{mi}\cos\theta})d\theta \tag{42}$$

(42) で求められる均衡価格p_{mi}^*を (24) 式と (25) 式に代入すると第m次中心地における第i次財の均衡労働量p_{mi}^*と均衡資本量y_{mi}^*が決定される。したがって，第m次中心地の中心地人口（労働雇用量）は，第i次財についての均衡労働量の総和，

$$x_m = x_{m1} + x_{m2} + \cdot\cdot\cdot + x_{mi} + \cdot\cdot\cdot + x_{mm} = \sum_{i=1}^{m} x_{mi} \tag{43}$$

となる。

5，おわりに

本稿においては，われわれはW.Christallarの提唱した中心地理論を援用し，各階層レベルの中心地で使用される労働量と資本量の均衡解を導き，各階層レベルの中心地人口（＝雇用労働量）を決定した。その結果，中心地がより高次であればあるほどその中心地人口（＝雇用労働量）もより大きくなるという通常予想される妥当な結論を得ることが出来た。なぜなら，クリスタラータイプの中心地システムであるK=2システムにおいては，中心地のレベルが１つ上昇するとその市場地域の面積が２倍になるため，その中心地では，より多くの人々により多くの財を供給することが要請され，そのためには，より多くの労働雇用量が必要とされるからである。

本稿では，各階層の中心地レベルでそれぞれ財の均衡価格を求め，それを用いて各階層レベルの中心地人口（＝雇用労働量）を導出した。しかしながら，現実には中心地体系全体で財の均衡価格は決定されるはずであり，それをもとに中心地人口（＝雇用労働量）を導出しなければならない。また，消費者の購買行動について，今回は，単一目的購買行動の場合のみを考察し，多目的購買行動については全く考慮しなかった。しかし，現実の社会生活において，消費者は，通常，多目的購買行動をとることが多く，単一目的購買行動の場合のみを考察した本稿の分析は，その点については不十分である。これらの点については，今後の課題として，モデルに組み込んでいきたい。

[注]

注１）　クリスタラーが，正六角形の中心地システムについて詳細に説明しているように，供給原理は出来るだけ少数の中心地によって，すべての中心的財があらゆる地域にくまなく供給されるように構成された中心地システム，すなわち，中心的財がもっとも合理的に供給されるように構成された中心地システムを支える原理である。

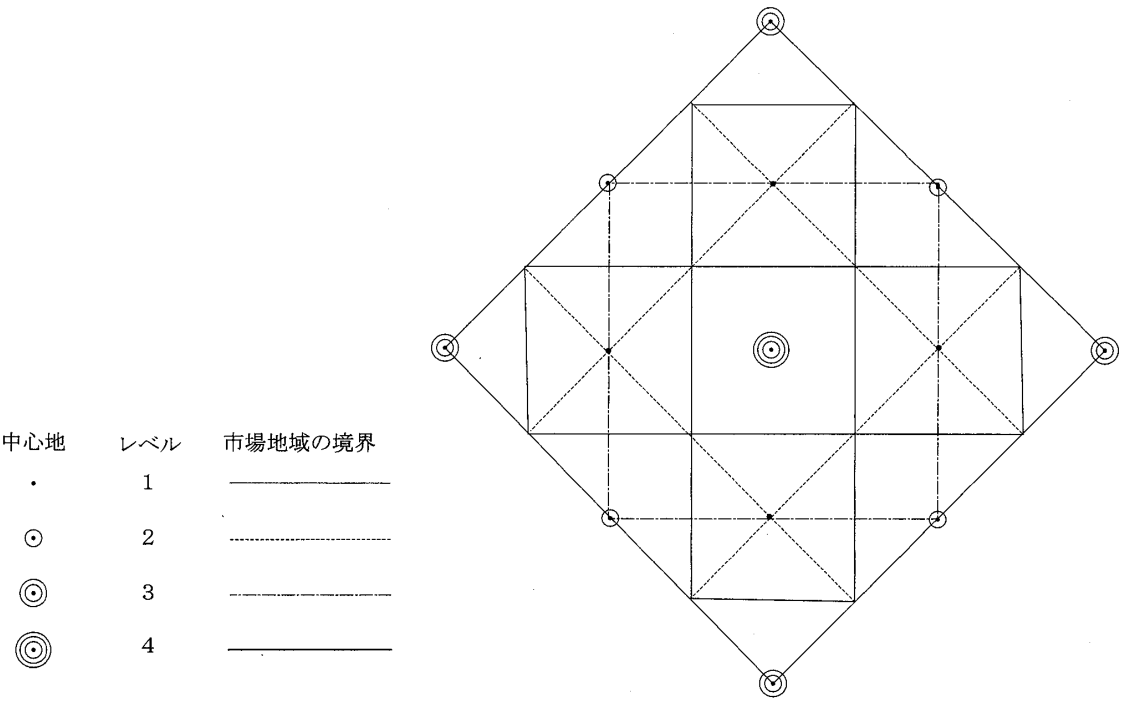
注２）　四角形市場モデルのうち，クリスタラータイプのシステムは，連続するレベル間の市場地域の面積比が一定であるという特徴をもつ。この比率をKとすると，K=2システムにおいては，一般に，レベル i＋１の市場地域の境界線が交差する点の上にレベル i の中心地が位置する（第１図参照)。交差する点の数は常に４でその上に位置するレベル i の中心地は，最近隣にある４つの上位中心地によって分割支配される。このため，レベル i＋１の中心地が支配するレベル i の中心地の個数は，$\frac{1}{4}\times 4=1$ である。また，レベル i＋１の市場地域の中に含まれるレベル i の市場地域の個数は，その中に完全に含まれる１個分に，さらに，$\frac{1}{4}$ の４個分を加えたもの，すなわち，$1+\frac{1}{4}\times 4=2$ である。したがって，K=2システムにおいては，i レベルの市場地域の面積を i＋１レベルの市場地域の面積の比率が１：２となっている。K=2システムでは，レベル i＋１の中心地がレベル i の中心地とその市場地域をまるごと完全

にその支配下におくことが出来ないということから，このシステムは，供給原理にもとづいている事になる。

注3） 任意の正多角形のサイズ R の市場地域における総需要 Q^D は，市場地域内の各消費者の個人の需要関数を qi とすると，次の式で示される。

$$Q^D = 2 \cdot p \cdot \int_0^{\frac{\pi}{\rho}} \int_0^{\frac{R}{\cos\theta}} q_i \, ds \, d\theta$$

ただし，ρ は正多角形の辺の数，A は市場地域内の各点の人口密度，θ は中心地とその市場地域の境界線上でもっとも中心に近い点を結ぶ線がその点にもっとも近い角と中心を結ぶ線分と中心で作る角度である。また，R は中心地からその市場地域の境界線上で最も中心に近い点までの距離である。



第1図　四角形市場地域の中心地システム（K＝2）

［参考文献］

［1］ Beckmann.M.J.andMcPherson,J.C.,"City Size Distribution in A Central Place Hierarchy:An Alternative Approach," *Journal of Regional Science*, vol10, 1970. pp25-33.

［2］ Christaller,W.,*Die Zentalen Orte in Suddeutschland*,Fischer,1933.;江沢譲爾訳『都市の立地と発展』大明堂，１９７１年.

［3］ 林　上『中心地理論研究』大明堂，１９８７年.

［4］ 石川利治「市場地域の形状分析」『中央大学経済学論集』第２２巻第６号，１９８１年６月,pp1-16.

[５] 石川利治「中心地理論の経済学的視点からの１つの拡張－利潤最大化原理に基づく中心地体系－」『中央大学経済学論集』第４０巻第３・４合併号，２０００年３月,pp245-258.

[６] Losch,A.,The Economics of Location,Yale University Press,1954.;篠原泰三訳『レッシュ経済立地論』大明堂，１９６８年.

[７] Mulligan,G.F.,"Production Functions,Export Base Multipliers,and Urbanization Ratios in City systems",*Papers of Regional Science Association*, vol.48, 1981, pp77-88.

[８] Mulligan,G.F.,"Central Place Populations;A Microeconomic Consideration", *Journal of Regional Science*, vol23, 1983, pp.83-92.

[９] Parr,J.B.,"Models of the Central Place System:A More General Approach", *Urban Studies*, vol.15, 1978, pp.35-49.

[10] Wang.F"Modeling a central place system with interurban transport costs and complex rural hinterlands"*Regional Science and Urban Economics*, vol29, 1999, pp381-409.