Dixit and Nalebuff(1991)の三者決闘ゲームに関する考察：数値例を中心に[1]

王　鏡凱[2]・江　駿[3]

1．はじめに

本研究は Dixit and Nalebuff (1991) の三者決闘ゲームについて考察するものである．先行研究に対して本研究は主に２つの特徴がある．

１つ目は解き方である．Dixit and Nalebuff (1991)では先読み手法を用いて２段階ゲームを解いたが，本研究ではより複雑な状況にも対応できるバックワード・インダクションの手法を用いた．Dixit and Nalebuff (1991)の先読み推論法と違い，本研究ではバックワード・インダクションの方法により，各サブゲームにおける各プレイヤーの行動が詳細に考察することができ，ゲームの構造をより深く理解することができるメリットがある．

バックワード・インダクションによる考察の結果，Dixit and Nalebuff (1991)の三者決闘ゲームの重要な性質は第２段階ゲームの特徴により得られたものであることが分かる．第２段階のゲームでは，自分にとって最も脅威である相手を先延ばしてはいけないというプレッシャーを各プレイヤーに与えている．このことにより，各プレイヤーは第１段階のゲームでは最適な行動を選択することになっている．

２つ目はサブゲームを用いることにより，２段階ゲームの構造を持つ三者決闘ゲームの特徴を維持したまま，１人による意思決定の問題に変換したことである．この変換によって三者決闘ゲームの応用がより幅広くより活用しやすくなったと考えられる．サブゲームを用いることによって，３プレイヤーによる２段階ゲームの複雑な分析手続きを大幅に省くができ，１人による意思決定とみることができる．それにより，最初のプレイヤーが意思決定するとき，２段階ゲームの先読み推論とバックワード・インダクション推論をしなくて済む．最初のプレイヤーは各サブゲームについてどのような混合戦略を選択すればよいのか，だけを考えれば十分である．

本研究の構成は以下の通りである．まず第２節では Dixit and Nalebuff (1991) の三者決闘ゲームについて説明する．そして，第３節では Dixit and Nalebuff (1991) に基づき先読み手法による解き方を説明する．第４節ではバックワード・インダクションの方法による考察を行い，最後に全体をまとめる．

1　本論文はH28年度鹿児島大学学長裁量経費「若手・女性研究者研究支援事業」による成果の一部である．
2　本論文についての責任は，すべて第一著者である王鏡凱に帰する．
E-mail: kyogaiw@leh.kagoshima-u.ac.jp
3　鹿児島大学大学院

2．Dixit and Nalebuff（1991）の三者決闘ゲームについて

ここでは Dixit and Nalebuff (1991，p.292)に基づき三者決闘ゲームについて説明する．プレイヤーは３人，ラリー・モー・カリー(ここでは A・B・C と呼ぶ)が２ラウンド制の逐次ゲームとして，A→B→C の順に１発ずつ撃つことになっている．

各プレイヤーの戦略は２つしかなく，相手を撃つかまたはわざと外すかである．相手を撃つと決めた場合，３人の命中率はそれぞれ{ A : B : C = 30% : 80% : 100% }となっている．

各プレイヤーにとっての最善の結果は，自分だけが生き残ることである．次によいのは２人が生き残り，そのうちの１人になることである．３番目によいのは３人全員が生き残ることである．最悪なのは自分だけが殺されることである．

以上のルールの下でプレイヤー A の生存確率を最大にする最適戦略とは何かについて求める問題である．

3．先読み手法による解き方：Dixit and Nalebuff（1991，p.292を参照）

ここでは先読み手法で A の選択肢を個々に検討する．もし A が B を狙い命中させたら，その次は A 自身がやられてしまう．なぜなら次は C の番になり，彼は A を確実に撃ち当て最善の結果に至る．だから A にとって B を狙うのはいい選択肢ではない．

次にもし A が C を狙い命中させたら次は B の番となり，B は A を狙うことになる．そうなると，A 自身の生き残れる確率は20%以下となる．だからこれもあまり魅力のある選択肢ではない．

A の最適行動は第１ラウンドではわざと空に向けて撃つことで外す，そして第２ラウンドでは B か C の生き残ったほうを狙うことである．第１ラウンドで A がわざと外した場合，B は C を狙い，もし失敗しても C が B を撃ち当てる．第２ラウンドに入り，再び A の番となる．A は B か C の生き残ったほうを狙えば，30%以上の確率で A は唯一の生き残りとなる．

三者決闘ゲームから得られる教訓としては，小物(A)がスターになるには最初のチャンスは見送ったほうがよい場合がある．ライバルが多数いるときは，トップを走っている者は２番手以降から集中攻撃を受け，潰されることがある．こういう状況では，実力者(B と C)が互いに潰し合うまでは小物(A)が後方に控えておくほうが得である．

4．バックワード・インダクションによる解き方

4.1．第２段階のゲーム

まずは第２段階について考える．C の命中率は100%であることに注目して，第１段階において生き残ったプレイヤーは{A・B}ペアかまたは{A・C}ペアのはずである[4]．プレイヤーが２人の場合は，わざと外すことは最適戦略ではなく，互いに順番に１発ずつ撃つことは最適戦略である．

そして，この第２段階のゲームの結果は各プレイヤーの命中率によって一意的に決まる．生き残ったプレイヤーは{A・B}ペアの場合は考えられる結果は以下の３つである．

結果①：30%の確率(A→B)で A だけ生き残り，そしてゲーム終了；
結果②：70%×80%の確率(A→B→A)で B だけ生き残り，そしてゲーム終了；
結果③：70%×20%の確率(A→B→A)で A・B ともに生き残り，そしてゲーム終了．

また，生き残ったプレイヤーは{A・C}ペアの場合は考えられる結果は以下の２つである．

結果④：30%の確率(A→C)で A だけ生き残り，そしてゲーム終了；
結果⑤：70%の確率(A→C→A)で C だけ生き残り，そしてゲーム終了．

第２段階のゲームに参加するプレイヤーは{A・B}ペアかまたは{A・C}ペアであることから，第１段階のゲームにおいて A の生存確率は100%であることが分かる．このことについては第１段階のゲームを考察する際に詳細に述べる．

4.2. 第１段階のゲーム

4.2.1. C の行動について

バックワード・インダクションにしたがって，第１段階のゲームについて考察する．まずは A→B→C の順で C について考える．第１段階のゲームにおいて A→B→C の順で A→B がそれぞれ一発を撃ち，誰に向けて発砲したのか結果はともかく，C が撃たれて退場すればそれまでのことである．もし C が生き残っていれば，考えられるすべての結果は，⑥{A・C}が生き残っているケース，⑦{B・C}が生き残っているケース，⑧{A・B ・C}全員が生き残っているケース，の３通りである．

結果⑥：もし{A・C}が生き残っており，かつ今は C の出番とすれば，100%の確率(C→A)で C だけ生き残り，そしてゲーム終了；
結果⑦：もし{B・C}が生き残っており，かつ今は C の出番とすれば，100%の確率(C→B)で C だけ生き残り，そしてゲーム終了；
結果⑧：もし{A・B・C}全員が生き残っており，かつ今は C の出番とすれば，100%の確率(C→B)で{A・C}が生き残ったまま第２段階のゲームに入ることになる．

[4] Cの命中率は１のため，もし第１段階にCの出番があれば，Cが取れる行動は(わざと外す)，(C→A)，(C→B)の３通りしかない．そして，(わざと外す)と(C→A)の選択は(C→B)よりも劣ることについては，4.2.1節で詳細に説明してあり，参照されたい．したがって，第１段階において生き残ったプレイヤーは {A・B}ペアかまたは{A・C}ペアである．

結果⑧について，もし{A・B・C}全員が生き残っており，かつ今はCの出番とすれば，Cが取れる行動は(わざと外す)(C→A)(C→B)の３通りしかない．Cが(わざと外す)を選んだ場合，{A・B・C}全員が生き残ったまま第２段階のゲームに入ることになる．これは各プレイヤーの選好に矛盾するので，(C→A)または(C→B)よりも劣る戦略である[5]．Cが(C→A)を選んだ場合，{B・C}が生き残ったまま第２段階のゲームに入ることになる．Cが(C→B)を選んだ場合，{A・C}が生き残ったまま第２段階のゲームに入ることになる．命中率の大小関係から，Cにとって{A・C}が生き残ったまま第２段階のゲームに入る方は{B・C}が生き残ったまま第２段階のゲームに入る方よりも望ましい．

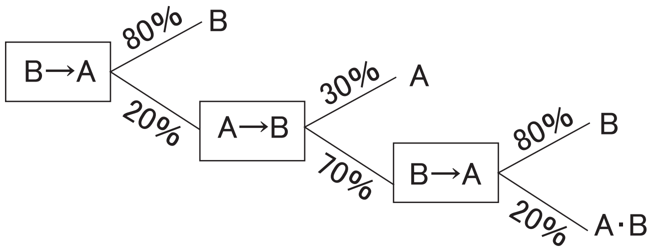
4.2.2. Bの行動について

次にA→B→Cの順でBについて考える．第１段階のゲームにおいてA→B→Cの順でAが一発を撃ち，誰に向けて発砲したのか結果はともかく，Bが撃たれて退場すればそれまでのことである．もしBが生き残っていれば，考えられるすべての結果は，⑨{A・B}が生き残っているケースと⑩{A・B・C}全員が生き残っているケースの２通りである[6]．

結果⑨：もし{A・B}が生き残っており，かつ今はBの出番とすれば，80％の確率(B→A)でBだけが生き残り，そしてゲーム終了；または20％の確率(B→A)で外れて{A・B}２人が生き残ったまま第２段階のゲームに入ることになり，結果①②③のどれかになる．したがって結果⑨では，第一段階のゲームにおけるBの最適な行動は(B→A)であり，それによるBの生存確率は100％である．また，Cの生存確率は０％である．

後の説明を簡単にするため，第１段階の(B→A)から始まり第２段階の最後までのサブゲーム(結果⑨)をゲームhと呼ぶ(図１を参照)．

図１：サブゲームh



ゲームhにおいてA・B・Cそれぞれの生存確率を$P_h(A)$・$P_h(B)$・$P_h(C)$とする．結果⑨より，$P_h(A)$・$P_h(B)$・$P_h(C)$の計算結果は以下の通りである．

$$P_h(A) = 80\% \times 0\% + 20\% \times [P(\text{結果①}) + P(\text{結果③})]$$

[5] 各プレイヤーにとっての最善の結果は，自分だけが生き残ることである．次によいのは２人が生き残り，そのうちの１人になることである．３番目によいのは３人全員が生き残ることである．最悪なのは自分だけが殺されることである．

[6] {B・C}が生き残っているケースについては，Bの出番の前にAが消えることを意味し，つまりAが自殺以外は実現し得ない．

$$= 20\% \times (30\% + 14\%) = 8.8\%$$

$$P_h(B) = 80\% + 20\% \times [P(\text{結果②}) + P(\text{結果③})]$$

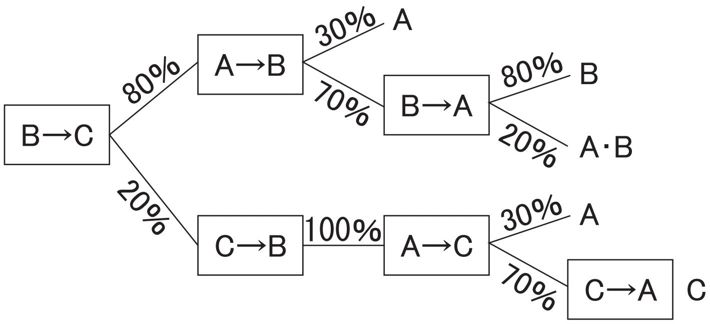
$$= 80\% + 20\% \times (56\% + 14\%) = 94\%$$

$$P_h(C) = 0\ \%$$

結果⑩：もし{A・B・C}が生き残っており，かつ今はＢの出番とすれば，80%の確率(B→C)で{A・B}が生き残ったまま第２段階のゲームに入ることになり，結果①②③のどれかになる；または20%の確率(B→C)で外れてＣの出番となり，そして結果⑧より，100%の確率(C→B)でＢが消えて{A・C}が生き残ったまま第２段階のゲームに入ることになり，結果④⑤のどれかになる．

したがって結果⑩においてＢの最適行動は(B→C)であり，それによるＢの生存確率は80%である[7]．後の説明を簡単にするため，第１段階の(B→C)から始まり第２段階の最後の結果①②③④⑤までのサブゲーム(結果⑩)をゲームｇと呼ぶ(図２を参照)．

図２：サブゲームｇ



ゲームｇにおいてA・B・Cそれぞれの生存確率を$P_g(A)$・$P_g(B)$・$P_g(C)$とする．結果⑩および結果①②③④⑤より，$P_g(A)$・$P_g(B)$・$P_g(C)$の計算結果は以下の通りである．

$$P_g(A) = 80\% \times [P(\text{結果①}) + P(\text{結果③})] + 20\% \times P(\text{結果④})$$

$$= 80\% \times (30\% + 14\%) + 20\% \times 30\%$$

$$= 80\% \times 44\% + 6\% = 41.2\%$$

$$P_g(B) = 80\% \times [P(\text{結果②}) + P(\text{結果③})] + 20\% \times 0\%$$

$$= 80\% \times (56\% + 14\%) = 56\%$$

$$P_g(C) = 80\% \times 0\% + 20\% \times P(\text{結果⑤}) = 20\% \times 70\% = 14\%$$

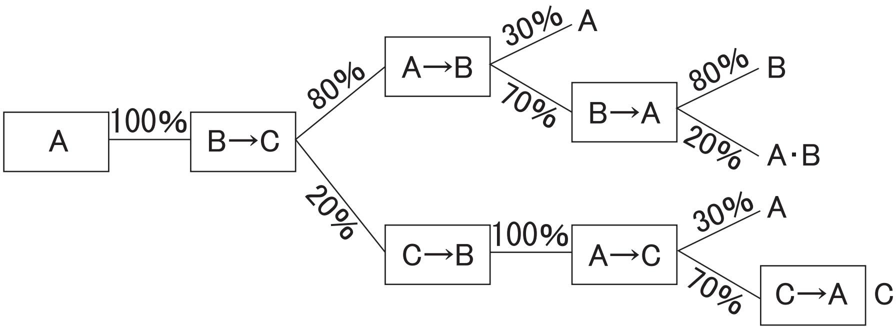
[7] もし，結果⑩においてＢが(B→C)以外の行動を選択すれば，結果⑦⑧より，100%の確率(C→B)でＢが消えるので，Ｂの生存確率は０%となるから，Ｂにとっては最適な行動ではない．

4.2.3. A の行動について

最後に A→B→C の順で A の出番となった場合，A の最適行動について考える．この場合は考えられる結果は⑫{A・B・C}全員が生き残っているケースのみである．この場合の A の行動集合は{わざと外す，A→B，A→C}である．

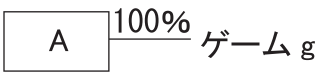
もしAが{わざと外す}を選んだ場合，三者決闘ゲームは図３のようにサブゲーム g と同じになる．A の意思決定問題は実質的に結果⑩(サブゲーム g)を100%の確率でプレイすることである．

図３：A がわざと外した場合



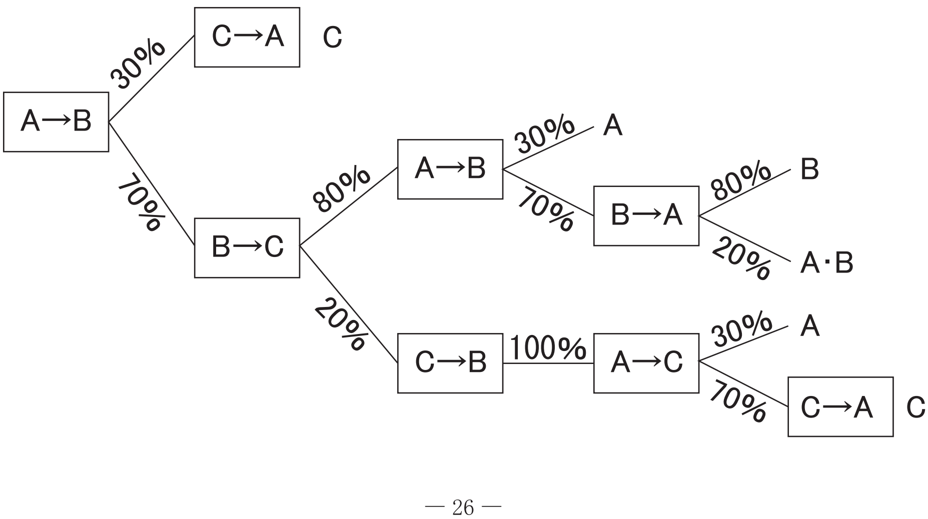
また A・B・C それぞれの生存確率はサブゲーム g において求めた $P_g(A)$・$P_g(B)$・$P_g(C)$ である．さらに，サブゲーム g (図２)を用いることで図３は図４のように変換することができ，A の意思決定問題を大幅に簡略化することができる．

図４：A がわざと外した場合のサブゲームによる表現



もし A が{ A→B }を選んだ場合，三者決闘ゲームは図５のようになる．A の意思決定問題は実質的に結果⑥と結果⑩(サブゲーム g)をそれぞれ30%と70%の確率で混合戦略をプレイすることである．

図５：{ A→B }の場合



さらに，サブゲーム g (図２) を用いることで図５は図６のように変換することができ，A の意思決定問題を大幅に簡略化することができる．

図６：{ A→B }の場合のサブゲームによる表現

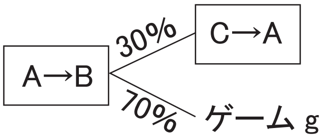
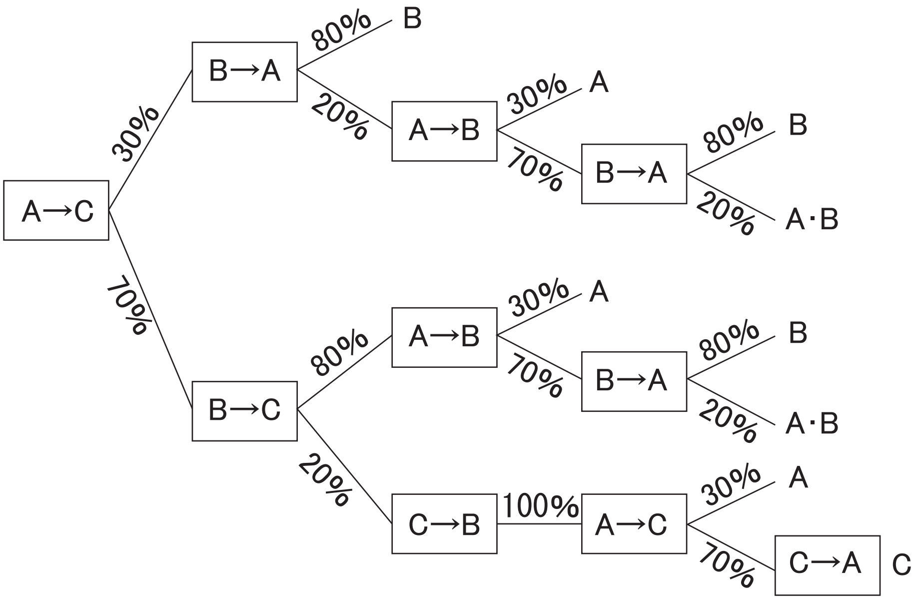


図５または図６から分かるように，三者決闘ゲームにおいて A の意思決定問題は実質的に結果⑥と結果⑩(サブゲーム g)をそれぞれ30%と70%の確率で混合戦略をプレイすることである．しかし，結果⑥において A の生存確率は０%なので，明らかにサブゲーム g の生存確率 $P_g(A)$ よりも低い．したがって A にとっては，結果⑥と結果⑩(サブゲーム g)をそれぞれ30%と70%の確率で混合戦略をプレイすることは最適な戦略ではない．それよりも A が{わざと外す}を選び，図３または図４のようにサブゲーム g を100%の確率でプレイしたほうが合理的である．

もし A が{ A→C }を選んだ場合，三者決闘ゲームは図７のようになる．A の意思決定問題は実質的に結果⑨(サブゲーム h)と結果⑩(サブゲーム g)をそれぞれ30%と70%の確率で混合戦略をプレイすることである．

図７：{ A→C }の場合



さらに，サブゲーム h (図１)とサブゲーム g (図２)を用いることで図７は図８のように変換することができ，A の意思決定問題を大幅に簡略化することができる．

図８：{Ａ→Ｃ}の場合のサブゲームによる表現

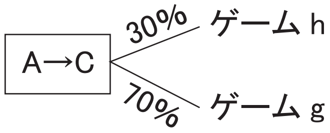


図７または図８から分かるように，三者決闘ゲームにおいてＡの意思決定問題は実質的に結果⑨(サブゲーム h)と結果⑩(サブゲーム g)をそれぞれ30％と70％の確率で混合戦略をプレイすることである．しかし，結果⑨ではＡの生存確率は8.8％なので，明らかにゲーム g の生存確率 $P_g(A)$ よりも低い．したがってＡにとっては，結果⑨(サブゲーム h)と結果⑩(サブゲーム g)をそれぞれ30％と70％の確率で混合戦略をプレイすることは最適な戦略ではない．それよりもＡが{わざと外す}を選び，図３または図４のようにサブゲーム g を100％の確率でプレイしたほうが合理的である．

したがってＡにとって行動集合{わざと外す，A→B，A→C}における意思決定問題は，選択集合{サブゲーム g を確率100％でプレイする，結果⑥と結果⑩(サブゲーム g)をそれぞれ30％と70％の確率で混合戦略をプレイする，結果⑨(サブゲーム h)と結果⑩(サブゲーム g)をそれぞれ30％と70％の確率で混合戦略をプレイする}における意思決定問題と等価である．

５．まとめ

本研究は Dixit and Nalebuff（1991）の三者決闘ゲームについて考察するものである．Dixit and Nalebuff（1991)では先読み手法を用いて三者決闘ゲームを２段階ゲームとして解いたが，本研究ではより複雑な状況にも対応できるバックワード・インダクションの手法を用いた．先読み推論法と違い，バックワード・インダクションの方法は各サブゲームにおける各プレイヤーの行動が詳細に考察することができ，ゲームの構造をより深く理解することができるメリットがある．

バックワード・インダクションによる考察の結果，Dixit and Nalebuff（1991)の三者決闘ゲームの重要な性質は第２段階ゲームの特徴により得られたものであることが分かる．第２段階のゲームでは，自分にとって最も脅威である相手を先延ばしてはいけないというプレッシャーを各プレイヤーに与えている．このことにより，各プレイヤーは第１段階のゲームでは最適な行動を選択することになっている．

また，本研究ではサブゲームを用いることで三者決闘ゲームの構造を大幅に簡略化し，三者決闘ゲームの特徴を維持したまま，１人による意思決定の問題に変換した．この変換によって三者決闘ゲームの応用がより幅広くより活用しやすくなったと考えられる．

サブゲームを用いることによって，３プレイヤーによる２段階ゲームの複雑な分析手続きを大幅に省くができ，１人による意思決定とみることができる．それにより，最初のプレイヤーが意思決定するとき，２段階ゲームの先読み推論とバックワード・インダクション推論をしなくて済む．最

初のプレイヤーは各サブゲームについてどのような混合戦略を選択すればよいのか，だけを考えれば十分である．

参考文献

Avinash Dixit and Barry Nalebuff (1991), Thinking Strategically: Competitive Edge in Business, Politics and Everyday Life, WW Norton & Co. (菅野隆，嶋津祐一　訳[1991],「戦略的思考とは何か―エール大学式『ゲーム理論』の発想法」, TBS ブリタニカ)