

Dixit and Nalebuff (1991) の三者決闘ゲームに関する考察： 条件付き一般化¹

王 鏡凱²・江 駿³

1. はじめに

本研究は Dixit and Nalebuff (1991) の三者決闘ゲームについて考察するものである。本研究の主な貢献は三者決闘ゲームを条件付きで一般化したことである。

三者決闘ゲームについては、Dixit and Nalebuff (1991) では先読み推論法を用いて考察されており、王・江(2017)ではバックワード・インダクションの手法を用いて考察されている。本研究ではバックワード・インダクションの手法を用いるだけでなく、三者決闘ゲームを条件付き一般化する。

条件付き一般化とは、三者決闘ゲームを数値例として考察するではなく、より一般的な比較分析ができるようにすることである。ただし、3人のプレイヤーのうち、最後のプレイヤーCの命中率だけは Dixit and Nalebuff (1991) の仮定と同じ値(確率1)に固定することは唯一の制約条件である。したがって本研究では Dixit and Nalebuff (1991) の三者決闘ゲームの3プレイヤーのうち、最後のプレイヤーCの命中率だけを固定するという条件の下でその他の2人のプレイヤー(A・B)の命中率(p, q)について、($0 < p < q < 1$)を制約条件として三者決闘ゲームを一般化する。

条件付き一般化することによって、プレイヤーたちの命中率について特定の数値例だけでなく、より一般的なケースについても簡単に分析できるようになる。本研究の条件付き一般化の分析の結果では Dixit and Nalebuff (1991) になかった最適戦略も見つけた。

三者決闘ゲームにおいて各プレイヤーの生き残るための最適戦略は、各プレイヤーの命中率の絶対的な大小関係だけでなく、相対的な大小関係にも影響を受ける。Dixit and Nalebuff (1991) になかった最適戦略を発見できたことは、本研究の特徴であり、貢献である。

本研究の構成は以下の通りである。まず第2節では Dixit and Nalebuff (1991) の三者決闘ゲームについて説明する。そして、第3節では Dixit and Nalebuff (1991) に基づき先読み手法による解き方を説明する。第4節ではバックワード・インダクションの方法を用いて条件付きの一般化を行い、最後に全体をまとめる。

¹ 本論文はH28年度鹿児島大学学長裁量経費「若手・女性研究者研究支援事業」による成果の一部である。

² 本論文についての責任は、すべて第一著者である王鏡凱に帰する。

E-mail: kyogaiw@leh.kagoshima-u.ac.jp

³ 鹿児島大学大学院

2. Dixit and Nalebuff (1991) の三者決闘ゲームについて

ここでは Dixit and Nalebuff (1991, p.292)に基づき三者決闘ゲームについて説明する。プレイヤーは3人、ラリー・モー・カリー(ここではA・B・Cと呼ぶ)が2ラウンド制の逐次ゲームとして、A B Cの順に1発ずつ撃つことになっている。

各プレイヤーの戦略は2つしかなく、相手を撃つかまたはわざと外すかである。相手を撃つと決めた場合、3人の命中率はそれぞれ{A:B:C = 30%:80%:100%}となっている。

各プレイヤーにとっての最善の結果は、自分だけが生き残ることである。次によいのは2人が生き残り、そのうちの1人になることである。3番目によいのは3人全員が生き残ることである。最悪なのは自分だけが殺されることである。

以上のルールの下でプレイヤーAの生存確率を最大にする最適戦略とは何かについて求める問題である。

3. 先読み手法による解き方：Dixit and Nalebuff (1991, p.292を参照)

ここでは先読み手法でAの選択肢を個々に検討する。もしAがBを狙い命中させたら、その次はA自身がやられてしまう。なぜなら次はCの番になり、彼はAを確実に撃ち当て最善の結果に至る。だからAにとってBを狙うのはいい選択肢ではない。

次にもしAがCを狙い命中させたら次はBの番となり、BはAを狙うことになる。そうなると、A自身の生き残れる確率は20%以下となる。だからこれもあまり魅力のある選択肢ではない。

Aの最適行動は第1ラウンドではわざと空に向けて撃つことで外す、そして第2ラウンドではBかCの生き残ったほうを狙うことである。第1ラウンドでAがわざと外した場合、BはCを狙い、もし失敗してもCがBを撃ち当てる。第2ラウンドに入り、再びAの番となる。AはBかCの生き残ったほうを狙えば、30%以上の確率でAは唯一の生き残りとなる。

三者決闘ゲームから得られる教訓としては、小物(A)がスターになるには最初のチャンスは見送ったほうがよい場合がある。ライバルが多数いるときは、トップを走っている者は2番手以降から集中攻撃を受け、潰されることがある。こういう状況では、実力者(BとC)が互いに潰し合うまでは小物(A)が後方に控えておくほうが得である。

4. 条件付き一般化

ここでは王・江(2017)に倣いバックワード・インダクションの手法を用いて一般化を行う。先読み推論法に対しバックワード・インダクションは各サブゲームにおける各プレイヤーの行動が詳細に考察することができ、ゲームの構造をより深く理解することができるメリットがある。また、条件付き一般化する前に3人の命中率については、{A:B:C = p:q:1}かつ($0 < p < q < 1$)として仮

定する。

4.1. 第2段階のゲーム

まずは第2段階について考える。Cの命中率は確率1であることに注目して、第1段階において生き残ったプレイヤーは $\{A \cdot B\}$ ペアかまたは $\{A \cdot C\}$ ペアのはずである⁴。プレイヤーが2人の場合は、わざと外すことは最適戦略ではなく、互いに順番に1発ずつ撃つことは最適戦略である。

そして、この第2段階のゲームの結果は各プレイヤーの命中率によって一意的に決まる。生き残ったプレイヤーは $\{A \cdot B\}$ ペアの場合は考えられる結果は以下の3つである。

結果 : p の確率($A \cdot B$)でAだけ生き残り、そしてゲーム終了；

結果 : $q(1-p)$ の確率($A \cdot B \cdot A$)でBだけ生き残り、そしてゲーム終了；

結果 : $(1-p)(1-q)$ の確率($A \cdot B \cdot A$)で $A \cdot B$ ともに生き残り、そしてゲーム終了。

また、生き残ったプレイヤーは $\{A \cdot C\}$ ペアの場合は考えられる結果は以下の2つである。

結果 : p の確率($A \cdot C$)でAだけ生き残り、そしてゲーム終了；

結果 : $(1-p)$ の確率($A \cdot C \cdot A$)でCだけ生き残り、そしてゲーム終了。

第2段階のゲームに参加するプレイヤーは $\{A \cdot B\}$ ペアかまたは $\{A \cdot C\}$ ペアであることから、第1段階のゲームにおいてAの生存確率は1であることが分かる。このことについては第1段階のゲームを考察する際に詳細に述べる。

4.2. 第1段階のゲーム

4.2.1. Cの行動について

バックワード・インダクションにしたがって、第1段階のゲームについて考察する。まずはA・B・Cの順でCについて考える。第1段階のゲームにおいてA・B・Cの順でA・Bがそれぞれ一発を撃ち、誰に向けて発砲したのか結果はともかく、Cが撃たれて退場すればそれまでのことである。もしCが生き残っていれば、考えられるすべての結果は、 $\{A \cdot C\}$ が生き残っているケース、 $\{B \cdot C\}$ が生き残っているケース、 $\{A \cdot B \cdot C\}$ 全員が生き残っているケース、の3通りである。

結果 : もし $\{A \cdot C\}$ が生き残っており、かつ今はCの出番とすれば、1の確率($C \cdot A$)でCだ

⁴ Cの命中率は1のため、もし第1段階にCの出番があれば、Cが取れる行動は(わざと外す)、($C \cdot A$)、($C \cdot B$)の3通りしかない。そして、(わざと外す)と($C \cdot A$)の選択は($C \cdot B$)よりも劣ることについては、4.2.1節で詳細に説明しており、参照されたい。したがって、第1段階において生き残ったプレイヤーは $\{A \cdot B\}$ ペアかまたは $\{A \cdot C\}$ ペアである。

け生き残り、そしてゲーム終了；

結果：もし $\{B \cdot C\}$ が生き残っており、かつ今はCの出番とすれば、1の確率(C B)でCだけ生き残り、そしてゲーム終了；

結果：もし $\{A \cdot B \cdot C\}$ 全員が生き残っており、かつ今はCの出番とすれば、1の確率(C B)で $\{A \cdot C\}$ が生き残ったまま第2段階のゲームに入ることになる。

結果 について、もし $\{A \cdot B \cdot C\}$ 全員が生き残っており、かつ今はCの出番とすれば、Cが取れる行動は(わざと外す)(C A) (C B)の3通りしかない。Cが(わざと外す)を選んだ場合、 $\{A \cdot B \cdot C\}$ 全員が生き残ったまま第2段階のゲームに入ることになる。これは各プレイヤーの選好に矛盾するので、(C A)または (C B)よりも劣る戦略である⁵。Cが(C A)を選んだ場合、 $\{B \cdot C\}$ が生き残ったまま第2段階のゲームに入ることになる。Cが(C B)を選んだ場合、 $\{A \cdot C\}$ が生き残ったまま第2段階のゲームに入ることになる。命中率の大小関係から、Cにとって $\{A \cdot C\}$ が生き残ったまま第2段階のゲームに入る方は $\{B \cdot C\}$ が生き残ったまま第2段階のゲームに入る方よりも望ましい。

4.2.2. Bの行動について

次にA B Cの順でBについて考える。第1段階のゲームにおいてA B Cの順でAが一発を撃ち、誰に向けて発砲したのか結果はともかく、Bが撃たれて退場すればそれまでのことである。もしBが生き残っていれば、考えられるすべての結果は、 $\{A \cdot B\}$ が生き残っているケースと $\{A \cdot B \cdot C\}$ 全員が生き残っているケースの2通りである⁶。

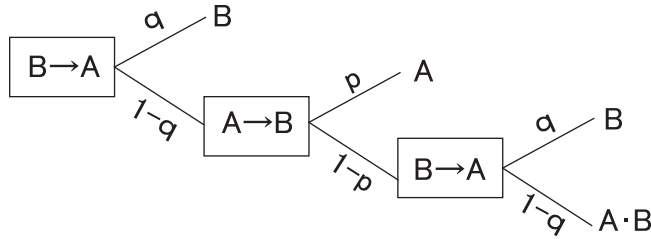
結果：もし $\{A \cdot B\}$ が生き残っており、かつ今はBの出番とすれば、qの確率(B A)でBだけが生き残り、そしてゲーム終了；または $(1 - q)$ の確率(B A)で外れて $\{A \cdot B\}$ 2人が生き残ったまま第2段階のゲームに入ることになり、結果 のどれかになる。したがって結果 では、第一段階のゲームにおけるBの最適な行動は(B A)であり、それによるBの生存確率は1である。また、Cの生存確率は0である。

後の説明を簡単にするため、第1段階の(B A)から始まり第2段階の最後までサブゲーム(結果)をゲームhと呼ぶ(図1を参照)。

⁵ 各プレイヤーにとっての最善の結果は、自分だけが生き残ることである。次によいのは2人が生き残り、そのうちの1人になることである。3番目によいのは3人全員が生き残ることである。最悪なのは自分だけが殺されることである。

⁶ $\{B \cdot C\}$ が生き残っているケースについては、Bの出番の前にAが消えることを意味し、つまりAが自殺以外は実現し得ない。

図 1：サブゲーム h



ゲーム h において $A \cdot B \cdot C$ それぞれの生存確率を $P_h(A) \cdot P_h(B) \cdot P_h(C)$ とする。結果より、 $P_h(A) \cdot P_h(B) \cdot P_h(C)$ の計算結果は以下の通りである。

$$P_h(A) = (1 - q)[P(\text{結果}) + P(\text{結果})] = p(1 - q) + (1 - p)(1 - q)^2$$

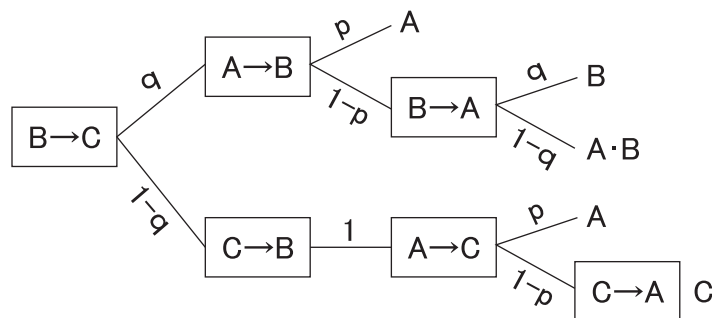
$$P_h(B) = q + (1 - q)[P(\text{結果}) + P(\text{結果})] = q + q(1 - p)(1 - q) + (1 - p)(1 - q)^2$$

$$P_h(C) = 0$$

結果：もし $\{A \cdot B \cdot C\}$ が生き残っており、かつ今は B の出番とすれば、 q の確率(B C)で $\{A \cdot B\}$ が生き残ったまま第 2 段階のゲームに入ることになり、結果のどれかになる；または $(1 - q)$ の確率(B C)で外れて C の出番となり、そして結果より、1 の確率(C B)で B が消えて $\{A \cdot C\}$ が生き残ったまま第 2 段階のゲームに入ることになり、結果のどれかになる。

したがって結果において B の最適行動は(B C)であり、それによる B の生存確率は q である⁷。後の説明を簡単にするため、第 1 段階の(B C)から始まり第 2 段階の最後の結果までのサブゲーム(結果)をゲーム g と呼ぶ(図 2 を参照)。

図 2：サブゲーム g



⁷ もし、結果において B が(B C)以外の行動を選択すれば、結果より、1 の確率(C B)で B が消えるので、B の生存確率は 0 となるから、B にとっては最適行動ではない。

ゲーム g において $A \cdot B \cdot C$ それぞれの生存確率を $P_g(A) \cdot P_g(B) \cdot P_g(C)$ とする．結果 および結果 より， $P_g(A) \cdot P_g(B) \cdot P_g(C)$ の計算結果は以下の通りである．

$$P_g(A) = q[P(\text{結果}) + P(\text{結果})] + (1 - q)P(\text{結果}) = pq + q(1 - p)(1 - q) + p(1 - q)$$

$$P_g(B) = q[P(\text{結果}) + P(\text{結果})] = q^2(1 - p) + q(1 - p)(1 - q)$$

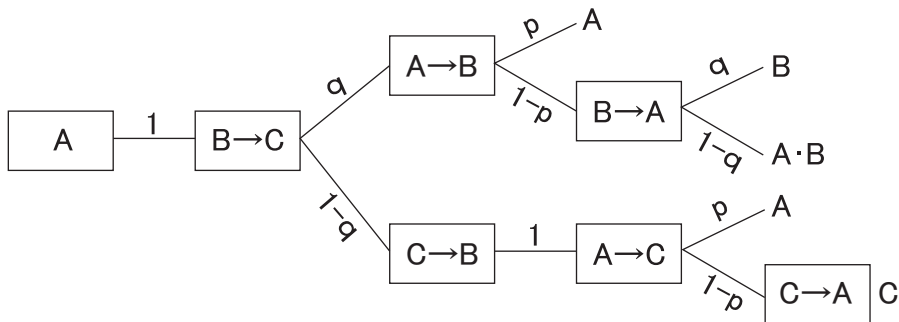
$$P_g(C) = (1 - q)P(\text{結果}) = (1 - p)(1 - q)$$

4.2.3. A の行動について

最後に $A \cdot B \cdot C$ の順で A の出番となった場合， A の最適行動について考える．この場合は考えられる結果は $\{A \cdot B \cdot C\}$ 全員が生き残っているケースのみである．この場合の A の行動集合は $\{\text{わざと外す}, A \cdot B, A \cdot C\}$ である．

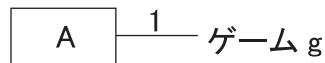
もし A が $\{\text{わざと外す}\}$ を選んだ場合，三者決闘ゲームは図 3 のようにサブゲーム g と同じになる． A の意思決定問題は実質的に結果 (サブゲーム g) を 1 の確率でプレイすることである．

図 3 : A がわざと外した場合



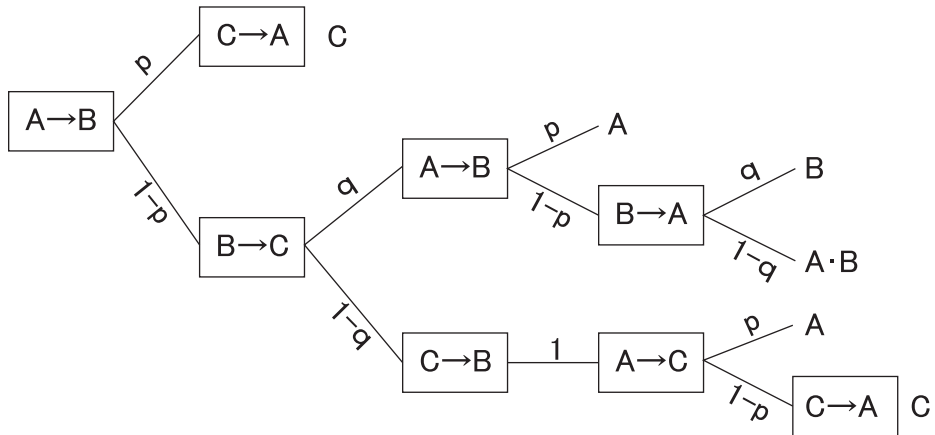
また $A \cdot B \cdot C$ それぞれの生存確率はサブゲーム g において求めた $P_g(A) \cdot P_g(B) \cdot P_g(C)$ である．さらに，サブゲーム g (図 2) を用いることで図 3 は図 4 のように変換することができ， A の意思決定問題を大幅に簡略化することができる．

図 4 : A がわざと外した場合のサブゲームによる表現



もし A が $\{A \cdot B\}$ を選んだ場合，三者決闘ゲームは図 5 のようになる． A の意思決定問題は実質的に結果 と結果 (サブゲーム g) をそれぞれ p と $(1 - p)$ の確率で混合戦略をプレイすることである．

図 5 : $\{A \rightarrow B\}$ の場合



さらに、サブゲーム g (図 2) を用いることで図 5 は図 6 のように変換することができ、 A の意思決定問題を大幅に簡略化することができる。

図 6 : $\{A \rightarrow B\}$ の場合のサブゲームによる表現

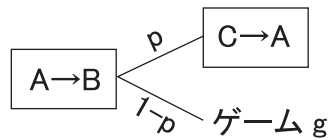
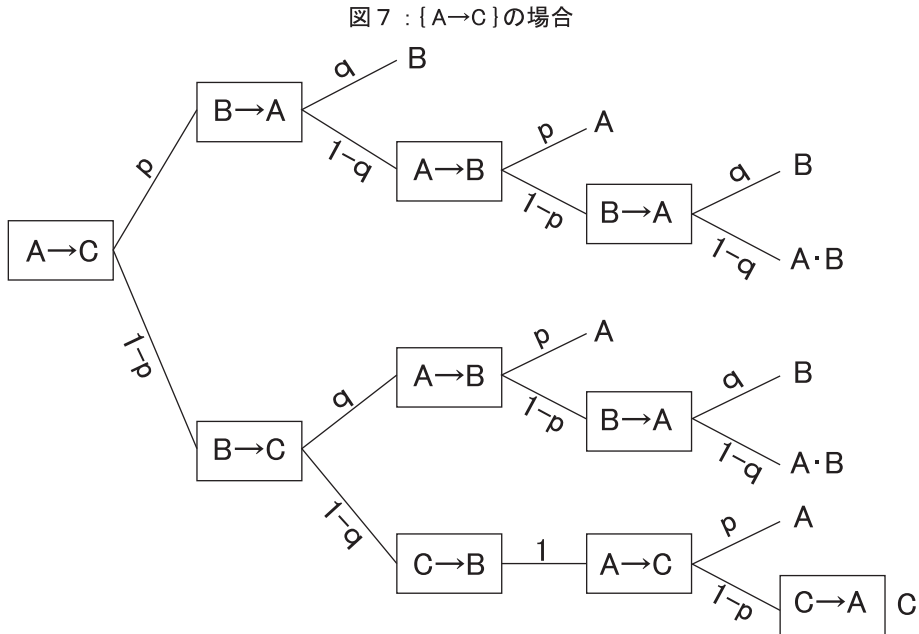


図 5 または図 6 から分かるように、三者決闘ゲームにおいて A の意思決定問題は実質的に結果と結果 (サブゲーム g) をそれぞれ p と $(1-p)$ の確率で混合戦略をプレイすることである。しかし、結果において A の生存確率は 0 なので、明らかにサブゲーム g の生存確率 $P_g(A)$ よりも低い。したがって A にとっては、結果と結果 (サブゲーム g) をそれぞれ p と $(1-p)$ の確率で混合戦略をプレイすることは最適な戦略ではない。それよりも A が {わざと外す} を選び、図 3 または図 4 のようにサブゲーム g を 1 の確率でプレイしたほうが合理的である。

もし A が $\{A \rightarrow C\}$ を選んだ場合、三者決闘ゲームは図 7 のようになる。A の意思決定問題は実質的に結果（サブゲーム h）と結果（サブゲーム g）をそれぞれ p と $(1-p)$ の確率で混合戦略をプレイすることである。



さらに、サブゲーム h (図 1) とサブゲーム g (図 2) を用いることで図 7 は図 8 のように変換することができる。A の意思決定問題を大幅に簡略化することができる。

図 8 : $\{A \rightarrow C\}$ の場合のサブゲームによる表現

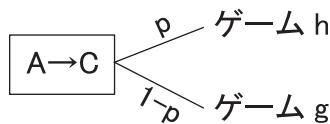


図 7 または図 8 から分かるように、三者決闘ゲームにおいて A の意思決定問題は実質的に結果（サブゲーム h）と結果（サブゲーム g）をそれぞれ p と $(1-p)$ の確率で混合戦略をプレイすることである。しかし、結果（サブゲーム h）における A の生存確率 $P_h(A)$ と結果（サブゲーム g）における A の生存確率 $P_g(A)$ の大小関係については、 $P_h(A) > P_g(A)$ の場合と $P_h(A) \leq P_g(A)$ の場合がある。

$P_h(A) \leq P_g(A)$ の場合、Dixit and Nalebuff (1991) と王・江(2017)の分析と同じ結論になる。つまり A にとっては、結果（サブゲーム h）と結果（サブゲーム g）をそれぞれ p と $(1-p)$ の確率で混合戦略をプレイすることは最適な戦略ではない。それよりも A が「わざと外す」を選び、図 3 または図 4 のようにサブゲーム g を 1 の確率でプレイしたほうが合理的である。

$P_h(A) \leq P_g(A)$ の条件は $pq \geq (1-p)(1-q)(1-2q)$ であり、 p と q が極めて小さな数値でない限りこの条件は満たされる。一方、 $P_h(A) > P_g(A)$ の条件は $pq < (1-p)(1-q)(1-2q)$ であり、 p と q が極めて小さな数値ならこの条件は満たされる。

$P_h(A) > P_g(A)$ の場合、これは Dixit and Nalebuff (1991) と王・江(2017)の分析になかったケースであり、本研究の条件付き一般化による成果である。このケースでは A にとっては、結果（サブゲーム h ）と結果（サブゲーム g ）をそれぞれ p と $(1-p)$ の確率で混合戦略をプレイすることは最適な戦略である。 A が{わざと外す}を選び、図3または図4のようにサブゲーム g を1の確率でプレイすることは合理的ではない。

A の意思決定における最適戦略は以下の2つのケースによってまとめられる。 $P_h(A) \leq P_g(A)$ なら、つまり条件 $pq \geq (1-p)(1-q)(1-2q)$ が成立する場合、 A の最適戦略は結果（サブゲーム g ）を1の確率でプレイする。 $P_h(A) > P_g(A)$ なら、つまり条件 $pq < (1-p)(1-q)(1-2q)$ が成立する場合、 A の最適戦略は結果（サブゲーム h ）と結果（サブゲーム g ）をそれぞれ p と $(1-p)$ の確率で混合戦略をプレイする。

5. まとめ

本研究は Dixit and Nalebuff (1991) の三者決闘ゲームについて考察するものである。本研究では先読み手法ではなく、より複雑な状況にも対応できるバックワード・インダクションの手法を用いた。さらに、本研究は $(0 < p < q < 1)$ を制約条件として三者決闘ゲームを一般化した。

条件付き一般化することによって、プレイヤーたちの命中率について特定の数値例だけでなく、より一般的なケースについても簡単に分析できるようになる。本研究の条件付き一般化の分析の結果では Dixit and Nalebuff (1991) になかった最適戦略を見つけた。

三者決闘ゲームにおいて各プレイヤーの生き残るための最適戦略は、各プレイヤーの命中率の絶対的な大小関係だけでなく、相対的な大小関係にも影響を受ける。Dixit and Nalebuff (1991) になかった最適戦略を発見できたことは、本研究の貢献である。

参考文献

- Avinash Dixit and Barry Nalebuff (1991), Thinking Strategically: Competitive Edge in Business, Politics and Everyday Life, WW Norton & Co. (菅野隆, 嶋津祐一 訳[1991], 「戦略的思考とは何か エール大学式『ゲーム理論』の発想法」, TBSブリタニカ)
- 王鏡凱・江駿(2017), 「Dixit and Nalebuff (1991)の三者決闘ゲームに関する考察：数値例を中心に」 鹿児島大学法文学部『経済学論集』88(2017年3月掲載予定)。