

分割表における仮説検定統計量の分布の漸近近似と その応用

鹿児島大学大学院 理工学研究科
システム情報科学専攻 博士後期課程
学籍番号 2714520032

小部 敬純
指導教員：種市 信裕 教授

2016年12月22日提出

概要

この研究は, row カテゴリ (行分類) と column カテゴリ (列分類) が同数の $r \times r$ 正方分割表および, row カテゴリ, column カテゴリおよび layer カテゴリ (層分類) の 3次元 $r \times s \times t$ 分割表についての研究である. 本論文では, $r \times r$ 正方分割表において対称なセルの確率が等しいという対称性 (symmetry) の帰無仮説のもとでの検定および, $r \times s \times t$ 分割表における同時独立性 (jointly independence) の帰無仮説のもとでの検定による ϕ -ダイバージェンス統計量 C_ϕ での帰無分布について考察する. パワーダイバージェンス統計量 R^a は, 統計量 C_ϕ の特別な場合である. R^0 は対数尤度比統計量で, R^1 はピアソンの X^2 統計量である. また, $a = 2/3$ は Cressie and Read [6] によって提唱された統計量である. これらの統計量は対称性の帰無仮説のもとでカイ二乗分布を極限分布として持っていることが知られている. また, この仮説のもとで C_ϕ の分布に対する漸近展開にもとづく近似式の連続項を導出する. この連続項を使うことによって, C_ϕ の分布の新しい近似を提案する. さらに, その近似に基づき, C_ϕ のカイ二乗極限分布への収束速度の改良をした変換統計量を与える. また, R^a の場合の数値比較をすることによって, 変換統計量が小標本に対してもよい近似となっていることを示す.

キーワード

カイ二乗極限分布; 分割表; 対称性検定; 同時独立性検定; ϕ -ダイバージェンス; パワーダイバージェンス; バートレット修整; 改良変換

目次

1	序論	5
1.1	研究の目的・背景	5
1.2	研究の成果	6
1.3	カテゴリカルデータ	6
1.4	2×2 分割表とモデル	6
2	関係性の指標	10
2.1	関係性の定式化	10
2.2	$r \times c$ 分割表と独立性のモデル	12
2.3	$r \times r$ 分割表と対称性のモデル	13
2.4	3次元分割表の独立性のモデル	15
2.5	シンプソンパラドックス	17
2.6	モデルの分解	17
2.7	適合度検定	19
2.8	尺度	20
3	正方分割表	22
3.1	正方分割表の対称性検定	22
3.2	局所エッジワース展開	23
3.3	Lemma 2.1 の適用	24
3.4	H_0^S のもとでの C_ϕ^S の分布における漸近近似	24
3.5	J_1^S 項の近似について	25
3.6	J_2^S 項の近似について	26
4	3次元分割表	28
4.1	3次元分割表について	28
4.2	完全独立性の帰無仮説のもとでの最尤推定量	28
4.3	同時独立性の帰無仮説のもとでの最尤推定量	30
4.4	条件付き独立性の帰無仮説のもとでの最尤推定量	34
4.5	バートレットにより提唱された2次元分割表の最終モデル	35
4.6	3次元分割表の同時独立性検定	35
4.7	局所エッジワース近似	36
4.8	Lemma 2.1 の適用	37
4.9	H_0^{JI} のもとでの C_ϕ^{JI} の分布における漸近近似	37

目次	目次
4.10	J_1^{JI} 項の近似について 38
4.11	J_2^{JI} 項の近似について 39
5	パートレット修正と改良変換統計量 41
5.1	漸近近似について 41
5.2	エッジワース展開に基づく改良変換統計量 41
5.3	近似に基づく変換統計量 43
6	数値計算例 46
6.1	正方分割での対称性検定の場合 46
6.2	3次元分割表での同時独立性検定の場合 55
6.3	数表 63
7	結論 70
A	定理 3.2 の証明 72
B	定理 4.2 の証明 75

1 序論

1.1 研究の目的・背景

分割表では、各カテゴリに関連があるかどうかの一つの関心事となっている。一般の分割表の場合では、カテゴリの関連の有無を独立かどうかによって調べている。しかし、row カテゴリと column カテゴリが同数の $r \times r$ 正方分割表の場合においては、独立性が成り立たない。そこで、関連の有無を対称性によって、表している。これらの分割表は調査やアンケートの集計などに用いられているが、その結果を用いて、統計的な観測をする場合、信頼できる結果を得るためには、一定の標本サイズが要求される。しかしながら、調査やアンケートにおいて、十分な標本サイズが必ずしも得られるとは限らない。そこで、検定統計量の分布の漸近近似を用いて、従来の統計量の改良変換を行ったものが研究である。

多項分布の適合度検定において、Yarnold [24] はピアソンの X^2 統計量における漸近展開を導き、数値実験から漸近展開に基づく近似の正確さを示した。その後、Siotani and Fujikoshi [18] は対数尤度比統計量と Freeman-Tukey 統計量を考察し、パワーダイバージェンス統計量は Read [15] によって示されている。また、 ϕ -ダイバージェンス統計量についての漸近近似は Menéndez *et al.* [13] が導いている。

これらの先行研究では連続項と離散項の近似を用いて高次の近似を導出している。しかし、分割表のもとでの種々の統計量についての離散項を用いた近似の導出はとても複雑で導出することが困難である。また、Yarnold [24] の数値結果からも離散項を含めた近似も連続項のみの近似とさほど変わっていない。さらに、Taneichi *et al.* [19], Taneichi *et al.* [20] や 2 次元分割表での独立性検定における改良変換統計量について論じた Taneichi and Sekiya [21] においても多変量 Edgeworth 展開を用いた連続項を用いた近似を行なっているが数値結果に重大な誤差は観測されていない。

そのため、本研究においても C_ϕ の分布を連続項と仮定し、帰無仮説のもとでの C_ϕ の分布における多変量 Edgeworth 展開に基づく近似式の導出を考察する。まず 2 章では、分割表における関係性の定式化について論述する。また、具体的な関係性の仮説を考察する。続く 3 章では、第 2 章で論述した分割表の関係性の仮説の中から、正方分割表の多項分布モデルにおける対称性検定について考察し、多変量エッジワース展開を用いた分布の近似をおこなう。そして 4 章では、第 2 章で論述した分割表の関係性のモデルの中から、3 次元分割表の多項分布モデルにおける同時独立性検定について考察し、多変量エッジワース展開を用いた分布の近似をおこなう。5 章ではバートレット修正と、改良変換統計量について概説し、第 3 章、第 4 章で提案した近似を用いて、多変量 Edgeworth 展開に基づいた新しい変換統計量を提案する。6 章では、第 5 章は、カイ二乗分布への収束の速さおよび、検出力の両面から変換検定統計量と元の検定統計量とを比較し、導出した各モデルにおける性能の評価をおこなう。これにより元の検定統計量に対する提案された変換検定統計量の優位性を検証する。第 7 章は、分割表での各仮説検定統計量の改良変換統計量に関する総括をおこなう。

1.2 研究の成果

本研究を通して、分割表での検定統計量の分布の漸近近似を用いた、各仮説検定統計量の改良変換統計量を導出することができた。また、これらの変換統計量は数値実験からもほとんどの場合で従来の統計量より良い結果をしてしていることを確認した。さらに導出した各変換統計量は従来の検定統計量とほとんど変わらない計算コストで結果を導出でき、小さい標本サイズから大きな標本サイズにまで容易に検定できるという特徴を持っている。

1.3 カテゴリカルデータ

一般にデータには、身長や、スピード、温度の測定値のような連続変数と、サイコロを投げたときのある目が出る数のように整数値しかとらない場合の離散変数とがある。離散変数の中には交通事故件数や、選挙での得票数などが典型的なものとして上げられる。また、調査・アンケートでの回答は分類ごとに分けることができる。このようなある項目へ分類されたデータは質的データもしくは、カテゴリカルデータと呼ばれている。たとえば、次のようなアンケート調査を行なったとしよう。

Q1 朝ごはんを食べてきましたか (はい ; いいえ)

Q2 昼ごはんが気になりますか (はい ; いいえ)

このとき、

$$X_{jk} \begin{cases} 0 : j \text{ 番目の人が設問 } k \text{ に “はい” と答えるとき} \\ 1 : j \text{ 番目の人が設問 } k \text{ に “いいえ” と答えるとき} \end{cases}$$

のように 0 と 1 の値をとる変数 X_{jk} を導入すると j 番目の人のデータは

$$(X_{j1}, X_{j2}) = (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$$

で表せる。すなわち、カテゴリカルデータも離散変数として表すことができる。また、場合によっては連続変数も離散データとして扱う場合もある。

このように離散変数は様々な分野において多岐にわたり発生する。いくつかの離散変数が存在するとき、これらの変数間の関係を調べることを目的として、離散多変量データの統計解析が行なわれる。この離散多変量データは、分割表あるいは分類表と呼ばれる表にまとめて表示されることが多い。このようなことから、離散多変量データの統計解析のことを分割表の統計解析と呼ぶ場合もある。

1.4 2×2 分割表とモデル

離散多変量データの中で最も簡単なものが表 1.1 のような 2×2 分割表にまとめられたデータである。そして、度数を表す 4 つの非負値整数 $Y_{11}, Y_{12}, Y_{21}, Y_{22}$ を属性の組み合わせにそれぞれ

表 1.1 2 × 2 分割表とセル確率表

	A_1	A_2	Total		A_1	A_2	Total
B_1	Y_{11}	Y_{12}	$Y_{1\cdot}$	B_1	p_{11}	p_{12}	$p_{1\cdot}$
B_2	Y_{21}	Y_{22}	$Y_{2\cdot}$	B_2	p_{21}	p_{22}	$p_{2\cdot}$
Total	$Y_{\cdot 1}$	$Y_{\cdot 2}$	$Y_{\cdot\cdot} = n$	Total	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$p_{\cdot\cdot} = 1$

分類しまとめたものを 2 × 2 分割表という。また、この組み合わせをカテゴリといい、各カテゴリに分類される確率を表にしたものをセル確率表という。行の A_1, A_2 , 列の B_1, B_2 は何らかの分類基準である。また、 $\{\cdot\}$ は和を表しており、

$$Y_{\cdot 1} = \sum_{j=1}^2 Y_{j1} = Y_{11} + Y_{21}$$

である。 p_{11}, \dots, p_{22} をセル確率といい、 $0 \leq p_{11}, \dots, p_{22} \leq 1$ であり、

$$p_{\cdot\cdot} = \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 p_{jk} = 1$$

である。また、周辺確率は、

$$p_{j\cdot} = \sum_{k=1}^2 p_{jk},$$

$$p_{\cdot k} = \sum_{j=1}^2 p_{jk}$$

である。以下、2 × 2 分割表をもとに確率モデル考察する。

1.4.1 クロス分類研究

部集団から無作為に抽出した n 人の被調査者を 2 つの属性 A, B の有無に基づいて分類すると、表 1.2 のような分割表が得られる。

例 1.1 (多項分布モデル)

Q1 朝ごはんを食べてきましたか (はい, いいえ)

Q2 昼ごはんが気になりますか (はい, いいえ)

上の例は全観測値を複数個の基準により分類して分割表を作成したもので、クロス分類調査といわれるものである。この場合、総数はあらかじめ与えられた定数で、これが各カテゴリにそれぞれ分類される。

このとき、表 1.1 のデータから得られる確率モデルとして次の多項分布が想定される。

$$f(y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}) = \frac{n!}{y_{11}! y_{12}! y_{21}! y_{22}!} p_{11}^{y_{11}} p_{12}^{y_{12}} p_{21}^{y_{21}} p_{22}^{y_{22}}$$

表 1.2 食事調査

Q2 \ Q1	Eat	Not	
Curious	65	230	295
Not	32	73	105
	97	303	400

このモデルは多項分布モデルと呼ばれている。

さて、上述のようにあらかじめ定められた人数の被調査者を母集団から抽出する代わりに、一定の時間内に接触できる人を被調査者とする方法も考えられる。このとき、総数はあらかじめ定められた定数ではなくなる。次の例を考察する。

例 1.2 (ポアソン分布モデル)

広告の宣伝効果を調べる目的で、午前 10 時から 2 時間ある商店の出入りに立ち以下のアンケートを行なった。

Q1 広告をみたか (はい, いいえ)

Q2 広告の商品を買ったか (はい, いいえ)

このとき、表 1.3 の結果を得た。

表 1.3 広告の宣伝効果

	See	Not	
Buy	14	10	24
Not	23	71	94
	37	81	118

この例で

$$2h = 7200s$$

であるので、たとえば (1, 1) セルの 14 人はある事象が 7200 時点の中の 14 時点でランダムに起こったと解釈できる。いま、この事象が 1 時点で起こる確率を ρ_{11} とし、1 時点で 2 以上の事象が同時に起こる確率は無視できるほどに小さいとする。このとき、(1, 1) セルに 14 個のデータが入る確率はパラメータ $\lambda_{11} = 7200\rho_{11}$ をもつポアソン分布で計算できる。

このような一定期間の観測で、その期間の事象が一樣に起こっており、生起回数にポアソン分布を仮定できるとき、一般にポアソンサプリングと呼ばれている。

ポアソンサプリングでデータがとられるときのクロス分類研究では、表 1.1 のデータが得られる確率モデルとして 4 つの独立なポアソン分布の積、すなわち

$$P(y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}) = \frac{\lambda_{11}^{a_{11}} \lambda_{12}^{a_{12}} \lambda_{21}^{a_{21}} \lambda_{22}^{a_{22}}}{a_{11}! a_{12}! a_{21}! a_{22}!} \exp\{-(\lambda_{11} + \lambda_{12} + \lambda_{21} + \lambda_{22})\}$$

が想定される．これを，ポアソン分布モデルという．

例 1.3 (超幾何分布モデル)

次に超幾何分布モデルについて考える．超幾何分布の例として，フィッシャーの有名な紅茶の実験がある．英国ではティータイムがある．そのティータイムで，紅茶を先に入れてミルクを入れた方がおいしいのか，ミルクを先に入れて，紅茶を注ぐほうがおいしいのかという論争が生まれた．そこで，これを統計的に調べるために，フィッシャーはミルクを先に入れた紅茶と，後で入れた紅茶の2種類を4個ずつ用意し，ミルクを先に入れた紅茶を当ててもらった実験を行なった．ただし，実験では8個のカップのうち4個にはミルクが先に入れてあると知らせてあり，必ず4個を選択してもらおうとする．この実験から得られるデータは表 1.4 のように周辺和 $y_{1\cdot}, y_{2\cdot}, y_{\cdot 1}, y_{\cdot 2}$ があらかじめ固定されている．

表 1.4 紅茶の実験

Correct \ Answer	Before	After	
Before	y_{11}	y_{12}	$y_{1\cdot} = 4$
After	y_{21}	y_{22}	$y_{2\cdot} = 4$
	$y_{\cdot 1} = 4$	$y_{\cdot 2} = 4$	$y_{\cdot\cdot} = 8$

一般に，分割表の周辺和があらかじめ与えられた定数であるとき， $y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}$ のいずれか1つが決まれば，他が決まる．(1, 1)セルについて考察すると，セルに y_{11} 個のデータを得る確率として次の超幾何分布モデル

$$P(y_{11}) = \frac{y_{\cdot 1} C_{y_{11}} \times y_{\cdot 2} C_{y_{2\cdot} - y_{11}} \times \psi^{y_{11}}}{\sum_{j=0}^{y_{\cdot 1}} y_{\cdot 1} C_j \times y_{\cdot 2} C_{y_{2\cdot} - j} \times \psi^j}$$

を仮定する．このとき， y_{11} は非心パラメータ ψ をもつ非心超幾何分布にしたがうという．特に， $\psi = 1$ のときは，

$$P(y_{11}) = \frac{y_{\cdot 1} C_{y_{11}} \times y_{\cdot 2} C_{y_{2\cdot} - y_{11}}}{y_{\cdot\cdot} C_{y_{1\cdot}}}$$

となり，よく知られた超幾何分布になる．

なお，この紅茶の実験のように 2 × 2 分割表で標本サイズが小さい場合では超幾何分布を用いて，直接関係性の有無について検定を行う．これをフィッシャーの正確性検定という．

2 関係性の指標

2 関係性の指標

属性 A, B に関係があるか無いかはどのように数学的に定式化されるか考察していく。

2.1 関係性の定式化

例 1.1 を考察する。表 1.2 で朝食を食べていない人は、食べた人に比べて昼食への関心を示す場合が多い傾向を持つことがわかる。このとき、朝食の有無と昼食への関心は正の関係があるという。いま、

A_1 : 朝食食べた	A_2 : 朝食食べていない
B_1 : 昼食が気になる	B_2 : 昼食が気にならない

とおくと、数学的に

$$\Pr(B_1|A_1) < \Pr(B_1|A_2)$$

と表すことができる。ただし、 $\Pr(B|A)$ は A が与えられたときの B の条件付確率である。また、両者に関係が無いとき、

$$\Pr(B_1|A_1) = \Pr(B_1|A_2)$$

である。この式は A, B が独立のときに成立する。よって、

$$\Pr(A_1 \cap B_1) = \Pr(A_1) \Pr(B_1)$$

である。つまり、属性間の関係の有無は独立か否かを調べることで導出できる。

2.1.1 オッズ比

属性間に関係が認められたとき、次に問われるのはその関係の強さである。関係の強さを表す指標は様々あるが、ここでは、オッズ比とそれに関連する若干の指標についてのみ考察する。

次の例を考える。

例 2.1

A_1 : 予定時間に到着	A_2 : 予定時間に遅刻
B_1 : 目覚ましをセット	B_2 : 目覚ましセットせず

とする。目覚ましをセットしたとき、予定通りに待ち合わせ場所に到着した確率を $\Pr(A_1|B_1)$ で表すと、目覚ましをセットしたとき、待ち合わせ場所に遅刻した確率は

$$1 - \Pr(A_1|B_1) = \Pr(A_2|B_1)$$

である。したがって、目覚ましセットの遅刻回避に対する有利率 (odds) は $\Pr(A_1|B_1)/\Pr(A_2|B_1)$ で与えられる。同様に、目覚まし非セットの遅刻回避に対する有利率は $\Pr(A_1|B_2)/\Pr(A_2|B_2)$ で表すことができる。よって、両者の比

$$\frac{\Pr(A_1|B_1)/\Pr(A_2|B_1)}{\Pr(A_1|B_2)/\Pr(A_2|B_2)} = \frac{\Pr(A_1|B_1)\Pr(A_2|B_2)}{\Pr(A_1|B_2)\Pr(A_2|B_1)}$$

は目覚ましセットがセットしていないのに比べ、遅刻回避にどれだけ有利であるかの度合いを示す 1 つの指標になりえる。

上の例のように、 A, B の関係の強さの度合いを示す指標を

$$\psi = \frac{\Pr(A_j|B_j)\Pr(A_k|B_k)}{\Pr(A_j|B_k)\Pr(A_k|B_j)}$$

で表すことができ、これをオッズ比という。また、オッズ比 ψ は非心超幾何分布の非心率と等しい。オッズ比 ψ はサンプリング法の違いによらず、関係の強さを表す指標でもある。

次の同値関係が成り立つ。

- 関係なし (独立である)

$$\begin{aligned} \psi = 1 &\iff \Pr(A_1 \cap B_1) = \Pr(A_1)\Pr(B_1), \\ &\iff \Pr(A_1|B_1) = \Pr(A_1|B_2), \\ &\iff \Pr(B_1|A_1) = \Pr(B_1|A_2). \end{aligned}$$

- 正の関係あり

$$\begin{aligned} \psi > 1 &\iff \Pr(A_1 \cap B_1) > \Pr(A_1)\Pr(B_1), \\ &\iff \Pr(A_1|B_1) > \Pr(A_1|B_2), \\ &\iff \Pr(B_1|A_1) > \Pr(B_1|A_2), \end{aligned}$$

- 関係あり (独立でない)

$$\begin{aligned} \psi \neq 1 &\iff \Pr(A_1 \cap B_1) \neq \Pr(A_1)\Pr(B_1), \\ &\iff \Pr(A_1|B_1) \neq \Pr(A_1|B_2), \\ &\iff \Pr(B_1|A_1) \neq \Pr(B_1|A_2), \end{aligned}$$

である。よって、関係の有無は確率モデルによらずオッズ比で統一的に表現できることがわかる。

2.1.2 対数オッズ比

オッズ比は実質的に意味づけされた指標であるが、統計解析の立場からはオッズ比の対数を指標とするほうが便利である。このとき、

$$\log \psi = \log \Pr(B_1|A_1) - \log \Pr(B_2|A_1) - \log \Pr(B_1|A_2) + \log \Pr(B_2|A_2)$$

を対数オッズ比という。対数オッズ比では関係 (独立) の有無を $\log \psi \neq 0$, $\log \psi = 0$ で表す。対数オッズ比は対数線形モデルと関係している。

2.2 $r \times c$ 分割表と独立性のモデル

次に、セル確率 $\{p_{jk}\}$ からなる $r \times c$ 分割表を考える。row カテゴリと column カテゴリに関する独立モデルは

$$H_0 : p_{jk} = p_{j \cdot} p_{\cdot k} \quad (j = 1, \dots, r; k = 1, \dots, c).$$

周辺確率を $\mu_j = p_{j \cdot}, \nu_k = p_{\cdot k}$ とすると、

$$H_0 : p_{jk} = \mu_j \nu_k \quad (j = 1, \dots, r; k = 1, \dots, c),$$

と表すこともできる。このとき、オッズ比は

$$\psi_{(j < s; k < t)} = \frac{p_{st}/p_{jt}}{p_{sk}/p_{jk}} = \frac{p_{st}p_{jk}}{p_{sk}p_{jt}}$$

で定義され、独立モデルは

$$\psi_{(j < s; k < t)} = 1 \quad (1 \leq j < s \leq r; 1 \leq k < t \leq c)$$

である。さらに、

$$H_0 : \log m_{jk} = \tau + \lambda_j^A + \lambda_k^B$$

と対数線形モデルとして表すこともできる。ここで、

$m_{jk} : np_{jk}, (j, k)$ セルの期待度数 (理論値),

τ : 全平均効果,

λ_j^A : A の第 j カテゴリの「主効果」,

λ_k^B : B の第 k カテゴリの「主効果」.

これに対して、独立でないモデル

$$H_1 : p_{jk} \neq p_{j \cdot} p_{\cdot k}$$

を考える。このモデルは独立でないことによって生じる効果 q_{jk} を考慮することで、

$$H_1 : p_{jk} = p_{j \cdot} p_{\cdot k} \times q_{jk}$$

と表現することができる。この場合の対数線形モデルは、

$$H_1 : \log m_{jk} = \tau + \lambda_j^A + \lambda_k^B + \lambda_{jk}^{AB} \quad (2.1)$$

と表すことができる。ここで、 λ_{jk}^{AB} は (j, k) セルにおける A と B の交互作用項である。また、これは飽和モデルと呼ばれている。

表 2.1 $r \times r$ 分割表とセル確率表

	A_1	A_2	\cdots	A_r	Total		A_1	A_2	\cdots	A_r	Total
B_1	Y_{11}	Y_{12}	\cdots	Y_{1r}	$Y_{1\cdot}$	B_1	p_{11}	p_{12}	\cdots	p_{1r}	$p_{1\cdot}$
B_2	Y_{21}	Y_{22}	\cdots	Y_{2r}	$Y_{2\cdot}$	B_2	p_{21}	p_{22}	\cdots	p_{2r}	$p_{2\cdot}$
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
B_r	Y_{r1}	Y_{r2}	\cdots	Y_{rr}	$Y_{r\cdot}$	B_r	p_{r1}	p_{r2}	\cdots	p_{rr}	$p_{r\cdot}$
Total	$Y_{\cdot 1}$	$Y_{\cdot 2}$	\cdots	$Y_{\cdot r}$	$Y_{\cdot\cdot}$	Total	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	\cdots	$p_{\cdot r}$	$p_{\cdot\cdot}$

2.3 $r \times r$ 分割表と対称性のモデル

row カテゴリと column カテゴリが同じ分類からなる $r \times r$ 正方分割表を考察する. 正方分割表の場合, 同じ分類からなるカテゴリであるので独立性が成り立たない. そのため, 関連の有無を調べるために, 対称性もしくは非対称性のモデルを考える. 正方分割表の対称性モデルには, 以下のモデルが Tomizawa [23] によって考察されている.

1. 対称モデル

row, column が対称

2. 準対称モデル

対称モデルを緩めた正方分割表の主対角線に関してオッズ比の対称性を示したモデル

3. 周辺同等モデル

周辺確率に関する対称性を示したモデル

4. 条件付き対称モデル

非対称性の構造を示したモデル

このほかにも, 対角パラメータ対称モデルや, 線形対角パラメータ対称モデルと呼ばれるモデルなど様々な対称性のモデルがある.

対称モデルは

$$H_0^S : p_{jk} = p_{kj} \quad (j, k = 1, 2, \dots, r; j < k),$$

によって定義される. 対称モデルは制約が強いため, 適合度が悪い場合が多い. 対称モデルより制約の緩いモデルとして準対称モデル

$$H_0^{QS} : p_{jk} = \mu_j \nu_k q_{jk} \quad (j \neq k)$$

を提案した.

次に周辺同等モデルは,

$$H_0^{MH} : p_{j\cdot} = p_{\cdot j} \quad (j = 1, \dots, r)$$

で定義されている。このモデルは、周辺確率に対しての対称（同等）性を示している。以上の3つのモデルでは対称性の構造を述べているが、非対称性の構造を述べているモデルも提案されている。条件付対称モデルは

$$H_0^{CS} : p_{jk} = \begin{cases} \delta q_{jk} & (j < k), \\ q_{jk} & (j \geq k) \end{cases}$$

ただし、 $q_{jk} = q_{kj}$ 。このモデルは、視力データに対して、右視力が j で左視力が $k (> j)$ である確率は、右視力が k で左視力が j である確率の δ 倍高いことを意味する。もし、 $\delta > 1$ ならば右視力が左視力より良いといえ、 $\delta < 1$ ならば左視力が右視力より良いといえる。また、 $\delta = 1$ ならば右視力と左視力は等しいことを示している。

表 2.2 英国女性の裸眼視力データ

		Right				Sum
		Good (1)	(2)	(3)	Bad (4)	
Left	Good (1)	1520	266	124	66	1976
	Slightly better (2)	234	1512	432	78	2256
	Slightly bad (3)	117	362	1772	205	2456
	Bad (4)	36	82	179	492	789
	Sum	1907	2222	2507	841	7477

2.3.1 正方分割表における点対称モデル

2.3 章で述べたモデルは、正方分割表の主対角線に関する対称性の構造を示している。一方、正方分割表の中心点に関する対称性のモデルも同様に考察されている。点対称モデルは次のように定義される：

$$H_0^P : p_{jk} = p_{j^*k^*} \quad (j = 1, \dots, r; k = 1, \dots, r; j^* = r + 1 - j, k^* = r + 1 - k)$$

このモデルは、分割表の中心点 (r が偶数のとき) または、中心セル (r が奇数のとき) に関するセル確率の点対称構造を示す。また、周辺点対称モデルは

$$H_0^{MP} : p_{j\cdot} = p_{j^*\cdot} \text{ かつ } p_{\cdot j} = p_{\cdot j^*} \quad (j = 1, \dots, r)$$

と定義されている。このモデルは行（列）の周辺分布が行（列）カテゴリの中心に関して点対称の構造を示す。つまり、英国人女性の右視力が j である確率と、右視力が j^* である確率が等しく、かつ左視力が j である確率と、左視力が j^* である確率が等しいことを示す。

また、準点対称モデルも次のように導入されている。

$$H_0^{QP} : p_{jk} = \tau \mu_j \nu_k q_{jk} \quad (j, k = 1, 2, \dots, r),$$

ただし、 $q_{jk} = q_{j^*k^*}$ である。また、このモデルは、(2.1) で $\lambda_{jk}^{AB} = \lambda_{j^*k^*}^{AB}$ とおいたモデルである。

2.4 3次元分割表の独立性のモデル

3次元分割表においても同様に関係性の指標を考察する．独立性のモデルについては，以下の Agresti [1] で紹介されているモデル 1-3 にモデル 4 加えた 8 つのモデルが存在する．

1. 完全独立モデル (mutually independence)
 - (a) row, column, layer が独立
2. 同時独立モデル (jointly independence)
 - (a) row は, column, layer と独立
 - (b) column は, layer, row と独立
 - (c) layer は, row, column と独立
3. 条件付き独立モデル (conditionally independence)
 - (a) 任意の特別な row が与えられたという条件のもとで, column と layer が独立
 - (b) 任意の特別な column が与えられたという条件のもとで, layer と row が独立
 - (c) 任意の特別な layer が与えられたという条件のもとで, row と column が独立
4. バートレットが推奨したオッズ比が等しいモデル

周辺確率はそれぞれ

$$p_{i..} = \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t p_{ijk} \quad (i = 1, \dots, r),$$

$$p_{.j.} = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^t p_{ijk} \quad (j = 1, \dots, s),$$

$$p_{..k} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s p_{ijk} \quad (k = 1, \dots, t),$$

また,

$$p_{ij.} = \sum_{k=1}^t p_{ijk} \quad (i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, s),$$

$$p_{.jk} = \sum_{i=1}^r p_{ijk} \quad (j = 1, \dots, s; k = 1, \dots, t),$$

$$p_{i.k} = \sum_{j=1}^s p_{ijk} \quad (i = 1, \dots, r; k = 1, \dots, t)$$

であるとする．このとき，完全独立モデルの帰無仮説は

$$H_0^{MI} : p_{ijk} = p_{i..} p_{.j.} p_{..k} \quad (i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, s; k = 1, \dots, t) \quad (2.2)$$

である．

同時独立モデルは、1つの要因が他の2つの要因と独立なモデルである。同時独立モデルの帰無仮説は、

$$H_0^{JI(1)} : p_{ijk} = p_{i\cdot} p_{\cdot jk} \quad (i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, s; k = 1, \dots, t), \quad (2.3)$$

$$H_0^{JI(2)} : p_{ijk} = p_{\cdot j} p_{i\cdot k} \quad (i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, s; k = 1, \dots, t), \quad (2.4)$$

$$H_0^{JI(3)} : p_{ijk} = p_{\cdot\cdot k} p_{ij\cdot} \quad (i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, s; k = 1, \dots, t), \quad (2.5)$$

である。\$H_0^{MI}\$ は、\$H_0^{JI(1)}\$、\$H_0^{JI(2)}\$、\$H_0^{JI(3)}\$ の特別な場合である。つまり、

$$H_0^{MI} \subset \{H_0^{JI(1)}, H_0^{JI(2)}, H_0^{JI(3)}\}$$

である。

条件付き独立モデルを考えるにあたり、layer が与えられた場合での条件付き分布は、

$$\begin{aligned} P(\text{row} = i, \text{columns} = j \mid \text{layer} = k) &= \frac{P(\text{row} = i, \text{column} = j, \text{layer} = k)}{P(\text{layer} = k)} \\ &= \frac{p_{ijk}}{p_{\cdot\cdot k}} \end{aligned} \quad (2.6)$$

である。また、layer が与えられた場合での row と column の条件付き独立性は、

$$\begin{aligned} P(\text{row} = i, \text{column} = j \mid \text{layer} = k) &= \frac{P(\text{row} = i, \mid \text{layer} = k)}{P(\text{column} = j \mid \text{layer} = k)} \\ &= \frac{p_{i\cdot k} p_{\cdot jk}}{p_{\cdot\cdot k} p_{\cdot\cdot k}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

である。よって (2.6), (2.7) より、

$$p_{ijk} = \frac{p_{i\cdot k} p_{\cdot jk}}{p_{\cdot\cdot k}}$$

である。他も同様に求めることができるので、条件付き独立モデルの帰無仮説は、

$$H_0^{CI(1)} : p_{ijk} = \frac{p_{i\cdot k} p_{\cdot jk}}{p_{\cdot\cdot k}} \quad (i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, s; k = 1, \dots, t),$$

$$H_0^{CI(2)} : p_{ijk} = \frac{p_{ij\cdot} p_{\cdot jk}}{p_{\cdot j\cdot}} \quad (i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, s; k = 1, \dots, t),$$

$$H_0^{CI(3)} : p_{ijk} = \frac{p_{ij\cdot} p_{i\cdot k}}{p_{i\cdot\cdot}} \quad (i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, s; k = 1, \dots, t),$$

である。

バートレットモデルは、あるオッズ比が等しいモデルであり、3次元分割表の最終標準モデルである。layer を固定して、オッズ比を見たときにすべての layer におけるオッズ比が等しいことを意味している。よって、バートレットモデルの帰無仮説は、

$$H_0^B : p_{ijk} = \frac{p_{111} p_{ij1}}{p_{i11} p_{1j1}} = \frac{p_{11k} p_{ijk}}{p_{i1k} p_{1jk}}$$

である。これは、

$$\frac{p_{111} p_{i1k}}{p_{i11} p_{11k}} = \frac{p_{1j1} p_{ijk}}{p_{ij1} p_{1jk}}$$

とも同値である。つまり、column を固定した場合でも同値であり、row を固定した場合でも同値である。

2.5 シンプソンパラドックス

分割表のセルを安易に併合をして，周辺分割表を作成することには問題がある．以下，例を用いてシンプソンパラドックスを考察する．

表 2.3 例 1

	男		女			成功		失敗	
	成功	失敗	成功	失敗		成功	失敗		
手術 1	60	20	40	80	手術 1	100	100		
手術 2	100	50	10	30	手術 2	110	80		

例 2.2

表 2.3 の 3 次元分割表だと，手術 1 が男女ともによい結果だが，併合すると，手術 2 が良くなっている．

表 2.4 例 2

	死		生			死		生	
	多い	少ない	多い	少ない		多い	少ない	多い	少ない
病院 A	3	4	176	293	多い	20	373		
病院 B	17	2	197	23	少ない	6	316		

次に，表 2.4 出生前に受けた看護量と乳児の生死を 2 つの病院で比較したものを考える． H_0 は独立なものとする．3 次元分割表の場合は，

$$A : R^1 \approx 0 \leq \chi_1^2(0.01) = 3.84$$

$$B : R^1 \approx 0 \leq \chi_1^2(0.01) = 3.84.$$

よって，A, B ともにそれぞれ看護量と生死は関係ない．しかし，2 次元に併合すると，

$$R^1 = 5.26 > 3.84.$$

であるので，看護量と生死の関係がある．という結果となる．これがシンプソンパラドックスである．

2.6 モデルの分解

Caussinus [5] は対称モデルの分解定理を次のように与えた：

定理 2.1

対称モデルが成り立つための必要十分条件は、準対称モデルと周辺同等モデルの両方が成り立つことである。

証明 2.1

対称モデルが成り立つならば、準対称モデルと周辺同等モデルの両方が成り立つことは自明。準対称モデルと周辺同等モデルの両方が成り立つとき、対称モデルが成り立つことを以下で示す。準対称モデルが成り立つので、周辺確率は、

$$p_{j\cdot} = \mu_j \sum_{t=1}^r \nu_t q_{jt},$$

$$p_{\cdot k} = \nu_k \sum_{s=1}^r \mu_s q_{sk},$$

とあらわせる。よって、周辺同等モデルが成り立つことから、

$$\mu_j = \nu_k h_j$$

をえる。ただし、

$$h_j = \frac{\sum_{s=1}^r \mu_s q_{js}}{\sum_{t=1}^r \nu_t q_{jt}}$$

である。これを h_i の分子へ代入することにより次の関係式を得る：

$$h = Wh,$$

ただし、

$$h = (h_1, \dots, h_r)'$$

W は $r \times r$ 行列で、第 (j, s) 成分は

$$w_{js} = \frac{\nu_s q_{js}}{\sum_{t=1}^r \nu_t q_{jt}}$$

である。ここに、 $w_{js} > 0$ で、 $\sum_{s=1}^r w_{js} = 1$ であることから h は

$$h = c \mathbf{1}_r$$

となる。よって、 $\mu_j = c \nu_k$ をえる。すなわち対称モデルが成り立つ。

以上より、定理が導かれた。

定理 2.1 は実際のデータ解析において、対称モデルが成り立たないとき、分解したモデルのどちらかがより影響しているのかその原因をさぐるためにきわめて有効である。

2.7 適合度検定

$r \times r$ 分割表において, 総和 $Y_{..}$ は

$$Y_{..} = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r Y_{jk} = n,$$

ベクトル \mathbf{Y} は

$$\mathbf{Y} = (Y_{11}, Y_{12}, \dots, Y_{rr})' \sim \text{Mult}_{r \times r}(n; \mathbf{p}).$$

ただし, 確率ベクトル \mathbf{p} は,

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= (p_{11}, p_{12}, \dots, p_{rr})', \\ 0 < p_{jk} < 1 \quad (j = 1, \dots, r; k = 1, \dots, r) \end{aligned}$$

であり,

$$p_{..} = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r p_{jk} = 1.$$

対称性の検定のための一般的な統計量として, パワーダイバージェンス統計量

$$R^a = 2n \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r I^a(\hat{p}_{jk}, \tilde{p}_{jk})$$

を用いる。ただし,

$$I^a(e, f) = \begin{cases} \frac{1}{a(a+1)} e \left\{ \left(\frac{e}{f} \right)^a - 1 \right\} & (a \neq 0, -1), \\ e \log \left(\frac{e}{f} \right) & (a = 0), \\ f \log \left(\frac{f}{e} \right) & (a = -1). \end{cases}$$

R^0 は, 対数尤度比統計量で, R^1 は, ピアソンの X^2 統計量である。統計量 $R^{2/3}$ は, 適合度検定について, Cressie and Read [6] によって推奨された統計量である。 χ^2 は,

$$\chi^2 = n \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \frac{(\hat{p}_{jk} - \tilde{p}_{jk})^2}{\tilde{p}_{jk}}$$

として定義されており, \hat{p}_{jk} は制約条件の無いもとでの p_{jk} 最尤推定量であり, \tilde{p}_{jk} はモデル H のもとでの p_{jk} の最尤推定量である。また, $a = 0$ のとき, 対数尤度比統計量

$$G^2 = 2 \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \hat{p}_{jk} \log \left(\frac{\hat{p}_{jk}}{\tilde{p}_{jk}} \right)$$

である。これらの最尤推定量は一部のモデルのもとでは直接求めることができるが, そのほかのモデルのもとでは反復計算法により求める必要がある。

例 2.3

英国女性の視力データを考察する．表 2.5 は各モデルに対する対数尤度比統計量 G^2 を与えている．

表 2.5 英国女性の裸眼視力データに適用したモデルに対する G^2 統計量

モデル	自由度	G^2
H_0^S	6	19.25*
H_0^{QS}	3	7.27
H_0^{MH}	3	11.99*
H_0^{CS}	5	7.35

* は 5% 有意

当てはまりの悪いものには 5% 有意を適用している．定理 2.1 を用いることで，対称モデル H_0^S の適合度が悪い原因は，準対称モデル H_0^{QS} よりむしろ，周辺同等モデル H_0^{MH} であることがわかる．このようにモデルを分解することで，モデルのどこに適合度の悪い原因があるかを知ることができるという利点がある．

2.8 尺度

観測度数 $\{y_{jk}\}$ の分割表データに対して未知の確率 $\{p_{jk}\}$ の構造を示すモデル（たとえば，独立モデルや対称モデル）が成り立つかどうかは適合度検定により調べられる．そして，モデルが成り立たないときは，別のモデルを適用したり，また，成り立たない原因を探るために，モデルの分解等を行なって詳細な解析が進められる．さらに，モデルが成り立たないときは，尺度を用いて，確率分布 $\{p_{jk}\}$ がそのモデルからどれくらい隔たりがあるかを測ることに興味がある．特にモデルからの最大の隔たりを持つ確率構造を定義し，確率分布 $\{p_{jk}\}$ が最大の隔たりを持つ方向へモデルからどれくらいずれているかを尺度を用いて測ることに興味がある．この場合，適合度検定統計量はモデルが成り立つかどうかを調べることができるが，しかし，モデルが成り立たないときモデルからの隔たりの程度を測ることはできない．また，尺度は複数の分割表データにおいてモデルからの隔たりの程度を比較するのにきわめて有効である．

分割表解析において種々の尺度が提案されてきた．一方，Tomizawa [23] は種々の対称性に関するモデルからの隔たりを測る尺度を提案している．以下では，名義カテゴリ正方分割表に適用する対称モデルからの隔たりを測る尺度を紹介する．

$\{p_{jk} + p_{kj}\}, j \neq k$ はすべて正として,

$$\begin{aligned}\delta &= \sum_{s \neq t} \sum p_{st}, \\ p_{jk}^* &= \frac{p_{jk}}{\delta}, \\ p_{jk}^s &= \frac{1}{2}(p_{jk}^* + p_{kj}^*)\end{aligned}$$

とする. 対称モデルからの隔たりを測る尺度を次のように導入する: $\lambda > -1$ の任意の実数に対して

$$\Phi^{(\lambda)} = \frac{\lambda(\lambda+1)}{2^\lambda - 1} I^{(\lambda)}(\{p_{jk}^*\}; \{p_{jk}^s\}),$$

ただし,

$$I^{(\lambda)}(p_{jk}^*; p_{jk}^s) = \frac{1}{\lambda(\lambda+1)} \sum_{j < k} \sum p_{jk}^* \left\{ \left(\frac{p_{jk}^*}{p_{jk}^s} \right)^\lambda - 1 \right\}$$

であり, $\Phi^{(0)}$ は, $\lambda \rightarrow 0$ のときの $\Phi^{(\lambda)}$ の極限で定義する. また, $I^{(\lambda)}(p_{jk}^*; p_{jk}^s)$ はパワーダイバージェンスである. 特に, $\lambda = 0$ のとき $I^{(0)} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} I^{(\lambda)}$ は Kullback-Leibler 情報量である.

3 正方分割表

3 正方分割表

3.1 正方分割表の対称性検定

$r \times r$ 分割表において, 総和 $Y_{..}$ は固定された値 n とする. すなわち,

$$Y_{..} = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r Y_{jk} = n.$$

ベクトル \mathbf{Y}_{rr} は

$$\mathbf{Y}_{rr} = (Y_{11}, Y_{12}, \dots, Y_{rr})' \sim \text{Mult}_{r \times r}(n; \mathbf{p}_{rr}).$$

ただし, 確率ベクトル \mathbf{p}_{rr} は,

$$\mathbf{p}_{rr} = (p_{11}, p_{12}, \dots, p_{rr})',$$

$$0 < p_{jk} < 1 \quad (j = 1, \dots, r; k = 1, \dots, r)$$

であり,

$$p_{..} = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r p_{jk} = 1.$$

対称性のモデルを考えるので, 帰無仮説 H_0^S を

$$H_0^S : p_{jk} = p_{kj} \quad (j, k = 1, 2, \dots, r; j < k),$$

とする. 対称性の帰無仮説 H_0^S のもとでの p_{jk} の最尤推定量は

$$\tilde{p}_{jk} = \frac{Y_{jk} + Y_{kj}}{2n} \quad (j, k = 1, 2, \dots, r),$$

制約条件のない場合の p_{jk} の最尤推定量は

$$\hat{p}_{jk} = \frac{Y_{jk}}{n} \quad (j, k = 1, 2, \dots, r)$$

となる.

対称性の検定のための統計量として ϕ -ダイバージェンス 統計量 C_ϕ^S を用いる. C_ϕ^S は,

$$C_\phi^S = 2n \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \tilde{p}_{jk} \phi \left(\frac{\hat{p}_{jk}}{\tilde{p}_{jk}} \right)$$

として定義される. ここで, $\phi(t)$ は $t > 0$ において, 凸関数であり

$$\phi(1) = \phi'(1) = 0, \phi''(1) = 1.$$

この関数 $\phi(t)$ を $\phi(t)_a$ として

$$\phi_a(t) = \begin{cases} \{a(a+1)\}^{-1} \{t^{a+1} - t + a(1-t)\} & (a \neq 0, -1), \\ t \log t + 1 - t & (a = 0), \\ -\log t - 1 + t & (a = -1), \end{cases}$$

とおくと, C_ϕ^S のパワーダイバージェンスに基づく統計量は

$$R_S^a \equiv C_{\phi_a}^S = 2n \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r I^a(\hat{p}_{jk}, \tilde{p}_{jk})$$

となる. ただし,

$$I^a(e, f) = \begin{cases} \frac{1}{a(a+1)} e \left\{ \left(\frac{e}{f} \right)^a - 1 \right\} & (a \neq 0, -1), \\ e \log \frac{e}{f} & (a = 0), \\ f \log \frac{f}{e} & (a = -1). \end{cases}$$

ここで, R_S^0 は対数尤度比統計量となり, R_S^1 はピアソンの χ^2 統計量となる. 帰無仮説 H_0^S のもとで, C_ϕ^S は自由度 $r(r-1)/2$ の χ^2 極限分布を持つことが知られている.

これから, H_0^S のもとでの C_ϕ の分布の多変量エッジワース展開に基づく近似式を導出する. そしてこの近似式を利用した改良変換統計量を紹介する.

第 3.2 節では, H_0^S のもとでの \mathbf{Y}_{rr} の確率の局所エッジワース展開を考察する. 第 3.4 節では, 変数が連続であると仮定した場合の H_0^S のもとでの C_ϕ^S の分布における漸近展開式を導出する. 第 5 章においては, その漸近展開式を用いて新しい変換統計量の式を提案する. 第 6 章では, パワーダイバージェンスに基づく統計量とその変換統計量について小標本においてよい近似がなされているか, 具体的な数値計算例を用いて検討する.

3.2 局所エッジワース展開

対称性の帰無仮説のもとでの ϕ -ダイバージェンス 統計量を考えるので,

$$\mathbf{Y}_{rr} = (Y_{11}, Y_{12}, \dots, Y_{rr})' \sim \text{Mult}_{r \times r}(n; \mathbf{p}_{rr}^S)$$

とする. ただし,

$$\mathbf{p}_{rr}^S = (p_{11}, p_{12}, \dots, p_{r-1}, p_{rr})'$$

である.

確率変数 Y_{jk} から X_{jk} への変換を

$$X_{jk} = \frac{Y_{jk} - np_{jk}}{\sqrt{n}} \quad (j, k = 1, 2, \dots, r)$$

とする. また,

$$\mathbf{X}_{rr} = (X_{11}, X_{12}, \dots, X_{r-1})'$$

とおと, $r^2 - 1$ 次元確率ベクトル \mathbf{X}_{rr} は集合

$$L = \left\{ \mathbf{x}_{rr} = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{r-1})' : \mathbf{x}_{rr} = \frac{\mathbf{y}_{rr} - n\mathbf{q}_{rr}}{\sqrt{n}}, \mathbf{y}_{rr} \in U_{rr} \right\}$$

上で値をとる格子点分布にしたがう。ただし,

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_{rr} &= (p_{11}, p_{12}, \dots, p_{r-1, r-1})', \\ U_{rr} &= \{\mathbf{y}_{rr} = (y_{11}, y_{12}, \dots, y_{r-1, r-1})' : 0 \leq y_{jk}, \mathbf{1}'_N \mathbf{y}_{rr} \leq n\}\end{aligned}$$

である。ただし,

$$N = r^2 - 1.$$

3.3 Lemma 2.1 の適用

以下の定理は Siotani and Fujikoshi [18] の Lemma 2.1 での $\mathbf{q} = (p_1, \dots, p_k)'$ に $\mathbf{q}_{rr} = (p_{11}, \dots, p_{r-1, r-1})'$ を代入することで与えられている。

定理 3.1

$\mathbf{x}_{rr} = (\mathbf{y}_{rr} - n\mathbf{q}_{rr})/\sqrt{n}$ とすると, 任意の $\mathbf{y}_{rr} \in U_{rr}$ に対して,

$$\Pr(\mathbf{X}_{rr} = \mathbf{x}_{rr} | H_0^S) = n^{-N/2} g(\mathbf{x}_{rr}) \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} h_1(\mathbf{x}_{rr}) + \frac{1}{n} h_2(\mathbf{x}_{rr}) + O(n^{-3/2}) \right\}$$

が成立する。ただし,

$$g(\mathbf{x}_{rr}) = (2\pi)^{-N/2} |\Sigma_{rr}|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}'_{rr} \Sigma_{rr}^{-1} \mathbf{x}_{rr}\right), \quad (3.1)$$

$$\Sigma_{rr} = \text{diag}(p_{11}, p_{12}, \dots, p_{r-1, r-1}) - \mathbf{q}_{rr} \mathbf{q}'_{rr}, \quad (3.2)$$

$$h_1(\mathbf{x}_{rr}) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \frac{x_{jk}}{p_{jk}} + \frac{1}{6} \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \frac{x_{jk}^3}{p_{jk}^2},$$

$$h_2(\mathbf{x}_{rr}) = \frac{1}{2} \{h_1(\mathbf{x})\}^2 + \frac{1}{12} \left(1 - \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \frac{1}{p_{jk}} \right) + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \left(\frac{x_{jk}}{p_{jk}} \right)^2 - \frac{1}{12} \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \frac{x_{jk}^4}{p_{jk}^3},$$

$$\mathbf{x}_{rr} = -(x_{11} + \dots + x_{r-1, r-1}).$$

3.4 H_0^S のもとでの C_ϕ^S の分布における漸近近似

H_0^S のもとでの C_ϕ^S の分布における多変量エッジワース展開に基づく近似を考察する。すなわち,

$$\Pr(\mathbf{x}_{rr} \in b_{l_2} | H_0^S) \approx J_1^S + J_2^S$$

である。 J_1^S 項は多変量エッジワース展開の項であり, J_2^S 項は不連続項である。また, $J_2^S = O(n^{-1/2})$ であることは知られている。

3.5 J_1^S 項の近似について

ここでは J_1^S 項の評価式を求めていく。
よって、以下の定理をえる。

定理 3.2

$$J_1^S = \Pr(\chi_{r(r-1)/2}^2 \leq b_{l_2}) + \frac{1}{n} \sum_{h=0}^2 w_h^\phi \Pr(\chi_{r(r-1)/2+2h}^2 \leq b_{l_2}) + o(n^{-1}) \quad (3.3)$$

ただし、

$$w_0^\phi = -\frac{1}{8} \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{k=j+1}^r \frac{1}{p_{jk}}, \quad (3.4)$$

$$w_1^\phi = \frac{1}{16} \left\{ 4 - \phi^{(4)}(1) \right\} \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{k=j+1}^r \frac{1}{p_{jk}}, \quad (3.5)$$

$$w_2^\phi = -\frac{1}{16} \left\{ 2 - \phi^{(4)}(1) \right\} \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{k=j+1}^r \frac{1}{p_{jk}} \quad (3.6)$$

この証明は、付録 A で示す。この定理の ϕ を ϕ_a とするとパワーダイバージェンス統計量による次の系をえる。

系 3.1

$$J_1^S = \Pr(\chi_{r(r-1)/2}^2 \leq b_{l_2}) + \frac{1}{n} \sum_{h=0}^2 w_h^{(a)} \Pr(\chi_{r(r-1)/2+2h}^2 \leq b_{l_2}) + o(n^{-1})$$

として評価される。ただし、 $w_j^{(a)}$ は w_j^ϕ において、 $\phi^{(4)}(1) = (a-1)(a-2)$ として定義されている。

$B_\phi(b_{l_2})$ は

$$B_\phi(b_{l_2}) = \{ \mathbf{x}_{rr} = (x_1^*, \dots, x_{r^2-1}^*)' : C_\phi^S(\mathbf{x}_{rr}) \equiv C_\phi^S(\mathbf{x}_{rr}^*) < b_{l_2} \}$$

として定義される集合とし、

$$x_{l_2}^* = x_{jk}, \quad l_2 = (j-1)r + k \quad (j = 1, \dots, r; k = 1, \dots, r),$$

そして、 $C_\phi^S(\mathbf{x}_{rr})$ は (A.1) で定義された $C_\phi^S(\mathbf{x}_{rr})$ において、 \mathbf{X}_{rr} に \mathbf{x}_{rr} を代入することでえられる。

多項分布の適合度検定統計量の分布の近似における研究としては、単純帰無仮説のもとでの分布の漸近展開に基づく近似が、Yarnold [24] がピアソンの χ^2 統計量を Siotani and Fujikoshi [18] は対数尤度比統計量と Freeman-Tukey 統計量を考察している。また、パワーダイバージェンス統計量は Read [15] によって示されている。 ϕ -ダイバージェンス統計量についての漸近近似は Menéndez *et al.* [13] によって与えられた。これらの展開式は、連続項と離散項からなっており、Yarnold [24], Read [15] は離散項の一部も考慮した近似式の数値実験を行い、性能の良さを示している。

そして、Taneichi and Sekiya [21] は 2 次元分割表での独立性検定における改良変換統計量について ϕ -ダイバージェンス統計量を用いて論じた。この考えを 3 次元に拡張したものとして、Kobe *et al.* [10] が 1 要因対他の 2 要因の独立性検定における改良変換統計量について ϕ -ダイバージェンス統計量を用いて論じている。

なお、 2×2 分割表におけるカイ二乗統計量の分布の近似については小倉 [25] の結果と一致する。

3.6 J_2^S 項の近似について

集合 $B_{l_2} \subset R_{r^2-2}$ ($l_2 = 1, \dots, r^2 - 1$) と R_{r^2-2} 上から R_1 への連続関数 $\eta_{l_2}(\cdot), \theta_{l_2}(\cdot)$ を考える。この連続関数 $\eta_{l_2}(\cdot), \theta_{l_2}(\cdot)$ は、(4.16) で定義される $B_\phi(b_{l_2})$ を

$$B_\phi(b_{l_2}) = \{\mathbf{x}_{rr}^* = (x_1^*, \dots, x_{r^2-1}^*)' : \eta_{l_2}(\tilde{\mathbf{x}}_{l_2}^*) < x_{l_2}^* < \theta_{l_2}(\tilde{\mathbf{x}}_{l_2}^*), \\ \mathbf{x}_{l_2}^* = (x_1^*, \dots, x_{l_2-1}^*, x_{l_2+1}^*, \dots, x_{r^2-1}^*)' \in B_{l_2}\} \quad (3.7)$$

として定義できるものとする。そうすると、

$$J_2^S = -\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l_2=1}^{r^2-1} n^{-(r^2-1-l_2)/2} \sum_{x_{l_2+1}^* \in M_{l_2+1}^\phi} \cdots \sum_{x_{r^2-1}^* \in M_{r^2-1}^\phi} \\ \times \int \cdots \int_{B_{l_2}} [S_{l_2}(\sqrt{n}x_{l_2}^* + np_{l_2}^*)f(\mathbf{x}_{rr}^*)]_{\eta_{l_2}(\tilde{\mathbf{x}}_{l_2}^*)}^{\theta_{l_2}(\tilde{\mathbf{x}}_{l_2}^*)} dx_1^* \cdots dx_{l_2-1}^*$$

となる。ただし、

$$M_{l_2}^\phi = B_\phi(b_{l_2}) \cap L_{l_2}, \quad l_2 = 1, \dots, r^2 - 1, \\ L_{l_2} = \left\{ x_{l_2} : x_{l_2} = \frac{y_{l_2} - np_{l_2}^*}{\sqrt{n}}, y_{l_2} \text{ は整数} \right\}, \\ p_{l_2}^* = p_{jk}, \quad l_2 = (j-1)r + k \quad (j = 1, \dots, r; k = 1, \dots, r) \\ S_1(t) = t - [t] - \frac{1}{2}$$

また、 $g(\cdot)$ は (3.1) により定義されている。Yarnold [24] と同じ方法でこの場合の検定統計量の J_2^S 項を評価するためには、

$$[S_1(\sqrt{n}x_{l_2}^* + np_{l_2}^*)f(\mathbf{x}_{rr}^*)]_{\eta_{l_2}(\tilde{\mathbf{x}}_{l_2}^*)}^{\theta_{l_2}(\tilde{\mathbf{x}}_{l_2}^*)} = c [S_1(\sqrt{n}x_{l_2}^* + np_{l_2}^*)]_{\eta_{l_2}(\tilde{\mathbf{x}}_{l_2}^*)}^{\theta_{l_2}(\tilde{\mathbf{x}}_{l_2}^*)} + o(1) \quad (3.8)$$

を示す必要がある。ただし、 c は定数とする。

(3.7) 式における $\eta_{l_2}(\tilde{x}_{l_2}^*)$ や $\theta_{l_2}(\tilde{x}_{l_2}^*)$ は、 $C_\phi^S(\mathbf{x}_{rr}) = C_\phi^S(\mathbf{x}_{rr}^*) = b$ (b は定数) となるような $x_{l_2}^*$ の値である。よって、 $x_{l_2}^* = \eta_{l_2}(\tilde{x}_{l_2}^*)$ または、 $x_{l_2}^* = \theta_{l_2}(\tilde{x}_{l_2}^*)$ であるとき、(B.2), (B.3) を踏まえて考えると

$$\mathbf{x}'_{rr} \Sigma_{rr}^{-1} \mathbf{x}_{rr} = \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{k=j+1}^r \frac{(x_{jk} - x_{jk}^*)^2}{p_{jk}} + o(1)$$

となることがわかる。したがって、 $x_{l_2}^* = \eta_{l_2}(\tilde{x}_{l_2}^*)$ または、 $x_{l_2}^* = \theta_{l_2}(\tilde{x}_{l_2}^*)$ のとき $\mathbf{x}'_{rr} \Sigma_{rr}^{-1} \mathbf{x}_{rr}$ を定数として評価できない。

$\mathbf{x}'_{rr} \Sigma_{rr}^{-1} \mathbf{x}_{rr}$ が定数である場合に限り $f(\mathbf{x}_{rr})$ が定数であるから、(3.8) を証明することができない。

よって、ここでは Taneichi *et al.* [19] の (2.6) 式で与えられる \hat{K}_2 のような単純な型の J_2^S 項の近似をえることができない。

4 3次元分割表

4 3次元分割表

4.1 3次元分割表について

$r \times s \times t$ 分割表において,

$$\mathbf{X}_{rst} = (X_{111}, \dots, X_{11t}, \dots, X_{1s1}, \dots, X_{1st}, \dots, X_{r11}, \dots, X_{r1t}, \dots, X_{rs1}, \dots, X_{rst})'$$

が多項分布

$$\text{Mult}_{rst}(n; \mathbf{p}_{rst})$$

にしたがうとする。ただし,

$$\mathbf{p}_{rst} = (p_{111}, \dots, p_{11t}, \dots, p_{1s1}, \dots, p_{1st}, \dots, p_{r11}, \dots, p_{r1t}, \dots, p_{rs1}, \dots, p_{rst})',$$

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t X_{ijk} = n,$$

$$0 < p_{ijk} < 1 \quad (i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, s; k = 1, \dots, t)$$

そして

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t p_{ijk} = 1 \quad (i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, s; k = 1, \dots, t)$$

である。

表 4.1 $r \times s \times t$ 分割表

	$X_{1..}$...	$X_{r..}$				Total		
	X_{111}	...	X_{11k}	...	X_{11t}	...	X_{r11}	...	X_{r1k}	...	X_{r1t}	$X_{.1.}$
	\vdots		\vdots		\vdots	...	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots
	X_{1j1}				...	X_{rj1}				$X_{.j.}$		
	\vdots		\vdots		\vdots	...	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots
	X_{1s1}				...	X_{rs1}				$X_{.s.}$		
	\vdots		\vdots		\vdots	...	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots
Total	$X_{.1.}$...	$X_{.k.}$...	$X_{.t.}$...	$X_{r.1}$...	$X_{r.k}$...	$X_{r.t}$	n

4.2 完全独立性の帰無仮説のもとでの最尤推定量

制約のない条件のもとでの p_{ijk} の最尤推定量は,

$$\hat{p}_{ijk} = \frac{X_{ijk}}{n} \quad (i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, s; k = 1, \dots, t)$$

で与えられている。ここで、帰無仮説 H_0^{MI} のもとでの p_{ijk} の最尤推定量は、

$$\hat{p}_{ijk}^{MI} = \hat{p}_{i\cdot} \hat{p}_{\cdot j} \hat{p}_{\cdot\cdot k} \quad (i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, s; k = 1, \dots, t)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \hat{p}_{i\cdot} &= \frac{X_{i\cdot}}{n} \quad (i = 1, \dots, r), \\ \hat{p}_{\cdot j} &= \frac{X_{\cdot j}}{n} \quad (j = 1, \dots, s), \\ \hat{p}_{\cdot\cdot k} &= \frac{X_{\cdot\cdot k}}{n} \quad (k = 1, \dots, t) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} X_{i\cdot} &= \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t X_{ijk} \quad (i = 1, \dots, r), \\ X_{\cdot j} &= \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^t X_{ijk} \quad (j = 1, \dots, s), \\ X_{\cdot\cdot k} &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s X_{ijk} \quad (k = 1, \dots, t) \end{aligned}$$

とする。帰無仮説 H_0^{MI} の検定のための ϕ -ダイバージェンス統計量 C_ϕ^{MI} は、

$$C_\phi^{MI} = 2n \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \hat{p}_{i\cdot} \hat{p}_{\cdot j} \hat{p}_{\cdot\cdot k} \phi \left(\frac{\hat{p}_{ijk}}{\hat{p}_{i\cdot} \hat{p}_{\cdot j} \hat{p}_{\cdot\cdot k}} \right)$$

と与えられている。このとき、 $\phi(t)$ は

$$\phi(1) = \phi'(1) = 0, \phi''(1) = 1$$

を満たしている。また、 $t > 0$ において、凸関数である。よって、

$$\phi_a(t) = \begin{cases} \{a(a+1)\}^{-1} \{t^{a+1} - t + a(1-t)\} & (a \neq 0, -1), \\ t \log t + 1 - t & (a = 0), \\ -t - \log t - 1 + t & (a = -1) \end{cases}$$

とおくと、 $\phi_a(t)$ に基づく ϕ -ダイバージェンス統計量 $C_{\phi_a}^{MI}$ は、パワーダイバージェンス統計量

$$R_{MI}^a \equiv C_{\phi_a}^{MI} = 2n \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t I^a(\hat{p}_{ijk}, \hat{p}_{i\cdot} \hat{p}_{\cdot j} \hat{p}_{\cdot\cdot k})$$

となる。このとき、

$$I^a(e, f) = \begin{cases} \frac{1}{a(a+1)} e \left(\frac{e}{f} - 1 \right) & (a \neq 0, -1), \\ e \log \frac{e}{f} & (a = 0), \\ f \log \frac{f}{e} & (a = -1). \end{cases}$$

である。

(2.2) の帰無仮説 H_0^{MI} のもとで, C_ϕ^{MI} は自由度 $rst - r - s - t + 2$ の χ^2 分布を極限分布に持つことがわかる。

例 4.1 (完全独立性)

表 4.2 の場合を考える。

表 4.2 例

性格		A		B		Total
コレステロール		正常	高い	正常	高い	
血圧	正常	716	207	819	186	1928
	高い	79	25	67	22	193
Total		795	232	886	208	2121

表 4.3 最尤推定値

	$\hat{m}_{1..}$		$\hat{m}_{2..}$	
	$\hat{m}_{..1}$	$\hat{m}_{..2}$	$\hat{m}_{.1.}$	$\hat{m}_{.2.}$
$\hat{m}_{..1}$	739.88	193.66	788.15	206.30
$\hat{m}_{..2}$	74.065	19.386	78.897	20.651

期待度数を \hat{m}_{ijk} とする。(2.2) より, 表 4.3 が求められる。よって, 対数尤度比統計量は,

$$R_{MI}^0 = 8.72$$

ピアソンの X^2 統計量は,

$$R_{MI}^1 = 8.73$$

である。ここで $\chi_4^2(0.05) = 9.49$ から, $H_0^{(1)}: p_{ijk} = p_{i..}p_{.j.}p_{..k}$ を有意水準 5% で棄却できない。しかし, この程度の値からでは, 棄却できないものの, 完全独立性のモデルが適しているとの確証も得られない。

4.3 同時独立性の帰無仮説のもとでの最尤推定量

一方, 同時帰無仮説 $H_0^{JI(h)}$ ($h = 1, 2, 3$) のもとでの, p_{ijk} の最尤推定量はそれぞれ,

$$\begin{aligned}\hat{p}_{ijk}^{JI(1)} &= \hat{p}_{i..}\hat{p}_{.jk} & (i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, s; k = 1, \dots, t), \\ \hat{p}_{ijk}^{JI(2)} &= \hat{p}_{.j.}\hat{p}_{i.k} & (i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, s; k = 1, \dots, t), \\ \hat{p}_{ijk}^{JI(3)} &= \hat{p}_{..k}\hat{p}_{ij.} & (i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, s; k = 1, \dots, t)\end{aligned}$$

と与えられ、ここで、

$$\begin{aligned}\hat{p}_{ij\cdot} &= \frac{X_{ij\cdot}}{n} \quad (i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, s), \\ \hat{p}_{i\cdot k} &= \frac{X_{i\cdot k}}{n} \quad (i = 1, \dots, r; k = 1, \dots, t), \\ \hat{p}_{\cdot jk} &= \frac{X_{\cdot jk}}{n} \quad (j = 1, \dots, s; k = 1, \dots, t), \\ \hat{p}_{i\cdot\cdot} &= \frac{X_{i\cdot\cdot}}{n} \quad (i = 1, \dots, r), \\ \hat{p}_{\cdot j\cdot} &= \frac{X_{\cdot j\cdot}}{n} \quad (j = 1, \dots, s), \\ \hat{p}_{\cdot\cdot k} &= \frac{X_{\cdot\cdot k}}{n} \quad (k = 1, \dots, t),\end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned}X_{ij\cdot} &= \sum_{k=1}^t X_{ijk} \quad (i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, s), \\ X_{i\cdot k} &= \sum_{j=1}^s X_{ijk} \quad (i = 1, \dots, r; k = 1, \dots, t), \\ X_{\cdot jk} &= \sum_{i=1}^r X_{ijk} \quad (j = 1, \dots, s; k = 1, \dots, t), \\ X_{i\cdot\cdot} &= \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t X_{ijk} \quad (i = 1, \dots, r), \\ X_{\cdot j\cdot} &= \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^t X_{ijk} \quad (j = 1, \dots, s), \\ X_{\cdot\cdot k} &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s X_{ijk} \quad (k = 1, \dots, t)\end{aligned}$$

である。帰無仮説 $H_0^{JI(h)}$ ($h = 1, 2, 3$) の検定のための ϕ -ダイバージェンス統計量 $C_\phi^{JI(h)}$ はそれぞれ、

$$C_\phi^{JI(h)} = \begin{cases} 2n \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \hat{p}_{i\cdot\cdot} \hat{p}_{\cdot jk} \phi \left(\frac{\hat{p}_{ijk}}{\hat{p}_{i\cdot\cdot} \hat{p}_{\cdot jk}} \right) & (h = 1), \\ 2n \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \hat{p}_{\cdot j\cdot} \hat{p}_{i\cdot k} \phi \left(\frac{\hat{p}_{ijk}}{\hat{p}_{\cdot j\cdot} \hat{p}_{i\cdot k}} \right) & (h = 2), \\ 2n \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \hat{p}_{\cdot\cdot k} \hat{p}_{ij\cdot} \phi \left(\frac{\hat{p}_{ijk}}{\hat{p}_{\cdot\cdot k} \hat{p}_{ij\cdot}} \right) & (h = 3) \end{cases} \quad (4.1)$$

と与えられている。パワーダイバージェンス統計量に基づく $C_{\phi_a}^{JI(h)}$ の統計量はそれぞれ、

$$R_{JI(h)}^a \equiv C_{\phi_a}^{(h)} = \begin{cases} 2n \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t I^a(\hat{p}_{ijk}, \hat{p}_{i\cdot} \hat{p}_{\cdot jk}) & (h=1), \\ 2n \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t I^a(\hat{p}_{ijk}, \hat{p}_{\cdot j} \hat{p}_{i\cdot k}) & (h=2), \\ 2n \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t I^a(\hat{p}_{ijk}, \hat{p}_{\cdot\cdot k} \hat{p}_{ij\cdot}) & (h=3) \end{cases} \quad (4.2)$$

となる。

また、(2.3), (2.4), (2.5) における帰無仮説 $H_0^{JI(h)}$ ($h=2,3,4$) のもとで、 $C_{\phi}^{JI(h)}$ ($h=1,2,3$) はそれぞれ自由度 $(r-1)(s-1)$ の χ^2 分布, 自由度 $(s-1)(rt-1)$ の χ^2 分布, 自由度 $(t-1)(rs-1)$ の χ^2 分布を極限分布にもつ。

表 4.4

学校の危険度 家庭の状態		低		中		高	
		非危険	危険	非危険	危険	非危険	危険
クラスの態度	普通	16	7	15	34	5	3
	逸脱	1	1	3	8	1	3

例 4.2 (同時独立性)

$H_0^{JI(1)}$ を検定することは、2つの row (普通, 逸脱) と 6つの column (低・非危険, 低・危険, 中・非危険, 中・危険, 高・非危険, 高・危険) の独立性を検定することになる。 $H_0^{JI(1)}$ のもとでの p_{ijk} の最尤推定量は、

$$\hat{p}_{ijk}^{JI(1)} = \hat{p}_{i\cdot} \hat{p}_{\cdot jk} = \left(\frac{X_{i\cdot}}{n} \right) \left(\frac{X_{\cdot jk}}{n} \right)$$

である。 $\hat{m}_{ijk}^{JI(1)}$ の最尤推定は、

$$\hat{m}_{ijk}^{JI(1)} = n \hat{p}_{ijk}^{JI(1)} = \frac{X_{i\cdot} X_{\cdot jk}}{n}$$

である。よって、表 4.5 のようになる。

表 4.5 表 4.4 の最尤推定量

学校の危険度 家庭の状態		低		中		高	
		非危険	危険	非危険	危険	非危険	危険
クラスの態度	普通 ($\hat{m}_{1jk}^{(2)}$)	14.02	6.60	14.85	34.64	4.95	4.95
	逸脱 ($\hat{m}_{2jk}^{(2)}$)	2.98	1.40	3.15	7.36	1.05	1.05

ここで,

$$R_{JI(1)}^0 = 5.56, \quad R_{JI(1)}^1 = 6.19$$

であり,

$$(r-1)(st-1) = (2-1)(6-1) = 5$$

より, 自由度 5 の χ^2 分布となる. よって,

$$\chi_5^2(0.05) = 11.07$$

から,

$$H_0^{JI(2)} : p_{ijk} = p_{i\cdot}p_{\cdot jk}$$

では, 有意水準 5% で採択される.

∴ 逸脱行動と, [家庭の状態, 学校の危険度] とは, 独立である.

よって, 逸脱行動の有無を併合して, 周辺分割表による家庭での状態と学校の危険度の独立性に興味があつて, 独立性を論じて, シンプソンパラドックスによる問題を心配しなくてよい.

そこで, 周辺分割表を用いて, 家庭の状態と学校の危険度の独立性を論じる.

表 4.6

学校の危険度		低	中	高
家庭の状態	非危険	17	18	6
	危険	8	42	6

周辺分割表における独立モデルは,

$$H_0^* : p_{\cdot jk} = p_{\cdot j}p_{\cdot \cdot k} \quad (j = 1, \dots, s; k = 1, \dots, t)$$

であり, 最尤推定量は,

$$\hat{m}_{\cdot jk} = n\hat{p}_{\cdot j}\hat{p}_{\cdot \cdot k} = \frac{X_{\cdot j}X_{\cdot \cdot k}}{n}$$

である. よって

表 4.7 表 4.6 の最尤推定量

学校の危険度		低	中	高
家庭の状態	非危険 ($\hat{m}_{\cdot 1}$)	10.57	25.36	5.07
	危険 ($\hat{m}_{\cdot 2}$)	14.43	34.64	6.93

表 4.7 となる. ここで,

$$R^0 = 10.86, \quad R^1 = 10.78$$

であり,

$$(s-1)(t-1) = 2$$

より, 自由度 2 の χ^2 分布となる. よって,

$$\chi_2^2(0.01) = 9.21$$

から, モデル H_0^* は, 有意水準が, 1% でも棄却される.

∴ 家庭の状態と, 学校の危険度は独立でなく, 関係がある.

4.4 条件付き独立性の帰無仮説もとでの最尤推定量

条件付き独立性の帰無仮説 $H_0^{CI(h)}$ ($h = 1, 2, 3$) のもとでの, p_{ijk} の最尤推定量は,

$$\begin{aligned}\hat{p}_{ijk}^{CI(1)} &= \frac{\hat{p}_{ij} \cdot \hat{p}_{i \cdot k}}{\hat{p}_{i \cdot}} & (i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, s; k = 1, \dots, t) \\ \hat{p}_{ijk}^{CI(2)} &= \frac{\hat{p}_{ij} \cdot \hat{p}_{\cdot jk}}{\hat{p}_{\cdot j}} & (i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, s; k = 1, \dots, t) \\ \hat{p}_{ijk}^{CI(3)} &= \frac{\hat{p}_{i \cdot k} \cdot \hat{p}_{\cdot jk}}{\hat{p}_{\cdot k}} & (i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, s; k = 1, \dots, t)\end{aligned}$$

である.

帰無仮説 $H_0^{CI(h)}$ ($h = 1, 2, 3$) の検定のための ϕ -ダイバージェンス統計量 $C_\phi^{CI(h)}$ はそれぞれ,

$$C_\phi^{CI(h)} = \begin{cases} 2n \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \frac{\hat{p}_{ij} \cdot \hat{p}_{i \cdot k}}{\hat{p}_{i \cdot}} \phi \left(\frac{\hat{p}_{ijk}}{\hat{p}_{ij} \cdot \hat{p}_{i \cdot k} / \hat{p}_{i \cdot}} \right) & (h = 1), \\ 2n \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \frac{\hat{p}_{ij} \cdot \hat{p}_{\cdot jk}}{\hat{p}_{\cdot j}} \phi \left(\frac{\hat{p}_{ijk}}{\hat{p}_{ij} \cdot \hat{p}_{\cdot jk} / \hat{p}_{\cdot j}} \right) & (h = 2), \\ 2n \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \frac{\hat{p}_{i \cdot k} \cdot \hat{p}_{\cdot jk}}{\hat{p}_{\cdot k}} \phi \left(\frac{\hat{p}_{ijk}}{\hat{p}_{i \cdot k} \cdot \hat{p}_{\cdot jk} / \hat{p}_{\cdot k}} \right) & (h = 3) \end{cases}$$

と与えられている. パワーダイバージェンス統計量に基づく $C_{\phi_a}^{CI(h)}$ の統計量はそれぞれ,

$$R_{CI(h)}^a \equiv C_{\phi_a}^{CI(h)} = \begin{cases} 2n \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t I^a \left(\hat{p}_{ijk}, \frac{\hat{p}_{ij} \cdot \hat{p}_{i \cdot k}}{\hat{p}_{i \cdot}} \right) & (h = 1), \\ 2n \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t I^a \left(\hat{p}_{ijk}, \frac{\hat{p}_{ij} \cdot \hat{p}_{\cdot jk}}{\hat{p}_{\cdot j}} \right) & (h = 2), \\ 2n \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t I^a \left(\hat{p}_{ijk}, \frac{\hat{p}_{i \cdot k} \cdot \hat{p}_{\cdot jk}}{\hat{p}_{\cdot k}} \right) & (h = 3) \end{cases}$$

となる.

帰無仮説 $H_0^{CI(h)}$ ($h = 1, 2, 3$) のもとで, $C_\phi^{CI(h)}$ ($h = 1, 2, 3$) はそれぞれ自由度 $(s-1)(t-1)r$ の χ^2 分布, 自由度 $(r-1)(t-1)s$ の χ^2 分布, 自由度 $(r-1)(s-1)t$ の χ^2 分布を極限分布にもつ.

例 4.3 (条件付き独立性)

表 4.8, より表 4.9 となる.

表 4.8 個人の性格が与えられたときのコレステロールと血圧の関係

個人の性格 (A)				個人の性格 (B)			
血圧		正常	高い	血圧		正常	高い
コレステロール	正常	716	79	コレステロール	正常	819	67
	高い	207	25		高い	186	22

表 4.9 $H_0^{(5)}$: 個人の性格が与えられたときのコレステロールと血圧の関係の最尤推定量

個人の性格 (A)				個人の性格 (B)			
血圧		正常	高い	血圧		正常	高い
コレステロール	正常	714.5	80.51	コレステロール	正常	813.9	720.8
	高い	208.5	23.89		高い	191.1	16.92

ここで,

$$R_{CI(1)}^0 = 2.062 \quad R_{CI(1)}^1 = 2.188$$

であり, 自由度は, $(s-1)(t-1)r = 2$ であるので, $\chi_2^2(0.05) = 5.991$ より, モデル $H_0^{CI(1)}$ は棄却さない.

\therefore 性格が分かったもとでは, コレステロールと血圧は独立である.

4.5 バートレットにより提唱された2次元分割表の最終モデル

例えば, Deming Stephan 法だと, 以下の条件を満たすものとして求める.

$$\hat{m}_{ij\cdot} = n_{ij\cdot}, \quad \hat{m}_{i\cdot k} = n_{i\cdot k}, \quad \hat{m}_{\cdot jk} = n_{\cdot jk},$$

$$\frac{\hat{m}_{111}\hat{m}_{1j1}}{\hat{m}_{i11}\hat{m}_{1j1}} = \frac{\hat{m}_{11k}\hat{m}_{1jk}}{\hat{m}_{i1k}\hat{m}_{1jk}}.$$

また, 自由度は $(r-1)(s-1)(t-1)$ である. モデル H^B が満たされるならば, layer を併合 (collaps) して, 周辺分割表を使っても, シンプソンパラドックスが起こらない. つまり, 周辺分割表を用いて, 独立性を調べることができるための十分条件となっている. layer に関することは row, column に関しても起こらないことから, モデル H^B が成立すれば, row, column を併合しても, 周辺分割表の独立性を調べることができることがわかる. このことを, collapsibility という.

4.6 3次元分割表の同時独立性検定

なお, 今後は同時独立性の帰無仮説のもとで議論を進めていくので, (2.3), (2.4), (2.5) そして, (4.1) での $C_\phi^{JI(1)}, H_0^{JI(1)}$ の場合を考えれば, 他の場合 ($h=1, 2$) も同様の結果が得られる.

よって $C_\phi^{JI(h)}$, $H_0^{JI(h)}$ は特に断らない限り, $C_\phi^{JI(1)}$, $H_0^{JI(1)}$ の場合を考え, 単に C_ϕ^{JI} , H_0^{JI} と表すこととする.

4.7 局所エッジワース近似

この節では, 同時独立性の帰無仮説 H_0^{JI} のもとでの

$$\mathbf{Y}_{rst} = (Y_{111}, \dots, Y_{11t}, \dots, Y_{1s1}, \dots, Y_{1st}, \dots, Y_{r11}, \dots, Y_{r1t}, \dots, Y_{rs1}, \dots, Y_{rst})'$$

の確率における局所エッジワース近似を考察する. \mathbf{Y}_{rst} は

$$\text{Mult}_{rst}(n; p_{1\cdot p\cdot 11}, \dots, p_{1\cdot p\cdot 1t}, \dots, p_{1\cdot p\cdot s1}, \dots, p_{1\cdot p\cdot st}, \dots, p_{r\cdot p\cdot 11}, \dots, p_{r\cdot p\cdot 1t}, \dots, p_{r\cdot p\cdot s1}, \dots, p_{r\cdot p\cdot st})$$

にしたがう分布であるとし,

$$X_{ijk} = \frac{Y_{ijk} - np_{i\cdot p\cdot jk}}{\sqrt{n}} \quad (i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, s; k = 1, \dots, t). \quad (4.3)$$

とする. この時

$$\mathbf{X}_{rst} = (X_{111}, \dots, X_{11t}, \dots, X_{1s1}, \dots, X_{1st}, \dots, X_{r11}, \dots, X_{r1t}, \dots, X_{rs1}, \dots, X_{rs,t-1})'$$

は, 格子確率ベクトルで, 集合

$$L = \left\{ \mathbf{x}_{rst} = (x_{111}, \dots, x_{11t}, \dots, x_{1s1}, \dots, x_{1st}, \dots, x_{r11}, \dots, x_{r1t}, \dots, x_{rs1}, \dots, x_{rs,t-1})' \right. \\ \left. : \mathbf{x}_{rst} = \frac{\mathbf{y}_{rst} - n\mathbf{q}_{rst}}{\sqrt{n}}, \mathbf{y}_{rst} \in U_{rst} \right\},$$

のような値とおける. ただし,

$$\mathbf{q}_{rst} = (p_{1\cdot p\cdot 11}, \dots, p_{1\cdot p\cdot 1t}, \dots, p_{1\cdot p\cdot s1}, \dots, p_{1\cdot p\cdot st}, \dots, p_{r\cdot p\cdot 11}, \dots, p_{r\cdot p\cdot 1t}, \dots, p_{r\cdot p\cdot s1}, \dots, p_{r\cdot p\cdot s,t-1})' \quad (4.4)$$

そして

$$U_{rst} = \left\{ \tilde{\mathbf{x}}_{rst} = (x_{111}, \dots, x_{11t}, \dots, x_{1s1}, \dots, x_{1st}, \dots, x_{r11}, \dots, x_{r1t}, \dots, x_{rs1}, \dots, x_{rs,t-1})' \right. \\ \left. : x_{ijk} \text{ は非負整数かつ} \right. \\ \left. x_{111} + \dots + x_{11t} + \dots + x_{1s1} + \dots + x_{1st} + \dots + x_{r11} + \dots + x_{r1t} + \dots + x_{rs1} + \dots + x_{rs,t-1} \leq n \right\}$$

である.

4.8 Lemma 2.1 の適用

以下の定理は、以下の定理は Siotani and Fujikoshi [18] の Lemma 2.1 での $\mathbf{q} = (p_1, \dots, p_k)'$ を、 \mathbf{q}_{rst} とおきかえることで導出できる。

定理 4.1

すべての $\mathbf{y}_{rst} \in U_{rst}$ について、 $\mathbf{x}_{rst} = (\mathbf{y}_{rst} - n\mathbf{q}_{rst})/\sqrt{n}$ とする。このとき、

$$\Pr(\mathbf{X}_{rst} = \mathbf{x}_{rst} | H_0^{JI}) = n^{-(rst-1)/2} f(\mathbf{x}_{rst}) \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} h_1(\mathbf{x}_{rst}) + \frac{1}{n} h_2(\mathbf{x}_{rst}) + o(n^{-1}) \right\}$$

ただし、

$$f(\mathbf{x}_{rst}) = (2\pi)^{-(rst-1)/2} |\Sigma_{rst}|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}'_{rst} \Sigma_{rst}^{-1} \mathbf{x}_{rst}\right), \quad (4.5)$$

$$\Sigma_{rst} = \text{diag}(p_{1..p_{11}}, \dots, p_{1..p_{1t}}, \dots, p_{1..p_{s1}}, \dots, p_{1..p_{st}}, \dots, p_{r..p_{11}}, \dots, p_{r..p_{1t}}, \dots, p_{r..p_{s1}}, \dots, p_{r..p_{st-1}}) - \mathbf{q}_{rst} \mathbf{q}'_{rst}, \quad (4.6)$$

$$h_1(\mathbf{x}_{rst}) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \frac{x_{ijk}}{p_{i..p_{jk}}} + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \frac{x_{ijk}^3}{p_{i..p_{jk}}^2}, \quad (4.7)$$

$$h_2(\mathbf{x}_{rst}) = \frac{1}{2} \{h_1(\mathbf{x}_{rst})\}^2 \frac{1}{12} (1 - IL) + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \frac{x_{ijk}^2}{p_{i..p_{jk}}^2} - \frac{1}{12} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \frac{x_{ijk}^4}{p_{i..p_{jk}}^3}, \quad (4.8)$$

$$\mathbf{x}_{rst} = - (x_{111} + \dots + x_{11t} + \dots + x_{1s1} + \dots + x_{1st} + \dots + x_{r11} + \dots + x_{r1t} + \dots + x_{rs1} + \dots + x_{rst-1}),$$

$$I = \sum_{i=1}^r \frac{1}{p_{i..}}, \quad (4.9)$$

$$L = \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \frac{1}{p_{.jk}}, \quad (4.10)$$

そして \mathbf{q}_{rst} は (4.4) よりえられる。

4.9 H_0^{JI} のもとでの C_ϕ^{JI} の分布における漸近近似

H_0^{JI} のもとでの C_ϕ^{JI} の分布による漸近展開に基づく近似を導く。適合度検定における Taneichi *et al.* [19] の近似に対応する H_0^{JI} のもとでの、 C_ϕ^{JI} の分布における以下の近似を考察する。

$$\Pr(C_\phi^{JI} \leq b_{l_3} | H_0^{JI}) \approx J_1^{JI} + J_2^{JI},$$

ただし、 J_1^{JI} 項は、連続型分布の多変量エッジワース展開とみなされる。 J_2^{JI} 項は、不連続性を説明する離散項であり、適合度検定の場合に Taneichi *et al.* [19] の K_2 項に対応する項である。

4.10 J_1^{JI} 項の近似について

J_1^{JI} 項の評価に関して、以下の定理を提案する。

定理 4.2

J_1^{JI} 項は

$$J_1^{JI} = \Pr(\chi_{(r-1)(st-1)}^2 \leq b_{l_3}) + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^3 v_j^\phi \Pr(\chi_{(r-1)(st-1)+2j}^2 \leq b_{l_3}) + o(n^{-1}), \quad (4.11)$$

として評価される。ただし、

$$v_0^\phi = -\frac{1}{12}(I-1)(L-1), \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} v_1^\phi = & \frac{1}{24} \left(3[(I-r^2)\{L-(st)^2\} + 2(I-r)(L-st)] + 6\phi'''(1)(I-r^2)\{L-(st)^2\} \right. \\ & + \{\phi'''(1)\}^2 [3(I-r^2)\{L-(st)^2\} + 2(I-3r+2)\{L-3(st)+2\}] \\ & \left. - 3\phi^{(4)}(1)(I-2r+1)\{L-2(st)+1\} \right), \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} v_2^\phi = & -\frac{1}{24} \left(6[(I-r^2)\{L-(st)^2\} + (I-2r+1)\{L-2(st)+1\}] \right. \\ & + 4\phi'''(1) [3(I-r^2)\{L-(st)^2\} + (I-3r+2)\{L-3(st)+2\}] \\ & + 2\{\phi'''(1)\}^2 [3(I-r^2)\{L-(st)^2\}^2 + 2(I-3r+2)\{L-3(st)+2\}] \\ & \left. - 3\phi^{(4)}(1)(I-2r+1)\{L-2(st)+1\} \right), \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$v_3^\phi = \frac{1}{24} \left(\{1 + \phi'''(1)\}^2 [3(I-r^2)\{L-(st)^2\} + 2(I-3r+2)\{L-3(st)+2\}] \right). \quad (4.15)$$

また、 I は (4.9)、 L は (4.10) で与えられている。

定理 4.2 の証明は付録 B に示されている。

定理 4.2 の ϕ を ϕ_a とすると、パワーダイバージェンスに基づく統計量における以下の系をえる。

系 4.1

統計量が (4.2) により与えられ、 R_{JI}^a とするとき、 J_1^{JI} 項は、

$$J_1^{JI} = \Pr\left(\chi_{(r-1)(st-1)}^2 \leq b_{l_3}\right) + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^3 w_j^{(a)} \Pr\left(\chi_{(r-1)(st-1)+2j}^2 \leq b_{l_3}\right) + o(n^{-1}),$$

として評価される。ただし、 $v_j^{(a)}(j=0,1,2,3)$ は $v_j^\phi(j=0,1,2,3)$ において、それぞれ $\phi'''(1) = a-1$ 、 $\phi^{(4)}(1) = (a-1)(a-2)$ の場合として定義されている。

$B_\phi(b_{l_3})$ は

$$B_\phi(b_{l_3}) = \{\mathbf{x}_{rst} = (x_1^*, \dots, x_{rst-1}^*)' : C_\phi^{JI}(\mathbf{x}_{rst}) \equiv C_\phi(\mathbf{x}_{rst}^*) < b_{l_3}\} \quad (4.16)$$

として定義される集合とし,

$$x_{l_3}^* = x_{ijk}, \quad l_3 = (i-1)st + jk \quad (i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, s; k = 1, \dots, t),$$

そして, $C_\phi^{JI}(\mathbf{x}_{rst})$ は (B.1) で定義された $C_\phi^{JI}(\mathbf{x}_{rst})$ において, \mathbf{X}_{rst} に \mathbf{x}_{rst} を代入することでえられる.

4.11 J_2^{JI} 項の近似について

集合 $B_{l_3} \subset R_{rst-2}$ ($l_3 = 1, \dots, rst-1$) と R_{rst-2} 上から R_1 への連続関数 $\eta_{l_3}(\cdot), \theta_{l_3}(\cdot)$ を考える. この連続関数 $\eta_{l_3}(\cdot), \theta_{l_3}(\cdot)$ は, (4.16) で定義される $B_\phi(b_{l_3})$ を

$$B_\phi(b_{l_3}) = \{ \mathbf{x}_{rst}^* = (x_1^*, \dots, x_{rst-1}^*)' : \eta_{l_3}(\tilde{\mathbf{x}}_{l_3}^*) < x_{l_3}^* < \theta_{l_3}(\tilde{\mathbf{x}}_{l_3}^*), \\ \mathbf{x}_{l_3}^* = (x_1^*, \dots, x_{l_3-1}^*, x_{l_3+1}^*, \dots, x_{rst-1}^*)' \in B_{l_3} \} \quad (4.17)$$

として定義できるものとする. そうすると,

$$J_2^{JI} = -\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l_3=1}^{rst-1} n^{-(rst-1-l_3)/2} \sum_{u_{l_3}^* \in M_{l_3+1}^\phi} \dots \sum_{u_{rst-1}^* \in M_{rst-1}^\phi} \\ \times \int \dots \int_{B_{l_3}} [S_{l_3}(\sqrt{n}x_{l_3}^* + np_{l_3}^*)f(\mathbf{x}^*)]_{\eta_{l_3}(\tilde{\mathbf{x}}_{l_3}^*)}^{\theta_{l_3}(\tilde{\mathbf{x}}_{l_3}^*)} dx_1^* \dots dx_{l_3-1}^* \quad (4.18)$$

となる. ただし,

$$M_{l_3}^\phi = B_\phi(b_{l_3}) \cap L_{l_3}, \quad l_3 = 1, \dots, rst-1, \\ L_{l_3} = \left\{ x_{l_3} : x_{l_3} = \frac{y_{l_3} - np_{l_3}^*}{\sqrt{n}}, y_{l_3} \text{ は整数} \right\}, \\ p_{l_3}^* = p_{i \cdot j \cdot k}, \quad l_3 = (i-1)st + jk \quad (i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, s; k = 1, \dots, t) \\ S_1(t) = t - [t] - \frac{1}{2}$$

また, $f(\cdot)$ は (4.5) により定義されている. Yarnold [24] と同じ方法でこの場合の検定統計量の J_2^{JI} 項を評価するためには,

$$[S_1(\sqrt{n}x_{l_3}^* + np_{l_3}^*)f(\mathbf{x}_{rst}^*)]_{\eta_{l_3}(\tilde{\mathbf{x}}_{l_3}^*)}^{\theta_{l_3}(\tilde{\mathbf{x}}_{l_3}^*)} = c [S_1(\sqrt{n}x_{l_3}^* + np_{l_3}^*)]_{\eta_{l_3}(\tilde{\mathbf{x}}_{l_3}^*)}^{\theta_{l_3}(\tilde{\mathbf{x}}_{l_3}^*)} + o(1) \quad (4.19)$$

を示す必要がある. ただし, c は定数とする.

(4.17) 式における $\eta_{l_3}(\tilde{\mathbf{x}}_{l_3}^*)$ や $\theta_{l_3}(\tilde{\mathbf{x}}_{l_3}^*)$ は, $C_\phi(\mathbf{x}_{rst}) = C_\phi(\mathbf{x}_{rst}^*) = b$ (b は定数) となるような $x_{l_3}^*$ の値である. よって, $x_{l_3}^* = \eta_{l_3}(\tilde{\mathbf{x}}_{l_3}^*)$ または, $x_{l_3}^* = \theta_{l_3}(\tilde{\mathbf{x}}_{l_3}^*)$ であるとき, (B.2), (B.3) を踏まえて考えると

$$\mathbf{x}'_{rst} \Sigma_{rst}^{-1} \mathbf{x}_{rst} = b + \sum_{i=1}^r \frac{x_{i \cdot}^2}{p_{i \cdot}} + \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \frac{x_{\cdot jk}^2}{p_{\cdot jk}} + o(1)$$

となることがわかる. したがって, $x_{l_3}^* = \eta_{l_3}(\tilde{\mathbf{x}}_{l_3}^*)$ または, $x_{l_3}^* = \theta_{l_3}(\tilde{\mathbf{x}}_{l_3}^*)$ のとき $\mathbf{x}'_{rst} \Sigma_{rst}^{-1} \mathbf{x}_{rst}$ を定数として評価できない.

$\mathbf{x}'_{rst} \Sigma_{rst}^{-1} \mathbf{x}_{rst}$ が定数である場合に限り $f(\mathbf{x}_{rst})$ が定数であるから, (4.19) を証明することができない.

よって, ここでは Taneichi *et al.* [19] の (2.6) 式で与えられる \hat{K}_2 のような単純な型の J_2^{JI} 項の近似をえることができない.

5 バートレット修正と改良変換統計量

5.1 漸近近似について

多項分布における適合度検定において Yarnold [24] は数値計算によって, Taneichi *et al.* [19] に書かれている近似 $K'_1 + \hat{K}_2$ の正確さを調べた. K'_1 は連続型分布を仮定したエッジワース展開の項であり, \hat{K}_2 は離散項の 1 次近似である. ピアソンの χ^2 統計量においては, $K'_1 + \hat{K}_2$ の近似が K'_1 のみの近似よりすぐれていると結論付けた. しかしながら, 正方分割表の対称性検定や 3 次元分割表の同時独立性検定の場合には, \hat{K}_2 項のような単純な近似をえることはとても難しい.

実際的には, 帰無仮説のもとでの分布においても K_1 項のみの近似は数値実験を行うと χ^2 近似より性能が良いことがわかり, さらに, Taneichi *et al.* [19], Sekiya and Taneichi [17] によると, 多項分布の適合度検定の場合における局所対立仮説, 局所的でない対立仮説のもとでのエッジワース展開にもとづく近似は, 非心 χ^2 分布による近似より性能が優れていることが示されている. よって, 正方分割表の対称性検定や 3 次元分割表の同時独立性検定において, 連続分布を仮定したエッジワース展開による確率分布の近似を行うことを提案する.

5.2 エッジワース展開に基づく改良変換統計量

この章では, バートレット修正の概要および Fujikoshi [7, 8] に基づく改良変換統計量を示す. 非負確率変数 T が以下のように漸近展開できるものとする.

$$\Pr(T \leq x) = \Pr(\chi_g^2 \leq x) + \frac{1}{n} \sum_{h=0}^m w_h \Pr(\chi_{g+2h}^2 \leq x) + O(n^{-2}), \quad (5.1)$$

ただし, m は正整数であり, 係数 w_h は

$$\sum_{h=0}^m w_h = 0.$$

(5.1) において $m = 1$ のとき, χ^2 分布への近似のために次の定理を与える.

定理 5.1

(5.1) 式において, $m = 1$ のときを考える. ここで, T_1 を

$$T_1 = \left(1 + \frac{2w}{en}\right) T,$$

と定める. ただし, $w = w_0 = -w_1$ である. このとき, T_1 は

$$\Pr(T_1 \leq x) = \Pr(\chi_e^2 \leq x) + O(n^{-2}).$$

この定理の結果は、バートレット修正として知られている。Lawley [12], Barndorff-Nielsen and Cox [3] そして、Barndorff-Nielsen and Hall [4] は対数尤度比統計量についてのバートレット修正を論じた。

(5.1) 式より $m = 2$ のときの χ^2 分布への近似のために、以下の単調増加関数 $\tilde{T}_i = \tilde{T}_i(T) (i = 2, 3)$ について考察する。すなわち

i) 任意の α_1, α_2 に対して

$$\tilde{T}_2 = (n\alpha_1 + \alpha_2)^2 \log \left\{ 1 + \frac{1}{(n\alpha_1)^2} T + \frac{1}{(n\alpha_1)^3} T^2 + \frac{1}{3(n\alpha_1)^4} T^3 \right\}.$$

ii) 任意の α_1, α_2 に対して

$$\tilde{T}_3 = (n\alpha_1 + \alpha_2)^2 \left[1 - \exp \left\{ -\frac{1}{(n\alpha_1)^2} T - \frac{1}{(n\alpha_1)^3} T^2 - \frac{1}{3(n\alpha_1)^4} T^3 \right\} \right].$$

このとき、以下の定理をえる。

定理 5.2

(5.1) 式において、 $m = 2$ のときを考える。ここで、 α_1, α_2 を

$$\alpha_1 = -\frac{e(e+2)}{2w_2},$$

$$\alpha_2 = -\frac{(e+2)w_0}{2w_2}$$

と定める。このとき、 $\tilde{T}_i (i = 2, 3)$ は

$$\Pr(\tilde{T}_i \leq x) = \Pr(\chi_e^2 \leq x) + O(n^{-2}) \quad (i = 2, 3).$$

と表現することができる。

変数 \tilde{T}_2 の証明は柳原 [27] によって与えられている。その証明は、Kakizawa[9] の考え方を Fujikoshi [7, 8] により与えられた改良変換の理論に応用することで導かれた。

\tilde{T}_3 の結果は、 \tilde{T}_2 の証明と

$$\log(1+t) - \{1 - \exp(-t)\} = O(t^3)$$

に基づいて直接示される。

(5.1) 式より $m = 3$ のときの χ^2 分布への近似のために、以下の単調変換 $\hat{T}_i = \hat{T}_i(T) (i = 2, 3)$ について考察する。すなわち

i) 任意の $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ に対して

$$\hat{T}_2 = (n\beta_1 + \beta_2)^2 \log \left[1 + \frac{1}{(n\beta_1)^2} T + \frac{1}{(n\beta_1)^3} (T^2 + \beta_3 T^3) \right. \\ \left. + \frac{1}{(n\beta_1)^4} \left(\frac{1}{3} T^3 + \frac{3\beta_3}{4} T^4 + \frac{9\beta_3^2}{20} T^5 \right) \right]$$

ii) 任意の $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ に対して

$$\hat{T}_3 = (n\beta_1 + \beta_2)^2 \left[1 - \exp \left\{ -\frac{1}{(n\beta_1)^2} T - \frac{1}{(n\beta_1)^3} (T^2 + \beta_3 T^3) - \frac{1}{(n\beta_1)^4} \left(\frac{1}{3} T^3 + \frac{3\beta_3}{4} T^4 + \frac{9\beta_3^2}{20} T^5 \right) \right\} \right]$$

このとき、以下の定理を与える。

定理 5.3

(5.1) 式において、 $m = 3$ のときを考える。ここで、 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ を

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -\frac{e(e+2)}{2(w_2 + w_3)}, \\ \beta_2 &= -\frac{(e+2)w_0}{2(w_2 + w_3)}, \\ \beta_3 &= -\frac{w_3}{(e+4)(w_2 + w_3)} \end{aligned}$$

と定めると、 $\hat{T}_i (i = 2, 3)$ は

$$\Pr(\hat{T}_i \leq x) = \Pr(\chi_e^2 \leq x) + O(n^{-2}) \quad (i = 2, 3)$$

と表すことができる。

変数 \hat{T}_2, \hat{T}_3 の証明は \tilde{T}_2, \tilde{T}_3 と同様の方法で示すことができる。

5.3 近似に基づく変換統計量

この節では、 C_ϕ^S の連続項に基づく定理 3.2 の漸近展開式 (3.3) を定理 5.1, 定理 5.2 に適用し、 C_ϕ^{JI} の連続項に基づく定理 4.2 の漸近展開式 (4.11) を定理 5.1, 定理 5.3 に適用することで、改良変換をそれぞれ構築する。

定理 3.2 において、 $\phi^{(4)}(1) = 2$ を満たすとき $w_2^\phi = 0$ かつ $w_0^\phi + w_1^\phi = 0$ である。よって、定理 5.1 より、 H_0^S のもとで以下のバートレット修正をえる。

$$\tilde{C}_\phi^1 = \left\{ 1 + \frac{w_0^\phi}{nr(r-1)} \right\} C_\phi^S.$$

系 3.1 より、 w_0^ϕ に $w_0^{(0)}$ を代入することで、パワーダイバージェンス統計量 R_S^0 についても同様に、以下のバートレット修正をえる。つまり、

$$\tilde{R}_1^0 = \left\{ 1 + \frac{w_0^{(0)}}{nr(r-1)} \right\} R_S^0.$$

これは、 \tilde{C}_ϕ^1 の特別な場合である。 \tilde{R}_1^0 における以下の近似を提案する。すなわち、

$$\Pr(\tilde{R}_1^0 \leq b | H_0^S) \approx \Pr(\chi_{r(r-1)/2}^2 \leq b).$$

同様に、定理 4.2 において、 $\phi^{(4)}(1) = 2$ を満たすとき $v_2^\phi = v_3^\phi = 0$ かつ $v_0^\phi + v_1^\phi = 0$ である。よって、定理 5.1 より、 H_0^{JI} のもとで以下のバートレット修正をえる。

$$\hat{C}_\phi^1 = \left\{ 1 + \frac{v_0^\phi}{n(r-1)(st-1)} \right\} C_\phi^{JI}.$$

系 4.1 より、 v_0^ϕ に $v_0^{(0)}$ を代入することで、パワーダイバージェンス統計量 R_{JI}^0 についても同様に、以下のバートレット修正をえる。つまり、

$$\hat{R}_1^0 = \left\{ 1 + \frac{v_0^{(0)}}{n(r-1)(st-1)} \right\} R_{JI}^0.$$

これは、 \hat{C}_ϕ^1 の特別な場合である。 \hat{R}_1^0 における以下の近似を提案する。すなわち、

$$\Pr(\hat{R}_1^0 \leq b | H_0^{JI}) \approx \Pr(\chi_{(r-1)(st-1)/2}^2 \leq b).$$

次に、 $\phi^{(4)}(1) = 2$ でない場合について考察する。定理 3.2 のとき、 $\sum_{j=0}^2 w_j^\phi = 0$ を満たす。また、 $m = 2$ であるよって、定理 5.2 より、以下の変換統計量をえる。

$$\tilde{C}_\phi^2 = (n\alpha_1 + \alpha_2)^2 \log(1 + Q_2), \quad (5.2)$$

$$\tilde{C}_\phi^3 = (n\alpha_1 + \alpha_2)^2 \{1 - \exp(-Q_2)\} \quad (5.3)$$

ただし、

$$Q_2 = \frac{1}{(n\alpha_1)^2} \left\{ C_\phi^S + \frac{1}{n\alpha_1} (C_\phi^S)^2 + \frac{1}{3(n\alpha_1)^2} (C_\phi^S)^3 \right\},$$

$$\alpha_1 = -\frac{r(r-1)/2 \{r(r-1)/2 + 2\}}{2w_2^\phi},$$

$$\alpha_2 = -\frac{\{r(r-1)/2 + 2\}w_0^\phi}{2w_2^\phi}.$$

よって、以下の近似を提案する。すなわち、

$$\Pr(\tilde{C}_\phi^j \leq b | H_0) \approx \Pr(\chi_{r(r-1)/2}^2 \leq b) \quad (j = 2, 3).$$

このとき (5.2), (5.3) の C_ϕ^S に R_S^α を代入することで、 \tilde{C}_ϕ^2 の特別な場合として変換統計量 \tilde{R}_ϕ^2 を、 \tilde{C}_ϕ^3 の特別な場合として変換統計量 \tilde{R}_ϕ^3 をそれぞれ得られる。

同様に, 定理 4.2 で $\sum_{j=0}^3 w_j^\phi = 0$ のとき, (5.1) の条件 $\sum_{j=0}^3 a_j = 0$ を満たす. また, $m = 3$ であるので 定理 5.3 に適用できる. よって $\hat{C}_\phi^2, \hat{C}_\phi^3$ は次の変換統計量を与える. すなわち,

$$\hat{C}_\phi^2 = (n\beta_1 + \beta_2)^2 \log(1 + Q_3), \quad (5.4)$$

$$\hat{C}_\phi^3 = (n\beta_1 + \beta_2)^2 \{1 - \exp(-Q_3)\} \quad (5.5)$$

ここで,

$$\begin{aligned} Q_3 &= \frac{1}{(n\beta_1)^2} \left\{ C_\phi^{JI} + \frac{1}{n\beta_1} \left((C_\phi^{JI})^2 + \beta_3 (C_\phi^{JI})^3 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(n\beta_1)^2} \left(\frac{1}{3} (C_\phi^{JI})^3 + \frac{3\beta_3}{4} (C_\phi^{JI})^4 + \frac{9\beta_3^2}{20} (C_\phi^{JI})^5 \right) \right\}, \\ \beta_1 &= -\frac{24(r-1)(st-1)\{(r-1)(st-1)+2\}}{2(w_2^\phi + w_3^\phi)}, \\ \beta_2 &= -\frac{\{(r-1)(st-1)+2\}w_0^\phi}{2(w_2^\phi + w_3^\phi)}, \\ \beta_3 &= -\frac{w_3^\phi}{\{(r-1)(st-1)+4\}(w_2^\phi + w_3^\phi)} \end{aligned}$$

したがって以下の近似を提案する.

$$\Pr\left(\hat{C}_\phi^j \leq b | H_0\right) \approx \Pr\left(\chi_{(r-1)(st-1)}^2 \leq b\right) \quad (j = 2, 3).$$

このとき (5.4), (5.5) の C_ϕ^{JI} に R_{JI}^a を代入することで, \hat{C}_ϕ^2 の特別な場合として変換統計量 \hat{R}_ϕ^2 を, \hat{C}_ϕ^3 の特別な場合として変換統計量 \hat{R}_ϕ^3 をそれぞれ得られる.

ここで, w_l^ϕ ($l = 0, 1, 2, 3$) は, 未知パラメータ $p_{i..}$ ($i = 1, \dots, r$), $p_{.jk}$ ($j = 1, \dots, s; k = 1, \dots, t$) を含む関数 I, L であらわされている. よって, 実現値を用いて I と L の推定値を出す必要がある. $p_{i..}, p_{.jk}$ に $\hat{p}_{i..}, \hat{p}_{.jk}$ をそれぞれ代入することによって (4.9) と (4.10) の最尤推定量を導くと

$$\begin{aligned} \hat{I} &= \sum_{i=1}^r \frac{1}{\hat{p}_{i..}}, \\ \hat{L} &= \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \frac{1}{\hat{p}_{.jk}} \end{aligned}$$

となる.

6 数値計算例

6.1 正方分割での対称性検定の場合

この章では、具体的な値を用いて、パワーダイバージェンスに基づく統計量 R^a について検証する。 R^a の変換統計量 $\tilde{R}_1^a, \tilde{R}_i^a$ ($i = 2, 3$) のとき、小標本においてよい近似がなされているか、数値計算例を用いて検討する。

3×3 分割表において、統計量 $R_S^a, \tilde{R}_1^a, \tilde{R}_i^a$ ($i = 2, 3$) を考察する。このときのセル確率を以下のように設定する。

Case(I) すべて等しいものにする。

$$p_{jk} = r^{-2} \quad (j = 1, \dots, r; k = 1, \dots, r)$$

Case(II) 周辺確率の積で表現できるものにする。

$$p_{jk} = \begin{cases} \frac{\{r(r-1) + 2(j-1)\}\{r(r-1) + 2(k-1)\}}{r^2(r-1)^2(r+1)^2} & (r : (\text{even})) \\ \frac{\{r(2r-1) + 2(j-1) - 1\}\{r(2r-1) + 2(k-1) - 1\}}{4r^2(r-1)^2(r+1)^2} & (r : (\text{odd})) \end{cases} \quad (j = 1, \dots, r; k = 1, \dots, r),$$

Case(III) 対角成分を軸に徐々に小さくする。

$$p_{jk} = \frac{2 - \delta_{jk}}{r(2r-1)} \quad (j = 1, \dots, r; k = 1, \dots, r)$$

H_0 のもとで多項乱数ベクトルを用いて N_1 個の分割表を発生させる。検定統計量 T に第 i 番目に発生させた分割表 $\mathbf{x}^S(i)$ ($i = 1, \dots, N_1$) を代入したものが $T(\mathbf{x}^S(i))$ である。そして、 N_2 は $T(\mathbf{x}^S(i)) \leq \chi^2$ という条件を満たした分割表 $T(\mathbf{x}^S(i))$ の個数である。この時、各統計量の近似の性能を

$$I_{(\alpha)}^S = \left(\frac{N_2}{N_1} - \alpha \right) \times 10^5 \quad (6.1)$$

として評価する。

分割表の個数 $N_1 = 10^6$ 、標本数 $n = l \times r^2$ ($l = 6, 7, 8, 9, 10, 15$) として、(6.1) のモンテカルロ法で実験を行う。 $a = 0$ は対数尤度比統計量、 $a = 1$ はピアソンの χ^2 統計量についての考察である。また、 $a = 2/3$ についても考察する。ここで、 \circ は有意水準 0.01 での R_S^a の誤差をあらわしており、 \bullet は有意水準 0.01 での \tilde{R}_j^a ($j = 1, 2$) の誤差をあらわしている。また、 \triangle は有意水準 0.05 での R_S^a の誤差をあらわしており、 \blacktriangle は有意水準 0.05 での \tilde{R}_j^a ($j = 1, 2$) の誤差をあらわしている。

6 数値計算例

6.1 正方分割での対称性検定の場合

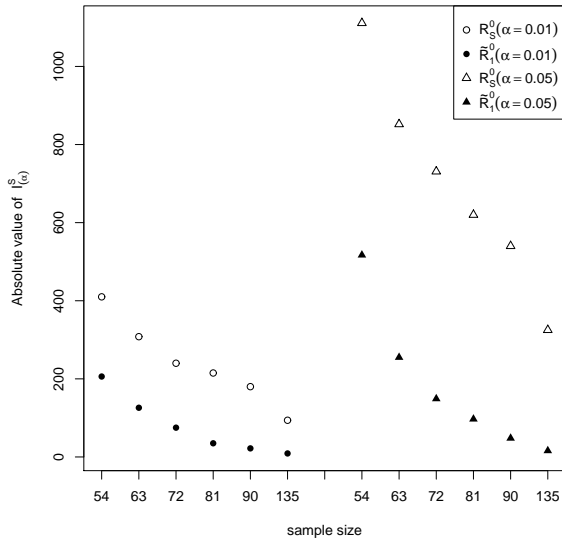


図 1 R_S^0 と変換統計量 \tilde{R}_1^0 の Case(I) での誤差

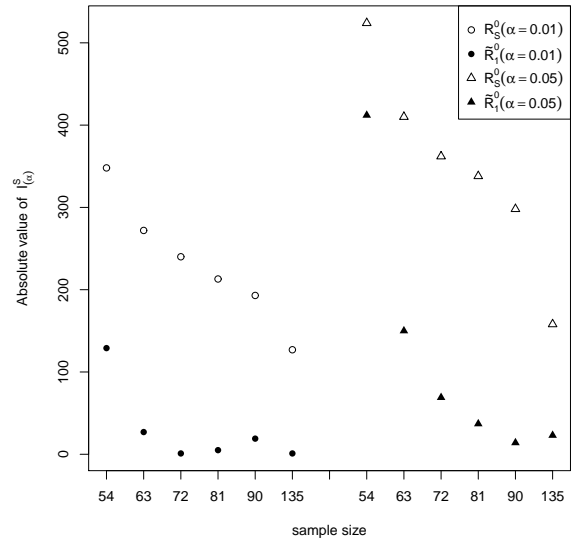


図 2 R_S^0 と変換統計量 \tilde{R}_1^0 の Case(II) での誤差

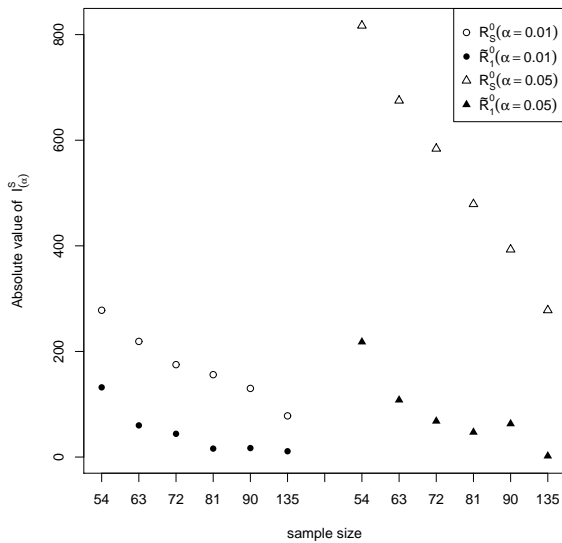


図 3 R_S^0 と変換統計量 \tilde{R}_1^0 の Case(III) での誤差

図 1, 2, 3 より, 各々の場合において, $a = 0$ (対数尤度比統計量) のとき χ^2 分布への近似について Case(I) - (III) の場合で, 標本数にかかわらず, 変換統計量 \tilde{R}_1^0 は, 統計量 R_S^0 より近似が改良されていることがわかる.

6 数値計算例

6.1 正方分割での対称性検定の場合

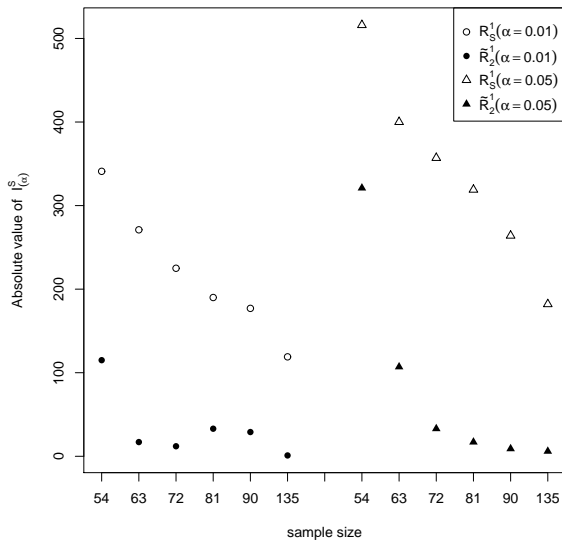


図4 R_S^1 と変換統計量 \tilde{R}_2^1 の Case(I) での誤差

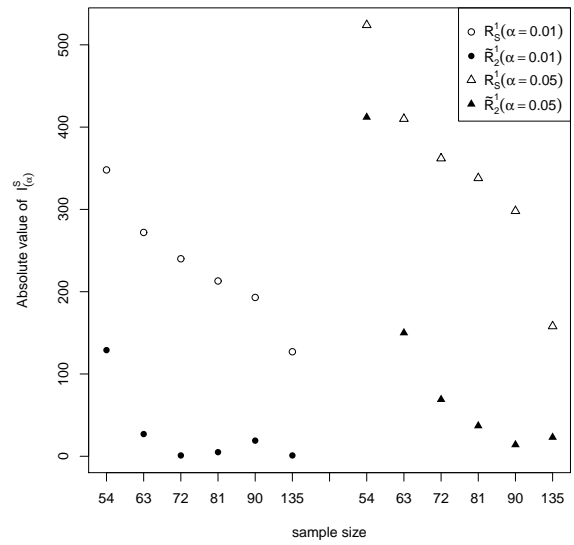


図5 R_S^1 と変換統計量 \tilde{R}_2^1 の Case(II) での誤差

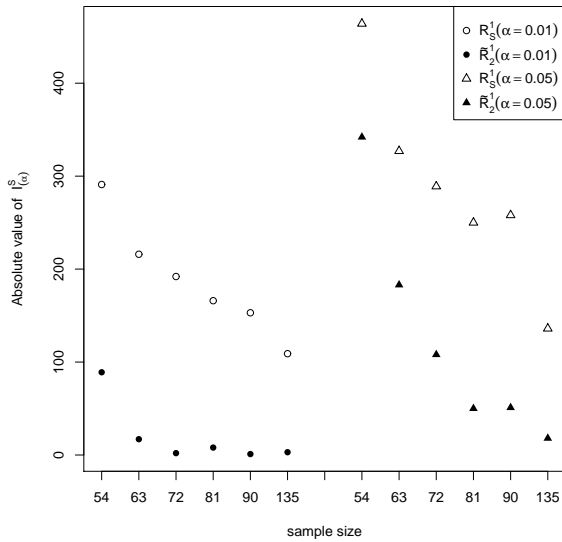


図6 R_S^1 と変換統計量 \tilde{R}_2^1 の Case(III) での誤差

図4, 5, 6より, 各々の場合において, $a = 1$ (ピアソンの χ^2 統計量) のとき χ^2 分布への近似について Case(I) - (III) の場合で, 標本数にかかわらず, 変換統計量 \tilde{R}_2^1 は, 統計量 R_S^1 より近似が改良されていることがわかる.

6 数値計算例

6.1 正方分割での対称性検定の場合

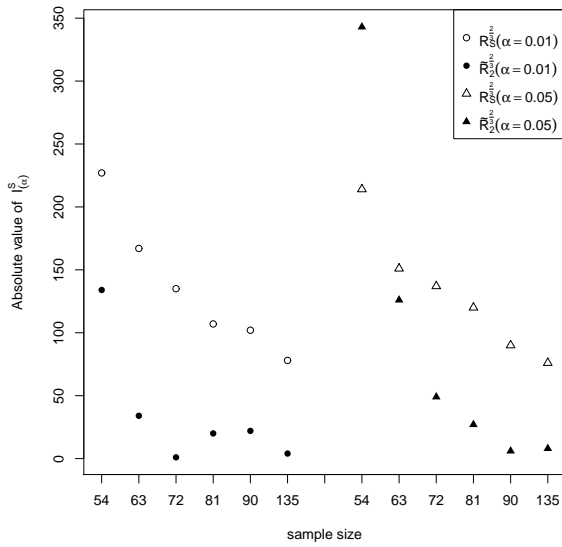


図7 $R_S^{2/3}$ と変換統計量 $\tilde{R}_2^{2/3}$ の Case(I) での誤差

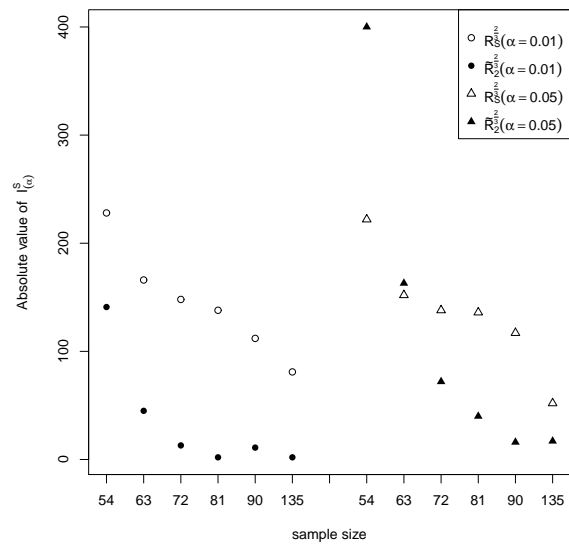


図8 $R_S^{2/3}$ と変換統計量 $\tilde{R}_2^{2/3}$ の Case(II) での誤差

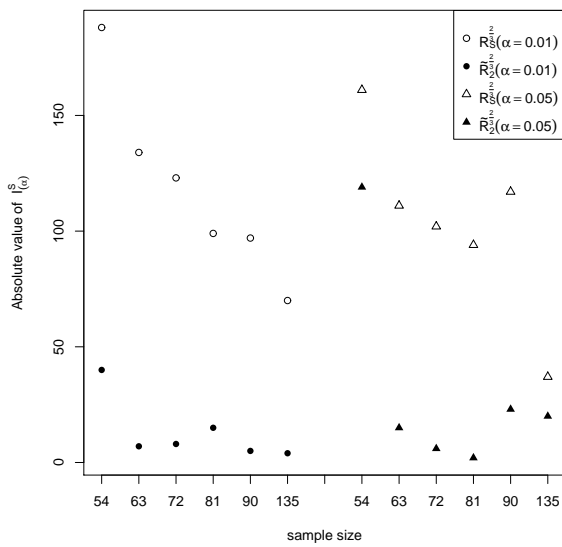


図9 $R_S^{2/3}$ と変換統計量 $\tilde{R}_2^{2/3}$ の Case(III) での誤差

図 7, 8, 9 より, 各々の場合において, $a = 2/3$ のとき χ^2 分布への近似について以下の結果がわかる.

Case(I) $\alpha = 0.05$ において, 標本数が $n \geq 6r^2$ のとき, 変換統計量 $\tilde{R}_2^{2/3}$ は, 統計量 $R_S^{2/3}$ より近似が改良されている. $\alpha = 0.01$ においては, 標本数にかかわらず, 変換統計量 $\tilde{R}_2^{2/3}$ は, 統計量 $R_S^{2/3}$ より近似が改良されている.

Case(II) $\alpha = 0.05$ において, 標本数が $n \geq 5r^2$ のとき, 変換統計量 $\tilde{R}_2^{2/3}$ は, 統計量 $R_S^{2/3}$ より近似が改良されている. $\alpha = 0.01$ においては, 標本数にかかわらず, 変換統計量 $\tilde{R}_2^{2/3}$ は, 統計量 $R_S^{2/3}$ より近似が改良されている.

Case(III) 標本数にかかわらず, 変換統計量 $\tilde{R}_2^{2/3}$ は, 統計量 $R_S^{2/3}$ より近似が改良されている.

次に, 検出力についての実験を行う. 3×3 分割表において, Case (I) - Case (III) で定めた確率 p_{jk} を用いた対称性の帰無仮説より, 以下の対立仮説を考察する.

$$H_1^S : p_{jk} = p_{jk} + d_{jk} \quad (j = 1, \dots, 3; k = 1, \dots, 3),$$

ただし,

$$(d_{jk}) = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 2\gamma_1 & 3\gamma_1 \\ 3\gamma_2 & \gamma_2 & 2\gamma_2 \\ 2\gamma_3 & 3\gamma_3 & \gamma_3 \end{pmatrix},$$

ただし.

$$\gamma_1 = 0.01, \gamma_2 = 0.02, \gamma_3 = -0.03$$

である. H_1^S のもとで多項乱数ベクトルを用いて, 10^6 組の分割表を発生させ, その分割表を使うことによって, 統計量 $R_S^a, \tilde{R}_1^a, \tilde{R}_j^a$ ($j = 2, 3$) の検出力の数値計算例を図 10 - 18 示す.

◇ は有意水準 0.01 での R_S^a の検出力を表しており, + は有意水準 0.01 での改良変換統計量 \tilde{R}_j^a の検出力を表している. また, □ は有意水準 0.05 での R_S^a の検出力を表しており, × は有意水準 0.05 での改良変換統計量 \tilde{R}_j^a の検出力を表している.

6 数値計算例

6.1 正方分割での対称性検定の場合

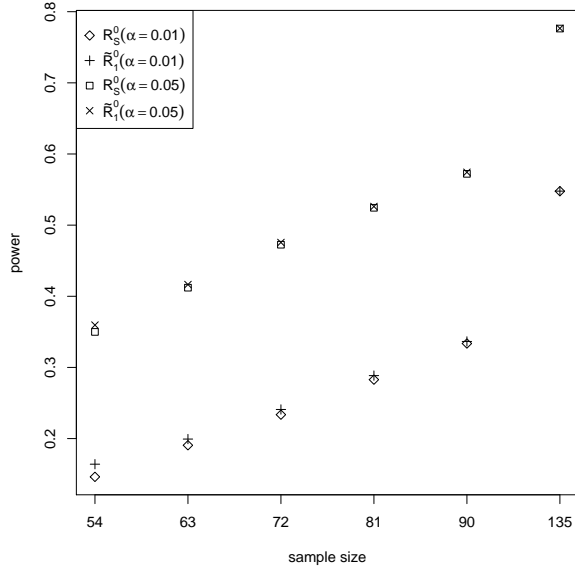


図 10 R_S^0 と変換統計量 \tilde{R}_1^0 の case(I) での検出力

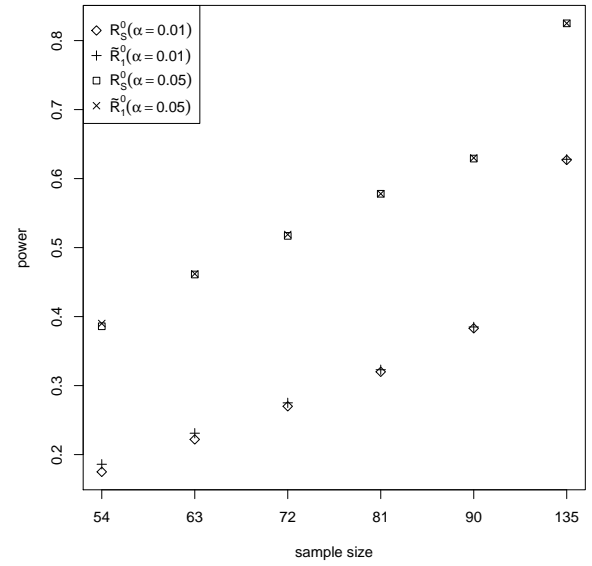


図 11 R_S^0 と変換統計量 \tilde{R}_1^0 の case(II) での検出力

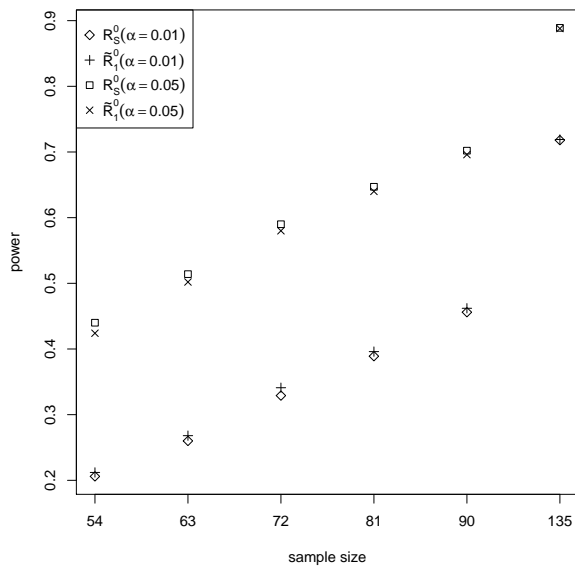


図 12 R_S^0 と変換統計量 \tilde{R}_1^0 の case(III) での検出力

6 数値計算例

6.1 正方分割での対称性検定の場合

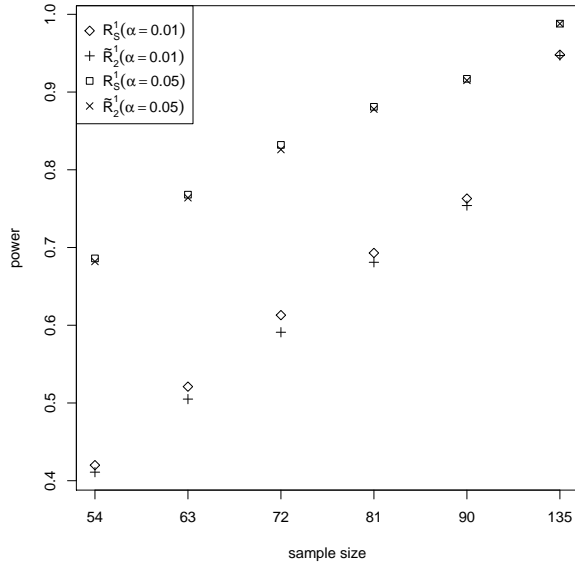


図 13 R_S^1 と変換統計量 \tilde{R}_2^1 の case(I) での検出力

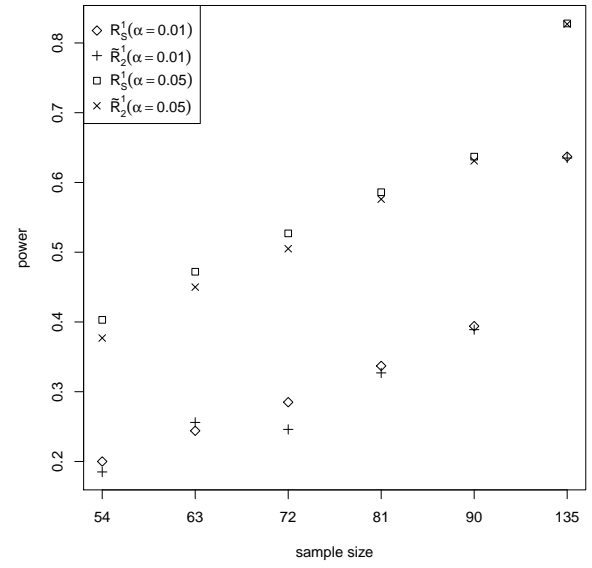


図 14 R_S^1 と変換統計量 \tilde{R}_2^1 の case(II) での検出力

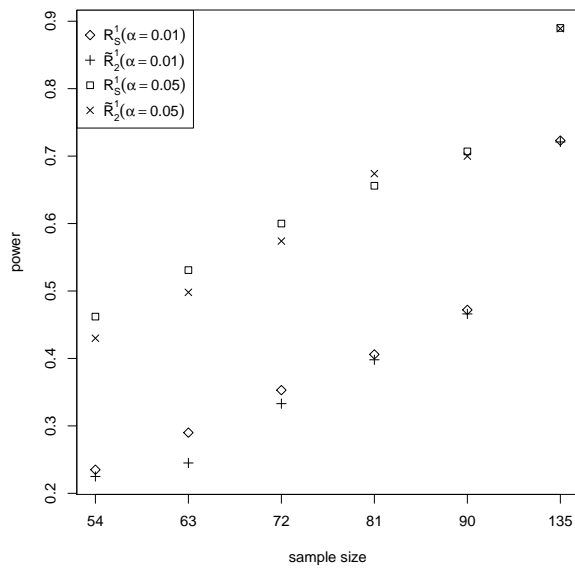


図 15 R_S^1 と変換統計量 \tilde{R}_2^1 の case(III) での検出力

6 数値計算例

6.1 正方分割での対称性検定の場合

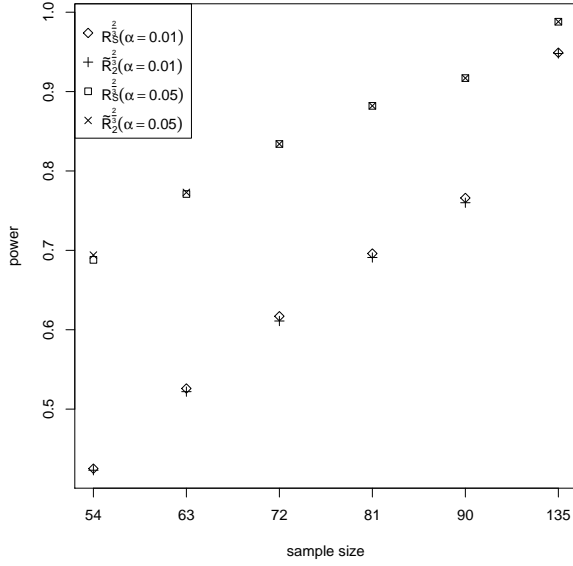


図 16 $R_S^{2/3}$ と変換統計量 $\tilde{R}_2^{2/3}$ の case(I) での検出力

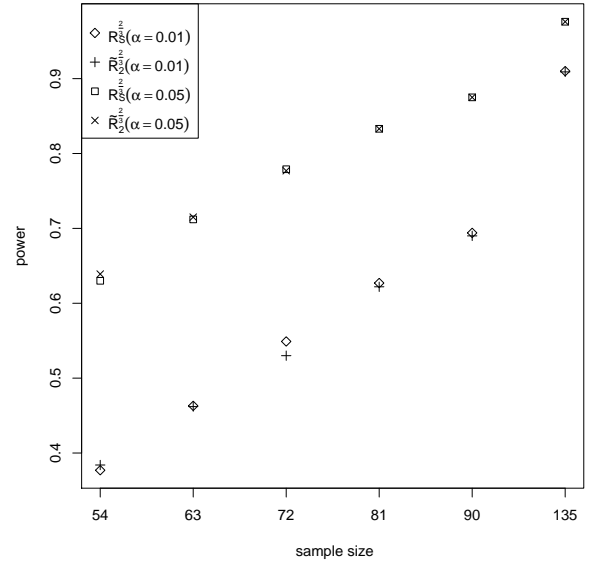


図 17 $R_S^{2/3}$ と変換統計量 $\tilde{R}_2^{2/3}$ の case(II) での検出力

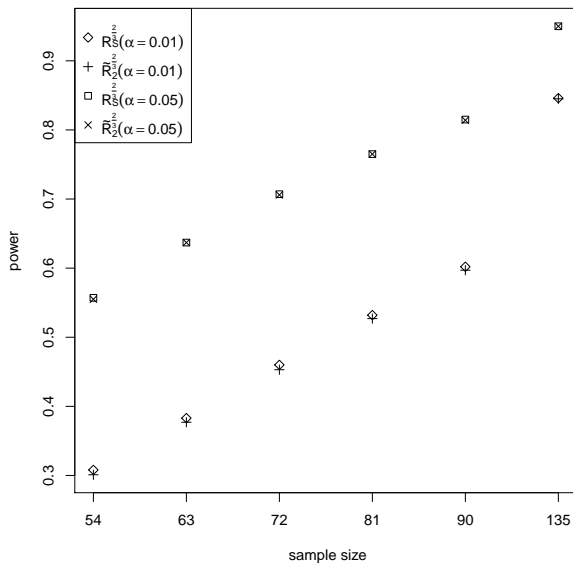


図 18 $R_S^{2/3}$ と変換統計量 $\tilde{R}_1^{2/3}$ の case(III) での検出力

図 10, 11, 12 より, 各々の場合において, $a = 1$ (ピアソンの χ^2 統計量) のとき Case(I) - (III) の場合で, 標本数にかかわらず, もとの統計量と変換統計量は, 同じ検出力を示している.

図 13, 14, 15 より, 各々の場合において, $a = 1$ のとき検出力について以下の結果がわかる.

Case(I) ほぼすべての値で同じ検出力を示しているが, $\alpha = 0.01$ における, $n \leq 10r^2$ のとき, 変換統計量が多少もとの統計量の値よりも下がっている. $\alpha = 0.05$ においては, もとの統計量と変換統計量は, 同じ検出力を示している.

Case(II) ほぼすべての値で同じ検出力を示しているが, $\alpha = 0.01$ における, $n = 8r^2$ のときは変換統計量が多少もとの統計量の値よりも下がっている. また, $n = 7r^2, 6r^2$ においても多少のずれが生じている. $\alpha = 0.05$ においては, $n \leq 10r^2$ のとき, 変換統計量が多少もとの統計量の値よりも下がっている.

Case(III) $n \leq 9r^2$ のとき, 変換統計量が多少もとの統計量の値よりも下がっている.

図 16, 17, 18 より, 各々の場合において, $a = 2/3$ のとき検出力について以下の結果がわかる.

Case(I) もとの統計量と変換統計量は, 同じ検出力を示している.

Case(II) ほぼすべての値で同じ検出力を示しているが, $\alpha = 0.01$ における, $n = 8r^2$ のときは変換統計量が多少もとの統計量の値よりも下がっている.

Case(III) もとの統計量と変換統計量は, 同じ検出力を示している.

6.2 3次元分割表での同時独立性検定の場合

$4 \times 2 \times 2$ 分割表において, 統計量 $R_{JI}^a, \hat{R}_1^0, \hat{R}_j^a$ ($j = 2, 3$) を考察する. このときの周辺確率を以下のように設定する.

Case(I) 周辺確率をすべて等しいものにする.

$$\begin{aligned} p_{i..} &= r^{-1} \quad (i = 1, \dots, r), \\ p_{.jk} &= (st)^{-1} \quad (j = 1, \dots, s; k = 1, \dots, t), \end{aligned}$$

Case(II) 周辺確率 $p_{i..}, p_{.j.}, p_{..k}$ を, それぞれ i, j, k の値の大きさに応じて増加させていく.

$$\begin{aligned} p_{i..} &= \frac{2i}{r(r+1)} \quad (i = 1, \dots, r), \\ p_{.jk} &= \frac{2jk}{st(st+1)} \quad (j = 1, \dots, s; k = 1, \dots, t), \end{aligned}$$

Case(III) 周辺確率 $p_{i..}, p_{.j.}, p_{..k}$ の値を Koehler [11] で用いられている値とする.

$$\begin{aligned} p_{i..} &= r^{-1} \left(0.1 + 0.9 \sum_{m=i}^r m^{-1} \right) \quad (i = 1, \dots, r), \\ p_{.jk} &= (st)^{-1} \left(0.1 + 0.9 \sum_{m=j}^s \sum_{m=k}^t m^{-1} \right) \quad (j = 1, \dots, s; k = 1, \dots, t), \end{aligned}$$

対称性検定の場合と同様に, (6.1) を用いて評価する.

分割表の個数 $N_1 = 10^6$, 標本数 $n = l \times rst$ ($l = 6, 7, 10, 15$) として, (6.1) のモンテカルロ法で実験を行う. $a = 0$ は対数尤度比統計量, $a = 1$ は, ピアソンの X^2 統計量についての考察である. さらに, $a = 2/3$ のときの統計量についても考察する. $4 \times 2 \times 2$ 分割表における, それぞれの統計量についての $I_{(\alpha)}^S$ の数値は図 19 - 図 27 により示している.

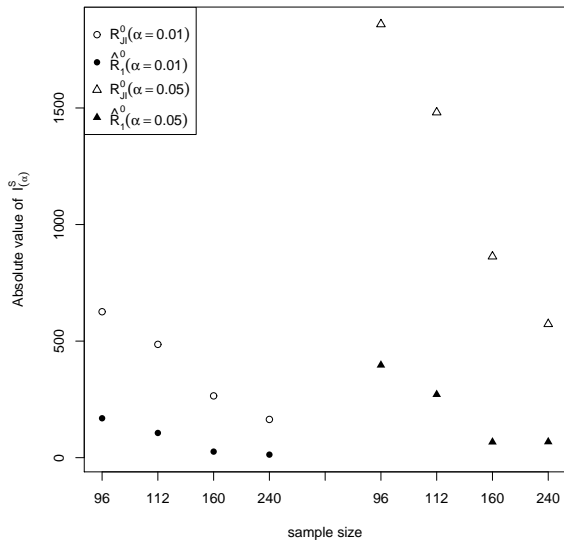


図 19 R_{JI}^0 と変換統計量 \hat{R}_1^0 の Case(I) での誤差

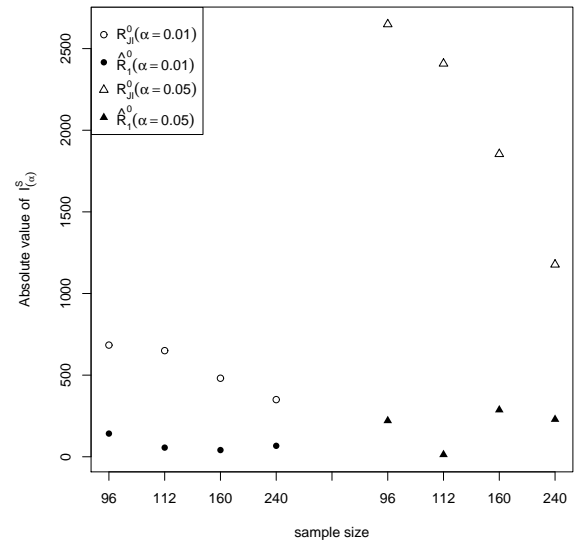


図 20 R_{JI}^0 と変換統計量 \hat{R}_1^0 の Case(II) での誤差

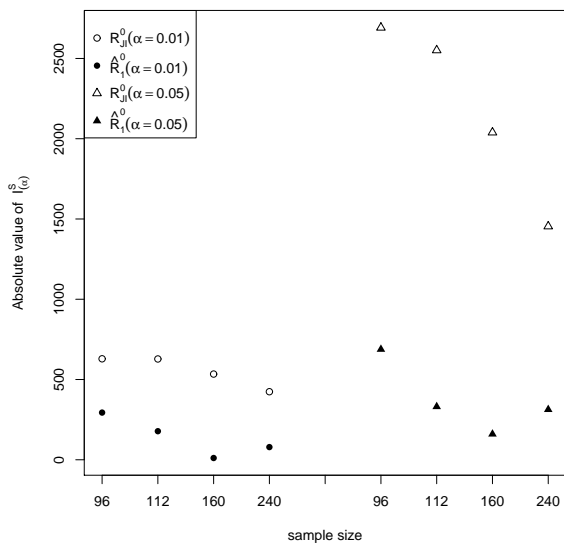


図 21 R_{JI}^0 と変換統計量 \hat{R}_1^0 の Case(III) での誤差

図 19, 20, 21 より, 各々の場合において, $a = 0$ (対数尤度比統計量) のとき χ^2 分布への近似について Case(I) - (III) の場合で, 標本数にかかわらず, 変換統計量 \hat{R}_1^0 は, 統計量 R_{JI}^0 より近似が改良されていることがわかる.

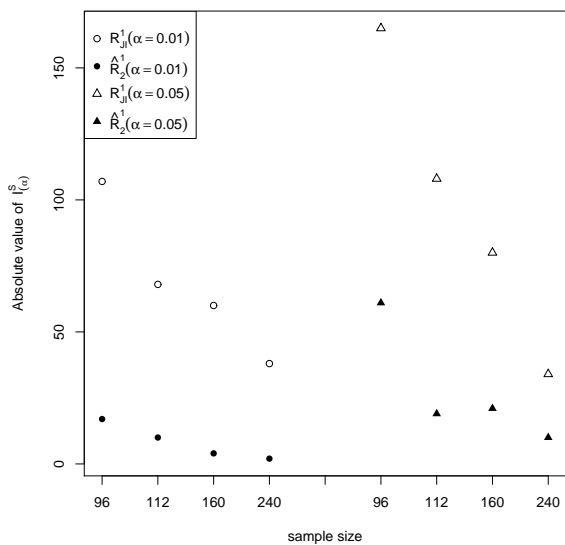


図 22 R_{JI}^1 と変換統計量 \hat{R}_2^1 の Case(I) での誤差

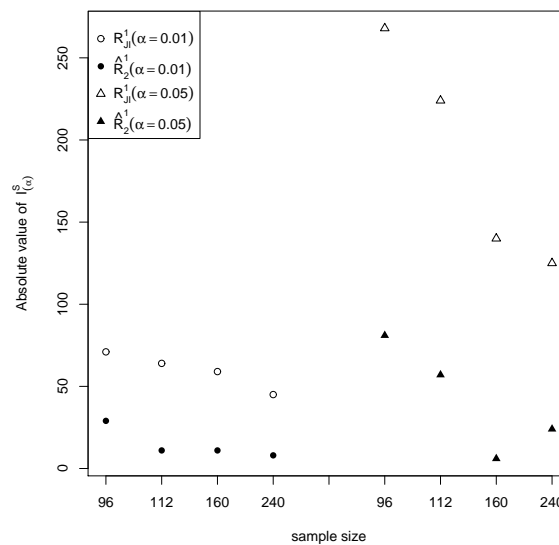


図 23 R_{JI}^1 と変換統計量 \hat{R}_2^1 の Case(II) での誤差

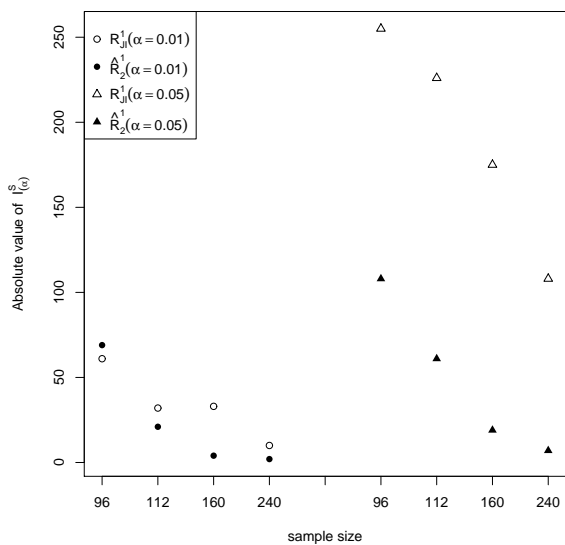


図 24 R_{JI}^1 と変換統計量 \hat{R}_2^1 の Case(III) での誤差

図 22, 23, 24 より, 各々の場合において $a = 1$ (ピアソンの X^2 統計量) のとき χ^2 分布への近似について以下の結果がわかる.

- Case(I) 標本数にかかわらず, 変換統計量 \hat{R}_2^1 は, 統計量 R_{JI}^1 より近似が改良されている.
- Case(II) 標本数にかかわらず, 変換統計量 \hat{R}_2^1 は, 統計量 R_{JI}^1 より近似が改良されている.
- Case(III) $\alpha = 0.01$ のとき, $n \geq 6 \times rst$ の場合において, 変換統計量 \hat{R}_2^1 は, 統計量 R_{JI}^1 より

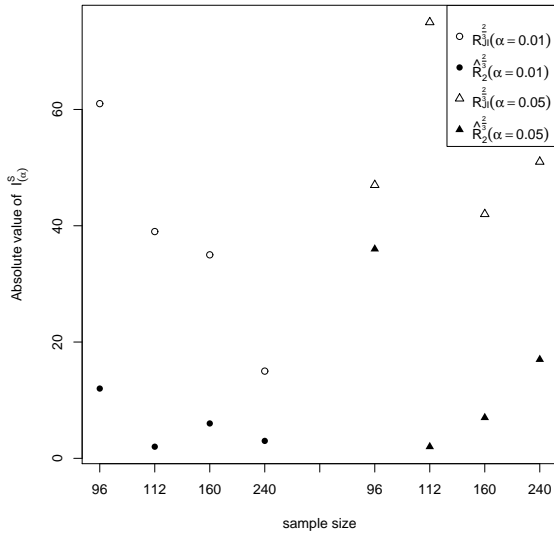


図 25 $R_{JI}^{2/3}$ と変換統計量 $\hat{R}_2^{2/3}$ の Case(I) での誤差

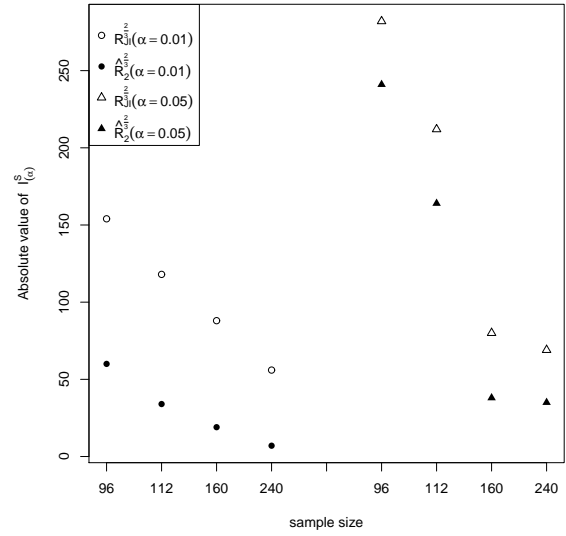


図 26 $R_{JI}^{2/3}$ と変換統計量 $\hat{R}_2^{2/3}$ の Case(II) での誤差

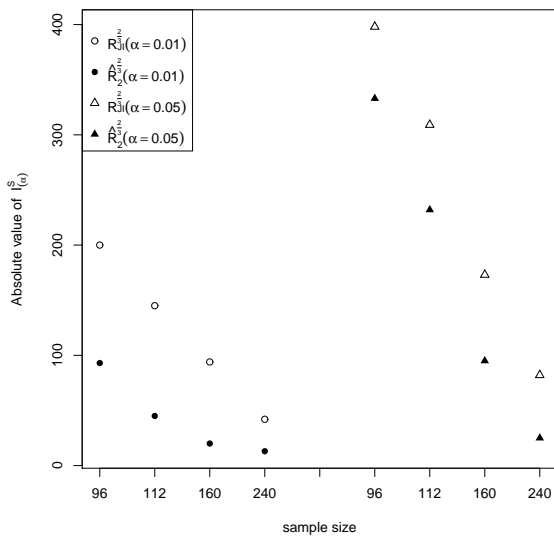


図 27 $R_{JI}^{2/3}$ と変換統計量 $\hat{R}_2^{2/3}$ の Case(III) での誤差

り近似が改良されている。 $\alpha = 0.05$ のとき、標本数にかかわらず、変換統計量 \hat{R}_2^1 は、統計量 R_{JI}^1 より近似が改良されている。

図 25, 26, 27 より、各々の場合において $a = 2/3$ のとき χ^2 分布への近似について Case(I) - (III) の場合で、標本数にかかわらず、変換統計量 $\hat{R}_2^{2/3}$ は、統計量 $R_{JI}^{2/3}$ より近似が改良されていることがわかる。

次に、検出力についての実験を行う。 $4 \times 2 \times 2$ 分割表において、Case (I) - Case (III) で定めた確率 $p_{i..}, p_{.jk}$ を用いた同時独立性の帰無仮説より、以下の対立仮説を考察する。

$$H_1^{JI} : p_{ijk} = p_{i..}p_{.jk} + d_{ijk} \quad (i = 1, \dots, 4; j = 1, 2; k = 1, 2),$$

ただし、

$$(d_{ij1}) = \begin{pmatrix} \delta & \delta \\ \delta & \delta \\ -\delta & -\delta \\ -\delta & -\delta \end{pmatrix}, \quad (d_{ij2}) = \begin{pmatrix} -\delta & -\delta \\ -\delta & -\delta \\ \delta & \delta \\ \delta & \delta \end{pmatrix},$$

である。 H_1^{JI} のもとで多項乱数ベクトルを用いて、 10^6 組の分割表を発生させ、その分割表を使うことによって、統計量 $R_{JI}^a, \hat{R}_1^0, \hat{R}_j^a$ ($j = 2, 3$) の検出力の数値計算例を図 28 - 図 33 に示す。

6 数値計算例

6.2 3次元分割表での同時独立性検定の場合

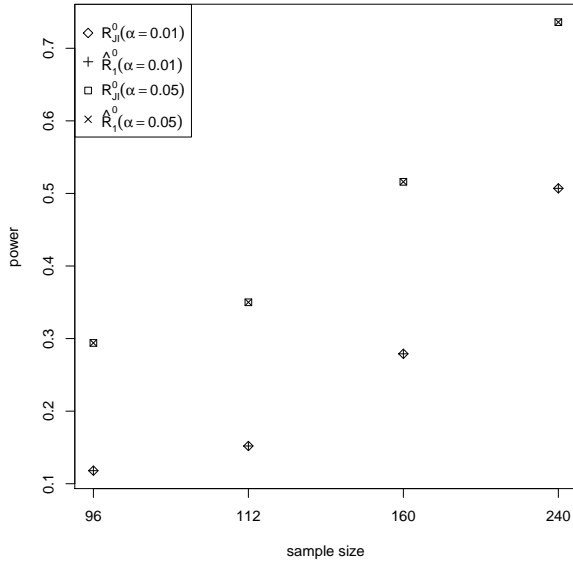


図 28 R_{JI}^0 と変換統計量 \hat{R}_{I1}^0 の case(I) での検出力

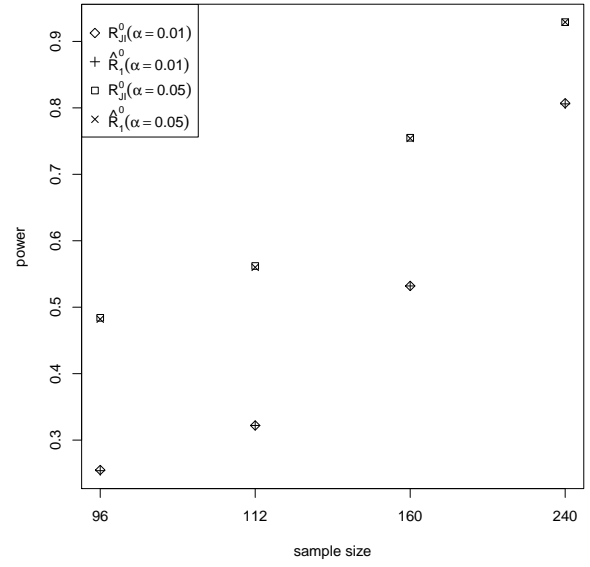


図 29 R_{JI}^0 と変換統計量 \hat{R}_{I1}^0 の case(II) での検出力

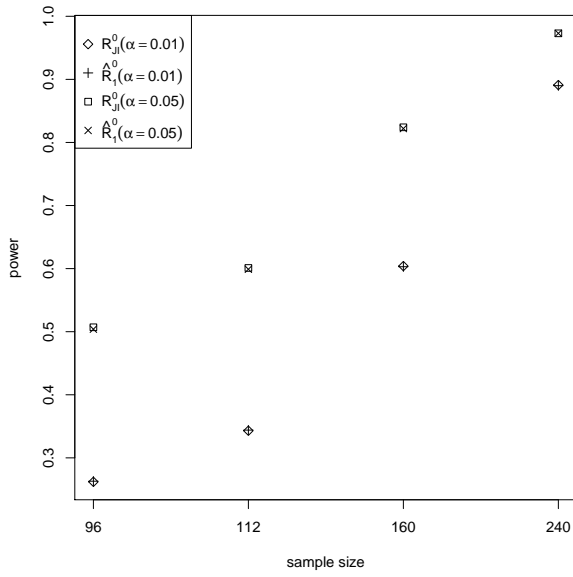


図 30 R_{JI}^0 と変換統計量 \hat{R}_{I1}^0 の case(III) での検出力

6 数値計算例

6.2 3次元分割表での同時独立性検定の場合

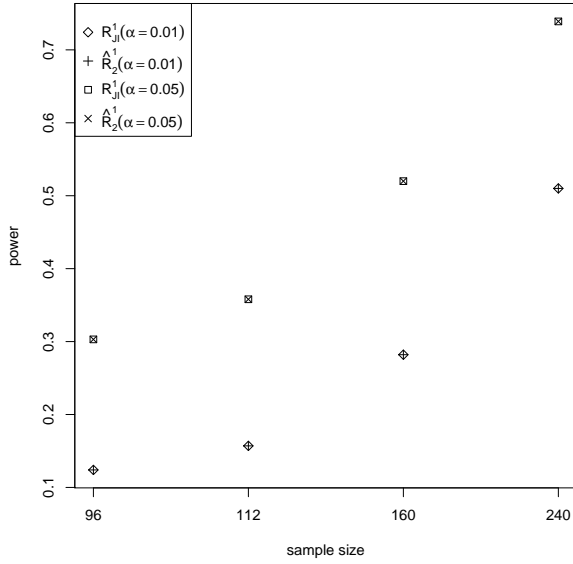


図 31 R_{JI}^1 と変換統計量 \hat{R}_{I2}^1 の case(I) での検出力

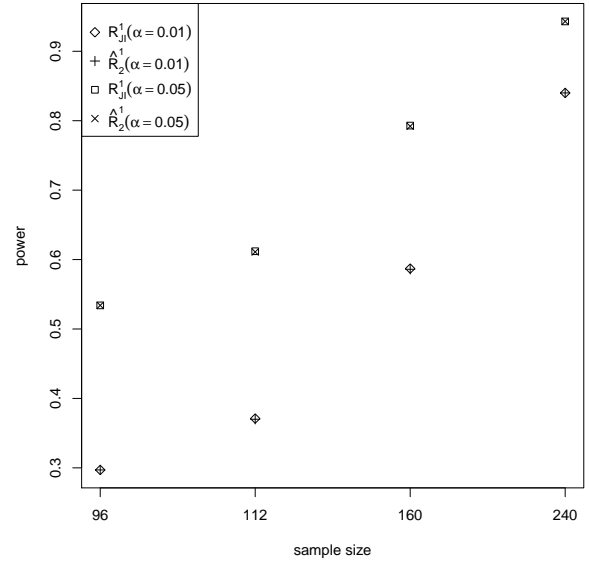


図 35 R_{JI}^1 と変換統計量 \hat{R}_{I2}^1 の case(II) での検出力

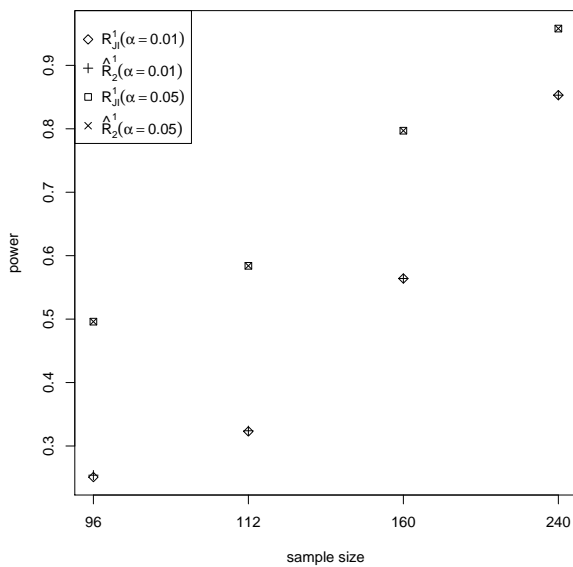


図 36 R_{JI}^1 と変換統計量 \hat{R}_{I2}^1 の case(III) での検出力

6 数値計算例

6.2 3次元分割表での同時独立性検定の場合

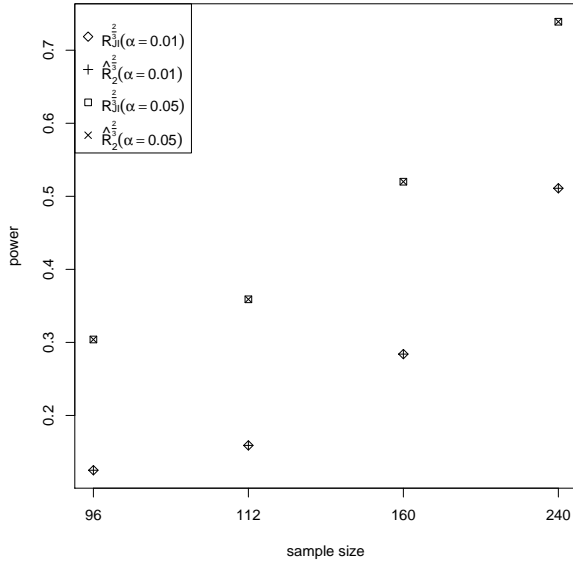


図 37 $R_{JI}^{2/3}$ と変換統計量 $\hat{R}_2^{2/3}$ の case(I) での検出力

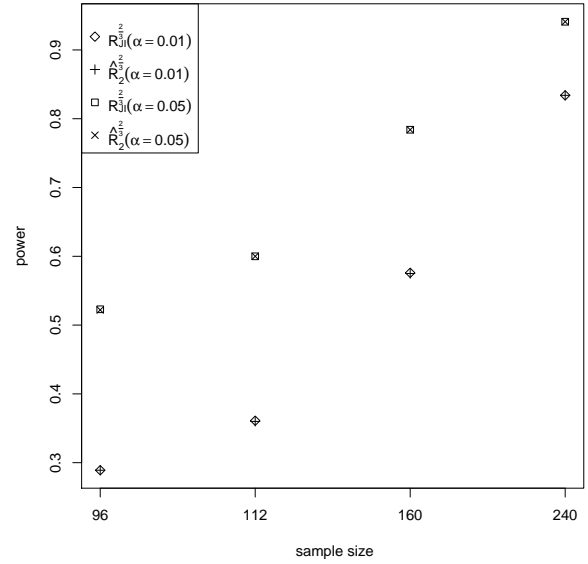


図 32 $R_{JI}^{2/3}$ と変換統計量 $\hat{R}_2^{2/3}$ の case(II) での検出力

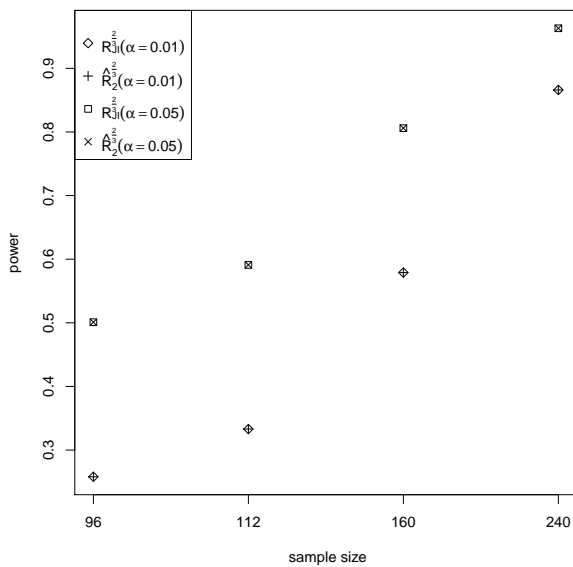


図 33 $R_{JI}^{2/3}$ と変換統計量 $\hat{R}_2^{2/3}$ の case(III) での検出力

図 28 - 図 33 より，もとの統計量と変換統計量は，ほぼ同じ検出力を示していることがわかる．以上のことから，次のことがわかる．

統計量 R_{JI}^0 とその変換統計量は，他の 2 つの統計量と比べるとあまり高い検出力を示さないが，まれに変換統計量がもとの統計量よりも良い検出力を返すことがある．統計量 $R_{JI}^{2/3}$ は，Case(III) の確率においても変換統計量の検出力が下がりにくい．統計量 R_{JI}^1 とその変換統計量は，他の 2 つの統計量と比べ高い検出力を示している．特に，Case(III) の確率において， \hat{R}_3^1 の値が他の検出力よりも高くなる場合がある．

よって， χ^2 分布への近似の良さと検出力の高さから，統計量 R_{JI}^1 とその変換統計量 \hat{R}_2^1, \hat{R}_3^1 が良い値を示していることがわかる．

6.3 数表

6.3.1 図 1 - 図 9 の数表

以下， 3×3 正方分割表における各統計量についての $I_{(\alpha)}^S$ の値を示す．

表 6.1 3×3 正方分割表の R_S^0 と \tilde{R}_1^0 における $I_{(\alpha)}^S$ の絶対値の値

α	n	(I)		(II)		(III)	
		R_S^0	\tilde{R}_1^0	R_S^0	\tilde{R}_1^0	R_S^0	\tilde{R}_1^0
0.01	54	410	206	348	129	278	132
	63	308	126	272	27	219	60
	72	240	75	240	1	175	44
	81	215	35	213	5	156	16
	90	180	22	193	19	130	17
	135	94	9	127	1	78	11
0.05	54	1111	517	524	412	817	218
	63	852	255	410	150	675	108
	72	731	149	362	69	584	68
	81	620	97	338	37	479	47
	90	540	48	298	14	393	63
	135	325	16	158	23	278	2

表 6.2 3×3 正方分割表の R_S^1 と \tilde{R}_a^1 ($a = 2, 3$) における $I_{(\alpha)}^S$ の絶対値の値

α	n	(I)			(II)			(III)		
		R_S^1	\tilde{R}_2^1	\tilde{R}_3^1	R_S^1	\tilde{R}_2^1	\tilde{R}_3^1	R_S^1	\tilde{R}_2^1	\tilde{R}_3^1
0.01	54	341	115	115	348	129	129	291	89	89
	63	271	17	17	272	27	27	216	17	17
	72	225	12	12	240	1	1	192	2	2
	81	190	33	33	213	5	5	166	8	8
	90	177	29	29	193	19	19	153	1	1
	135	119	1	1	127	1	1	109	3	3
0.05	54	516	321	321	524	412	412	464	342	342
	63	400	107	107	410	150	150	327	183	183
	72	357	33	33	362	69	69	289	108	108
	81	319	17	17	338	37	37	250	50	50
	90	264	9	9	298	14	14	258	51	51
	135	182	6	6	158	23	23	136	18	18

表 6.3 3×3 正方分割表の $R_S^{2/3}$ と $\tilde{R}_a^{2/3}$ ($a = 2, 3$) における $I_{(\alpha)}^S$ の絶対値の値

α	n	(I)			(II)			(III)		
		$R_S^{2/3}$	$\tilde{R}_2^{2/3}$	$\tilde{R}_3^{2/3}$	$R_S^{2/3}$	$\tilde{R}_2^{2/3}$	$\tilde{R}_3^{2/3}$	$R_S^{2/3}$	$\tilde{R}_2^{2/3}$	$\tilde{R}_3^{2/3}$
0.01	54	227	134	134	228	141	141	188	40	40
	63	167	34	34	166	45	45	134	7	7
	72	135	1	1	148	13	13	123	8	8
	81	107	20	20	138	2	2	99	15	15
	90	102	22	22	112	11	11	97	5	5
	135	78	4	4	81	2	2	70	4	4
0.05	54	214	343	343	222	400	400	161	119	119
	63	151	126	126	152	163	163	111	15	15
	72	137	49	49	138	72	72	102	6	6
	81	120	27	27	136	40	40	94	2	2
	90	90	6	6	117	16	16	117	23	23
	135	76	8	8	52	17	17	37	20	20

6.3.2 図 19 - 図 27 の数表

以下, $4 \times 2 \times 2$ 分割表における各統計量についての $I_{(\alpha)}^S$ の値を示す.

表 6.4 $4 \times 2 \times 2$ 分割表の R_{JI}^0 と \hat{R}_1^0 における $I_{(\alpha)}^S$ の絶対値の値

α	n	(I)		(II)		(III)	
		R_{JI}^0	\hat{R}_1^0	R_{JI}^0	\hat{R}_1^0	R_{JI}^0	\hat{R}_1^0
0.01	96	626	169	684	142	629	294
	112	486	106	650	56	628	178
	160	265	26	481	41	534	11
	240	164	13	350	67	424	79
0.05	96	1859	397	2649	221	2692	688
	112	1481	271	2408	13	2551	331
	160	863	67	1854	287	2039	160
	240	573	68	1177	229	1454	313

表 6.5 $4 \times 2 \times 2$ 分割表の $R_{JI}^{2/3}$ と \hat{R}_a^1 ($a = 2, 3$) における $I_{(\alpha)}^S$ の絶対値の値

α	n	(I)			(II)			(III)		
		$R_{JI}^{2/3}$	$\hat{R}_2^{2/3}$	$\hat{R}_3^{2/3}$	$R_{JI}^{2/3}$	$\hat{R}_2^{2/3}$	$\hat{R}_3^{2/3}$	$R_{JI}^{2/3}$	$\hat{R}_2^{2/3}$	$\hat{R}_3^{2/3}$
0.01	96	61	12	12	154	60	60	200	93	93
	112	39	2	2	118	34	34	145	45	45
	160	35	6	6	88	19	19	94	20	20
	240	15	3	3	56	7	7	42	13	13
0.05	96	47	36	36	282	241	241	398	333	333
	112	75	2	2	212	164	164	309	232	232
	160	42	7	7	80	38	38	173	95	95
	240	51	17	17	69	35	35	82	25	25

表 6.6 $4 \times 2 \times 2$ 分割表の $R_{JI}^{2/3}$ と $\hat{R}_a^{2/3}$ ($a = 2, 3$) における $I_{(\alpha)}^S$ の絶対値の値

α	n	(I)			(II)			(III)		
		R_{JI}^1	\hat{R}_2^1	\hat{R}_3^1	R_{JI}^1	\hat{R}_2^1	\hat{R}_3^1	R_{JI}^1	\hat{R}_2^1	\hat{R}_3^1
0.01	96	107	17	17	71	29	29	61	69	69
	112	68	10	10	64	11	11	32	21	21
	160	60	4	4	59	11	11	33	2	2
	240	38	2	2	45	8	8	10	21	21
0.05	96	165	61	61	268	81	81	255	108	108
	112	108	19	19	224	57	57	226	61	61
	160	80	21	21	140	6	6	175	19	19
	240	34	10	10	125	24	24	108	7	7

6.3.3 図 10 - 図 18 の数表

以下, 3×3 正方分割表における各統計量についての 検出力 の値を示す.

表 6.7 3×3 正方分割表の R_S^0 と \tilde{R}_1^0 における H_1^S のもとでの検出力の値

α	n	(I)		(II)		(III)	
		R_S^0	\tilde{R}_1^0	R_S^0	\tilde{R}_1^0	R_S^0	\tilde{R}_1^0
0.01	54	0.146	0.164	0.175	0.186	0.206	0.212
	63	0.191	0.199	0.222	0.231	0.260	0.268
	72	0.234	0.241	0.270	0.275	0.329	0.341
	81	0.283	0.289	0.320	0.323	0.389	0.396
	90	0.334	0.337	0.383	0.385	0.456	0.462
	135	0.548	0.548	0.627	0.628	0.718	0.719
0.05	54	0.350	0.360	0.386	0.390	0.440	0.424
	63	0.412	0.417	0.461	0.462	0.514	0.502
	72	0.473	0.476	0.517	0.519	0.590	0.580
	81	0.524	0.526	0.578	0.578	0.647	0.640
	90	0.572	0.574	0.629	0.630	0.702	0.696
	135	0.776	0.777	0.825	0.825	0.889	0.888

表 6.8 3×3 正方分割表の R_S^1 と \tilde{R}_a^1 ($a = 2, 3$) における H_1^S のもとでの検出力の値

α	n	(I)			(II)			(III)		
		R_S^1	\tilde{R}_2^1	\tilde{R}_3^1	R_S^1	\tilde{R}_2^1	\tilde{R}_3^1	R_S^1	\tilde{R}_2^1	\tilde{R}_3^1
0.01	54	0.425	0.423	0.423	0.377	0.384	0.384	0.308	0.301	0.301
	63	0.526	0.522	0.522	0.463	0.462	0.462	0.383	0.377	0.377
	72	0.617	0.611	0.611	0.549	0.530	0.530	0.460	0.453	0.453
	81	0.696	0.691	0.691	0.627	0.622	0.622	0.532	0.527	0.527
	90	0.766	0.760	0.760	0.694	0.690	0.690	0.602	0.597	0.597
	135	0.949	0.948	0.948	0.910	0.909	0.909	0.846	0.845	0.845
0.05	54	0.688	0.694	0.694	0.630	0.639	0.639	0.557	0.555	0.555
	63	0.771	0.773	0.773	0.712	0.715	0.715	0.637	0.637	0.637
	72	0.834	0.834	0.834	0.779	0.777	0.777	0.707	0.706	0.706
	81	0.882	0.882	0.882	0.833	0.833	0.833	0.765	0.765	0.765
	90	0.917	0.917	0.917	0.875	0.875	0.875	0.815	0.814	0.814
	135	0.988	0.988	0.988	0.976	0.976	0.976	0.950	0.950	0.950

表 6.9 3×3 正方分割表の $R_S^{2/3}$ と $\tilde{R}_a^{2/3}$ ($a = 2, 3$) における H_1^S のもとでの検出力の値

α	n	(I)			(II)			(III)		
		$R_S^{2/3}$	$\tilde{R}_2^{2/3}$	$\tilde{R}_3^{2/3}$	$R_S^{2/3}$	$\tilde{R}_2^{2/3}$	$\tilde{R}_3^{2/3}$	$R_S^{2/3}$	$\tilde{R}_2^{2/3}$	$\tilde{R}_3^{2/3}$
0.01	54	0.420	0.411	0.411	0.200	0.185	0.185	0.301	0.256	0.256
	63	0.521	0.505	0.505	0.244	0.256	0.256	0.381	0.443	0.443
	72	0.613	0.591	0.591	0.285	0.246	0.246	0.459	0.439	0.439
	81	0.693	0.681	0.681	0.337	0.327	0.327	0.531	0.495	0.495
	90	0.763	0.754	0.754	0.394	0.389	0.389	0.600	0.571	0.571
	135	0.948	0.947	0.947	0.637	0.635	0.635	0.845	0.838	0.838
0.05	54	0.686	0.682	0.682	0.403	0.377	0.377	0.556	0.522	0.522
	63	0.768	0.764	0.764	0.472	0.450	0.450	0.636	0.688	0.688
	72	0.832	0.826	0.826	0.527	0.505	0.505	0.706	0.588	0.588
	81	0.881	0.878	0.878	0.586	0.576	0.576	0.764	0.725	0.725
	90	0.917	0.915	0.915	0.637	0.631	0.631	0.814	0.784	0.784
	135	0.988	0.988	0.988	0.828	0.827	0.827	0.950	0.943	0.943

6.3.4 図 28 - 図 33 の数表

以下, $4 \times 2 \times 2$ 分割表における各統計量についての検出力の値を示す.

表 6.10 $4 \times 2 \times 2$ 分割表の R_{JI}^0 と \hat{R}_1^0 における H_1^S のもとでの検出力の値

α	n	(I)		(II)		(III)	
		R_{JI}^0	\hat{R}_1^0	R_{JI}^0	\hat{R}_1^0	R_{JI}^0	\hat{R}_1^0
0.01	96	0.118	0.118	0.255	0.254	0.262	0.263
	112	0.152	0.152	0.322	0.322	0.343	0.344
	160	0.279	0.279	0.532	0.532	0.604	0.603
	240	0.507	0.507	0.807	0.806	0.891	0.890
0.05	96	0.294	0.294	0.484	0.482	0.507	0.504
	112	0.350	0.350	0.562	0.560	0.601	0.599
	160	0.516	0.516	0.755	0.754	0.824	0.822
	240	0.736	0.736	0.929	0.929	0.973	0.973

表 6.11 $4 \times 2 \times 2$ 分割表の R_{JI}^1 と \hat{R}_a^1 ($a = 2, 3$) における H_1^S のもとでの検出力の値

α	n	(I)			(II)			(III)		
		R_{JI}^1	\hat{R}_2^1	\hat{R}_3^1	R_{JI}^1	\hat{R}_2^1	\hat{R}_3^1	R_{JI}^1	\hat{R}_2^1	\hat{R}_3^1
0.01	96	0.125	0.125	0.125	0.289	0.289	0.289	0.258	0.258	0.258
	112	0.159	0.159	0.159	0.361	0.360	0.360	0.333	0.333	0.333
	160	0.284	0.284	0.284	0.576	0.575	0.575	0.579	0.579	0.579
	240	0.511	0.511	0.511	0.834	0.834	0.834	0.866	0.866	0.866
0.05	96	0.304	0.304	0.304	0.523	0.522	0.522	0.501	0.501	0.500
	112	0.359	0.359	0.359	0.600	0.600	0.600	0.591	0.591	0.591
	160	0.520	0.520	0.520	0.784	0.784	0.784	0.806	0.806	0.806
	240	0.739	0.739	0.739	0.941	0.941	0.941	0.963	0.963	0.963

表 6.12 $4 \times 2 \times 2$ 分割表の $R_{JI}^{2/3}$ と $\hat{R}_a^{2/3}$ ($a = 2, 3$) における H_1^S のもとでの検出力の値

α	n	(I)			(II)			(III)		
		$R_{JI}^{2/3}$	$\hat{R}_2^{2/3}$	$\hat{R}_3^{2/3}$	$R_{JI}^{2/3}$	$\hat{R}_2^{2/3}$	$\hat{R}_3^{2/3}$	$R_{JI}^{2/3}$	$\hat{R}_2^{2/3}$	$\hat{R}_3^{2/3}$
0.01	96	0.124	0.124	0.124	0.297	0.297	0.297	0.251	0.254	0.253
	112	0.157	0.157	0.157	0.371	0.370	0.370	0.323	0.324	0.324
	160	0.282	0.282	0.282	0.587	0.586	0.586	0.564	0.564	0.564
	240	0.510	0.510	0.510	0.840	0.840	0.840	0.853	0.853	0.853
0.05	96	0.303	0.303	0.303	0.534	0.534	0.534	0.496	0.496	0.496
	112	0.358	0.358	0.358	0.612	0.611	0.611	0.584	0.584	0.584
	160	0.520	0.520	0.520	0.793	0.792	0.792	0.797	0.797	0.797
	240	0.739	0.739	0.739	0.943	0.943	0.943	0.958	0.958	0.958

7 結論

これまで、 C_ϕ を連続分布と仮定することで、正方分割表の対称性の帰無仮説及び $r \times s \times t$ 分割表の同時独立性の帰無仮説のもとで多変量エッジワース展開に基づき C_ϕ の分布の近似式を導いた。数値計算からも、導出した変換統計量はもとの統計量よりもほとんどの場合でよい結果を出していることが分かった。そのため、 ϕ -ダイバージェンス統計量のカイ二乗極限分布への収束をはやめるそれぞれの変換統計量を提案する。

正方分割表の対称性の帰無仮説のもとでの多変量エッジワース展開に基づく検定統計量の分布の漸近近似は、小倉 [25] を一般の分割表に拡張し、 ϕ -ダイバージェンス統計量に適用したものであった。この研究の目的としては、極限分布への収束速度を速め、小標本のもとでも従来の統計量と比較してよい近似を導出するところにもあると考えられる。しかしながら、実際にシミュレーションをしてみると、分割表の各セルに 0 が出てくる場合に発散をしてしまい、思うような数値が出てきづらいという弱点が見つかった。そこで、今後はこの弱点を補うことができる研究にも取り組んでいきたい。具体的には、帰無仮説の条件を緩めた、周辺同等モデルなどでの考察である。さらに、検定だけでなく、ログリニアモデルを用いた分割表の考察も行っていきたい。分割表の対称性検定に関しては、Tomizawa [23] で紹介されているが、様々なモデルが導出されている。そのため、新しいモデルの導出も行っていきたい。

分割表の同時独立性の帰無仮説のもとでの多変量エッジワース展開に基づく検定統計量の分布の漸近近似は、Taneichi *et al.*[21] による 2 次元分割表の独立性検定の分布の近似を 3 次元の分割表に適用したものであった。この研究の目的も上述のもの同様、極限分布への収束速度を速め、小標本のもとでも従来の統計量と比較してよい近似を導出するところである。この数値計算からもおむねそのことを裏付けできたと考えている。この場合では、分割表の各セルに 0 が出てきても、 $X_{i..}$, $X_{.jk}$ などのように和を取ったものを用いているためだと考えられる。また、次元の拡張ということを多少考えることができたので、この研究を足掛かりにさらに次元を拡張した、 n 次元の分割表を用いた研究にも取り組んでいきたいと考えている。

これらのことを今後の課題として、課題解決や、さらなる研究を行っていけるよう努力したい。

謝辞

本論文は筆者が鹿児島大学大学院理工学研究科システム情報科学専攻博士後期課程に在籍中の研究成果をまとめたものである。同研究科数理情報科学専攻教授 種市 先生には、指導教官として本研究の実施の機会を与えて戴き、その遂行にあたって終始、ご指導をいただいた。ここに深謝の意を表す。北海道教育大学釧路校教授 関谷 先生にも、研究のきっかけとなるアイデアや、論文中でキーとなるアドバイスを多くいただいた。ここに深謝の意を表す。さらに、鹿児島大学大学院理工学研究科数理情報科学専攻教授 新森 先生、並びに、同専攻教授 杉本 先生には副査としてご助言を戴くとともに本論文の細部にわたりご指導を戴いた。ここに深謝の意を表す。本専攻 種市 研究室の各位には研究遂行にあたり日頃より有益なご討論ご助言を戴いた。ここに感謝の意を表す。

付録A 定理 3.2 の証明

定理 3.2 (再掲)

$$J_1^S = \Pr(\chi_{r(r-1)/2}^2 \leq b_{l_2}) + \frac{1}{n} \sum_{h=0}^2 w_h^\phi \Pr(\chi_{r(r-1)/2+2h}^2 \leq b_{l_2}) + o(n^{-1})$$

ただし,

$$\begin{aligned} w_0^\phi &= -\frac{1}{8} \sum_{l=1}^{r-1} \sum_{m=l+1}^r \frac{1}{p_{lm}}, \\ w_1^\phi &= \frac{1}{16} \left\{ 4 - \phi^{(4)}(1) \right\} \sum_{l=1}^{r-1} \sum_{m=l+1}^r \frac{1}{p_{lm}}, \\ w_2^\phi &= -\frac{1}{16} \left\{ 2 - \phi^{(4)}(1) \right\} \sum_{l=1}^{r-1} \sum_{m=l+1}^r \frac{1}{p_{lm}} \end{aligned}$$

である. ここで,

$$C_\phi^S(\mathbf{X}_{rr}) = n \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \left\{ 2p_{jk} + \frac{1}{\sqrt{n}}(X_{jk} + X_{kj}) \right\} \phi \left(1 + \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}(X_{jk} - X_{kj})}{2p_{jk} + \frac{1}{\sqrt{n}}(X_{jk} + X_{kj})} \right) \quad (\text{A.1})$$

である.

ただし,

$$J_1^S = \int \cdots \int_{B_\phi(b_{l_2})} g(\mathbf{x}_{rr}) \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} h_1(\mathbf{x}_{rr}) + \frac{1}{n} h_2(\mathbf{x}_{rr}) \right\} d\mathbf{x}_{rr}$$

$$B_\phi(b_{l_2}) = \{ \mathbf{x}_{rr} = (x_{11}, \dots, x_{r,r-1}) : C_\phi^S(\mathbf{X}_{rr}) \equiv C_\phi^S(\mathbf{x}_{rr}) < b_{l_2} \}.$$

このとき, $\Pr(\mathbf{x}_{rr} \in B_\phi(b_{l_2}))$ の漸近展開をえるためには, $B_\phi(b_{l_2}) \cap L$ の範囲にあるすべての点での局所 Edgeworth 展開の和が必要である. そこで, Yarnold [24] は格子点分布にしたがう確率変数が拡張された凸集合に属する確率の近似値を与えた.

ここで,

$$f(\mathbf{x}_{rr}) = (2\pi)^{-N/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp \left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}'_{rr} \Sigma^{-1} \mathbf{x}_{rr} \right) \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} h_1(\mathbf{x}_{rr}) + \frac{1}{n} h_2(\mathbf{x}_{rr}) \right\},$$

とおくと,

$$J_1^S = \int \cdots \int_{B_\phi(b_{l_2})} f(\mathbf{x}_{rr}) d\mathbf{x}_{rr}$$

A 定理 3.2 の証明

と書け、 \mathbf{X}_{rr} が密度関数 $f(\mathbf{x}_{rr})$ を持つ連続な確率変数であるとき、 J_1 を $C_\phi^S(\mathbf{X}_{rr})$ の分布関数とみなすことができる。そこで、 $C_\phi^S(\mathbf{X}_{rr})$ の分布関数を求める。ここで、 $C_\phi^S(\mathbf{X}_{rr})$ の特性関数は

$$c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{itC_\phi^S(\mathbf{x}_{rr})\} f(\mathbf{x}_{rr}) d\mathbf{x}_{rr}$$

となる。

$C_\phi^S(\mathbf{x}_{rr})$ を

$$C_\phi^S(\mathbf{x}_{rr}) = K_\phi(\mathbf{x}_{rr}) + o(n^{-1})$$

と表すと、

$$\begin{aligned} K_\phi(\mathbf{x}_{rr}) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{k=j+1}^r \frac{(X_{jk} - X_{kj})^2}{p_{jk}} \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{k=j+1}^r \frac{(X_{jk} - X_{kj})^2 (X_{jk} + X_{kj})}{4p_{jk}^2} \\ &\quad + \frac{1}{n} \left\{ \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{k=j+1}^r \frac{(X_{jk} - X_{kj})^2 (X_{jk} + X_{kj})^2}{8p_{jk}^3} + \frac{\phi^{(4)}(1)}{96} \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{k=j+1}^r \frac{(X_{jk} - X_{kj})^4}{p_{jk}^3} \right\} \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} \exp\{itC_\phi^S(\mathbf{X}_{rr})\} &= \exp\left\{ \frac{it}{2} \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{k=j+1}^r \frac{(X_{jk} - X_{kj})^2}{p_{jk}} \right\} \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} g_1^\phi(\mathbf{x}_{rr}) + \frac{1}{n} g_2^\phi(\mathbf{x}_{rr}) + o(n^{-1}) \right\} \end{aligned}$$

ただし、

$$g_1^\phi(\mathbf{x}_{rr}) = -it \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{k=j+1}^r \frac{(X_{jk} - X_{kj})^2 (X_{jk} + X_{kj})}{4p_{jk}^2},$$

$$g_2^\phi(\mathbf{x}_{rr}) = it \left\{ \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{k=j+1}^r \frac{(X_{jk} - X_{kj})^2 (X_{jk} + X_{kj})^2}{8p_{jk}^3} + \frac{\phi^{(4)}(1)}{96} \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{k=j+1}^r \frac{(X_{jk} - X_{kj})^4}{p_{jk}^3} \right\}$$

$c_\phi(t)$ は

$$\begin{aligned} c_\phi(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi)^{-N/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2} \mathbf{x}'_{rr} (\Sigma_{rr} v^{-1} + \Lambda) \mathbf{x}_{rr}\right] \\ &\quad \times \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} g_1^\phi(\mathbf{x}_{rr}) + \frac{1}{n} g_2^\phi(\mathbf{x}_{rr}) \right\} \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} h_1(\mathbf{x}_{rr}) + \frac{1}{n} h_2(\mathbf{x}_{rr}) \right\} d\mathbf{x}_{rr} + o(n^{-1}) \end{aligned}$$

と表現できる。

さらに、行列 Ω_{rr} を

$$\Omega_{rr} = \Sigma_{rr}^{-1} + \Lambda_{rr}$$

A 定理 3.2 の証明

とする。ただし,

$$\begin{aligned}\Lambda_{rr} &= -it \operatorname{diag}(p_{11}, p_{12}, \dots, p_{r \ r-1})^{-1} \boldsymbol{\lambda}, \\ \boldsymbol{\lambda} &= (\mathbf{a}_{11} \mathbf{a}_{12} \cdots \mathbf{a}_{r \ r-1}), \\ \mathbf{a}_{jk} &= (a_{jk11}, a_{jk12}, \dots, a_{jk \ r \ r-1})', \\ a_{jklm} &= \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}\end{aligned}$$

とおく。このとき,

$$\begin{aligned}c_\phi(t) &= (|\Omega_{rr}| |\Sigma_{rr}|)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi)^{-N/2} |\Omega_{rr}|^{1/2} \\ &\quad \times \left[\exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}'_{rr} \Omega_{rr} \mathbf{x}_{rr}\right) \right] A_\phi(\mathbf{x}_{rr}) d\mathbf{x}_{rr} + o(n^{-1}),\end{aligned}\quad (\text{A.2})$$

ただし,

$$A_\phi(\mathbf{x}_{rr}) = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \left\{ h_1(\mathbf{x}_{rr}) + g_1^\phi(\mathbf{x}_{rr}) \right\} + \frac{1}{n} \left\{ h_2(\mathbf{x}_{rr}) + h_1(\mathbf{x}_{rr}) g_1^\phi(\mathbf{x}_{rr}) + g_2^\phi(\mathbf{x}_{rr}) \right\},$$

Σ_{rr} は, (3.2) で与えられている。(A.2) を積分することで, 特性関数 $c_\phi(t)$ を

$$c_\phi(t) = (|\Omega_{rr}| |\Sigma_{rr}|)^{-1/2} \left\{ 1 + \frac{1}{n} \sum_{h=0}^2 (1 - 2it)^{-h} w_h^\phi + o(n^{-1}) \right\}\quad (\text{A.3})$$

と表現できる。ただし, w_h^ϕ ($h = 0, 1, 2$) は (3.4), (3.5), (3.6) で定義されている。よって,

$$(|\Omega_{rr}| |\Sigma_{rr}|)^{-1/2} = (1 - 2it)^{-r(r-1)/4},$$

このとき, $(|\Omega_{rr}| |\Sigma_{rr}|)^{-1/2}$ は $\chi_{r(r-1)/2}^2$ の分布の特性関数である。さらに, (A.3) を反転させることで, (3.3) をえる。これで 定理 3.2 が示せた。

付録B 定理 4.2 の証明

定理 4.2 (再掲)

J_1^{JI} 項は

$$J_1^{JI} = \Pr(\chi_{(r-1)(st-1)}^2 \leq b_{l_3}) + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^3 v_j^\phi \Pr(\chi_{(r-1)(st-1)+2j}^2 \leq b_{l_3}) + o(n^{-1}),$$

として評価される。ただし,

$$\begin{aligned} v_0^\phi &= -\frac{1}{12}(I-1)(L-1), \\ v_1^\phi &= \frac{1}{24} \left(3 [(I-r^2)\{L-(st)^2\} + 2(I-r)(L-st)] + 6\phi''''(1)(I-r^2)\{L-(st)^2\} \right. \\ &\quad + \{\phi''''(1)\}^2 [3(I-r^2)\{L-(st)^2\} + 2(I-3r+2)\{L-3(st)+2\}] \\ &\quad \left. - 3\phi^{(4)}(1)(I-2r+1)\{L-2(st)+1\} \right), \\ v_2^\phi &= -\frac{1}{24} \left(6 [(I-r^2)\{L-(st)^2\} + (I-2r+1)\{L-2(st)+1\}] \right. \\ &\quad + 4\phi''''(1) [3(I-r^2)\{L-(st)^2\} + (I-3r+2)\{L-3(st)+2\}] \\ &\quad + 2\{\phi''''(1)\}^2 [3(I-r^2)\{L-(st)^2\}^2 + 2(I-3r+2)\{L-3(st)+2\}] \\ &\quad \left. - 3\phi^{(4)}(1)(I-2r+1)\{L-2(st)+1\} \right), \\ v_3^\phi &= \frac{1}{24} \left(\{1 + \phi''''(1)\}^2 [3(I-r^2)\{L-(st)^2\} + 2(I-3r+2)\{L-3(st)+2\}] \right). \end{aligned}$$

また,

$$I = \sum_{i=1}^r \frac{1}{p_{i\cdot}},$$

$$L = \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \frac{1}{p_{\cdot jk}}$$

である。

(4.3) を用いて, 統計量 C_ϕ^{JI} を

$$C_\phi^{JI}(\mathbf{X}_{rst}) = 2n \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t p_{i\cdot} p_{\cdot jk} \left(1 + \frac{X_{i\cdot}}{\sqrt{np_{i\cdot}}} \right) \left(1 + \frac{X_{\cdot jk}}{\sqrt{np_{\cdot jk}}} \right) \phi(D) \quad (\text{B.1})$$

B 定理 4.2 の証明

と書き換えることができる。ただし、

$$D = \left(1 + \frac{X_{i..}}{\sqrt{np_{i..}}}\right)^{-1} \left(1 + \frac{X_{.jk}}{\sqrt{np_{.jk}}}\right)^{-1} \left(1 + \frac{X_{ijk}}{\sqrt{np_{i..}p_{.jk}}}\right)$$

$$X_{i..} = \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t X_{ijk} \quad (j = 1, \dots, s; k = 1, \dots, t),$$

$$X_{.jk} = \sum_{i=1}^r X_{ijk} \quad (i = 1, \dots, r)$$

ここで、 \mathbf{X}_{rst} を連続型確率変数とすることで、(4.5), (4.7), (4.8) でそれぞれ与えられている $f(\cdot), h_1(\cdot), h_2(\cdot)$ を用い、

$$f(\mathbf{x}_{rst}) = \left\{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}h_1(\mathbf{x}_{rst}) + \frac{1}{n}h_2(\mathbf{x}_{rst})\right\} d\mathbf{x}_{rst}$$

と書くことにする。このとき、 $C_\phi^{JI}(\mathbf{X}_{rst})$ を分布関数とすることで、

$$J_1^{rst} = \int \cdots \int_{B_\phi(b_{i_3})} f(\mathbf{x}_{rst}) \left\{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}h_1(\mathbf{x}_{rst}) + \frac{1}{n}h_2(\mathbf{x}_{rst})\right\} d\mathbf{x}_{rst}$$

と書くことができる。ただし、 $d\mathbf{x}_{rst} = dx_{111} \cdots dx_{rs,t-1}$ である。

よって、 $C_\phi^{JI}(\mathbf{X}_{rst})$ の特性関数は推定値を

$$c_\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{itC_\phi(\mathbf{x}_{rst})\} f(\mathbf{x}_{rst}) \left\{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}h_1(\mathbf{x}_{rst}) + \frac{1}{n}h_2(\mathbf{x}_{rst})\right\} d\mathbf{x}_{rst}$$

とする。 $C_\phi(\mathbf{x}_{rst})$ を展開すると、

$$C_\phi(\mathbf{x}_{rst}) = K_\phi(\mathbf{x}_{rst}) + o(n^{-1})$$

となる。ただし、

B 定理 4.2 の証明

$$\begin{aligned}
K_\phi(\mathbf{x}_{rst}) = & \left(\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \frac{x_{ijk}^2}{p_{i..} p_{.jk}} - \sum_{i=1}^r \frac{x_{i..}^2}{p_{i..}} - \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \frac{x_{.jk}^2}{p_{.jk}} \right) \\
& + \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\frac{1}{3} \phi'''(1) \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \frac{x_{ijk}^3}{p_{i..}^2 p_{.jk}^2} + 2\{1 + \phi'''(1)\} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \frac{x_{i..} x_{.jk} x_{ijk}}{p_{i..} p_{.jk}} \right. \\
& \quad \left. + \left\{ 1 + \frac{2}{3} \phi'''(1) \right\} \left(\sum_{i=1}^r \frac{x_{i..}^3}{p_{i..}^2} \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \frac{x_{.jk}^3}{p_{.jk}^2} \right) \right. \\
& \quad \left. - \{1 + \phi'''(1)\} \left(\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \frac{x_{i..} x_{ijk}^2}{p_{i..}^2 p_{.jk}} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \frac{x_{.jk} x_{ijk}^2}{p_{i..} p_{.jk}^2} \right) \right] \\
& + \frac{1}{n} \left[\frac{1}{12} \phi^{(4)}(1) \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \frac{x_{ijk}^4}{p_{i..}^2} + \left\{ 1 + 2\phi'''(1) + \frac{1}{2} \phi^{(4)}(1) \right\} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \frac{x_{i..}^2 x_{.jk}^2}{p_{i..} p_{.jk}} \right. \\
& \quad - \left\{ 1 + \frac{4}{3} \phi'''(1) + \frac{1}{4} \phi^{(4)}(1) \right\} \left(\sum_{i=1}^r \frac{x_{i..}^4}{p_{i..}^3} + \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \frac{x_{.jk}^4}{p_{.jk}^3} \right) \\
& \quad - \frac{1}{3} \left\{ 2\phi'''(1) + \phi^{(4)}(1) \right\} \left(\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \frac{x_{i..} x_{ijk}^3}{p_{i..}^3 p_{.jk}^2} + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \frac{x_{.jk} x_{ijk}^3}{p_{i..}^2 p_{.jk}^3} \right) \\
& \quad + \left\{ 1 + 2\phi'''(1) + \frac{1}{2} \phi^{(4)}(1) \right\} \left(\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \frac{x_{i..}^2 x_{ijk}^2}{p_{i..}^3 p_{.jk}} + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \frac{x_{.jk}^2 x_{ijk}^2}{p_{i..} p_{.jk}^3} \right) \\
& \quad + \left\{ 1 + 3\phi'''(1) + \phi^{(4)}(1) \right\} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \frac{x_{i..} x_{.jk} x_{ijk}^2}{p_{i..}^2 p_{.jk}^2} \\
& \quad \left. - \left\{ 2 + 4\phi'''(1) + \phi^{(4)}(1) \right\} \left(\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \frac{x_{i..} x_{.jk} x_{ijk}}{p_{i..}^2 p_{.jk}} \frac{x_{i..} x_{.jk} x_{ijk}}{p_{i..} p_{.jk}^2} \right) \right] \quad (\text{B.2})
\end{aligned}$$

である。それゆえ、

$$\begin{aligned}
\exp\{itC_\phi^{JI}(\mathbf{x}_{rst})\} = & \left[\exp \left\{ it \left(\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \frac{x_{ijk}^2}{p_{i..} p_{.jk}} - \sum_{i=1}^r \frac{x_{i..}^2}{p_{i..}} - \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \frac{x_{.jk}^2}{p_{.jk}} \right) \right\} \right] \\
& \times \left[1 + \frac{1}{\sqrt{n}} g_1^\phi(\mathbf{x}_{rst}) \frac{1}{n} g_2^\phi(\mathbf{x}_{rst}) + o(n^{-1}) \right], \quad (\text{B.3})
\end{aligned}$$

と書ける。このとき、

B 定理 4.2 の証明

$$g_1^\phi(\mathbf{x}_{rst}) = it \left[\frac{1}{3} \phi'''(1) \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \frac{x_{ijk}^3}{p_{i..}^2 p_{.jk}^2} + 2\{1 + \phi'''(1)\} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \frac{x_{i..} x_{.jk} x_{ijk}}{p_{i..} p_{.jk}} \right. \\ \left. + \left\{ 1 + \frac{2}{3} \phi'''(1) \right\} \left(\sum_{i=1}^r \frac{x_{i..}^3}{p_{i..}^2} \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \frac{x_{.jk}^3}{p_{.jk}^2} \right) \right. \\ \left. - \{1 + \phi'''(1)\} \left(\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \frac{x_{i..} x_{ijk}^2}{p_{i..}^2 p_{.jk}} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \frac{x_{.jk} x_{ijk}^2}{p_{i..} p_{.jk}^2} \right) \right],$$

$$g_2^\phi(\mathbf{x}_{rst}) = \frac{1}{2} \{g_1^\phi(\mathbf{x}_{rst})\}^2 \\ + it \left[\frac{1}{12} \phi^{(4)}(1) \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \frac{x_{ijk}^4}{p_{i..}^2} + \left\{ 1 + 2\phi'''(1) + \frac{1}{2} \phi^{(4)}(1) \right\} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \frac{x_{i..}^2 x_{.jk}^2}{p_{i..} p_{.jk}} \right. \\ \left. - \left\{ 1 + \frac{4}{3} \phi'''(1) + \frac{1}{4} \phi^{(4)}(1) \right\} \left(\sum_{i=1}^r \frac{x_{i..}^4}{p_{i..}^3} + \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \frac{x_{.jk}^4}{p_{.jk}^3} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{3} \left\{ 2\phi'''(1) + \phi^{(4)}(1) \right\} \left(\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \frac{x_{i..} x_{ijk}^3}{p_{i..}^3 p_{.jk}^2} + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \frac{x_{.jk} x_{ijk}^3}{p_{i..}^2 p_{.jk}^3} \right) \right. \\ \left. + \left\{ 1 + 2\phi'''(1) + \frac{1}{2} \phi^{(4)}(1) \right\} \left(\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \frac{x_{i..}^2 x_{.jk}^2}{p_{i..}^3 p_{.jk}} + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \frac{x_{.jk}^2 x_{ijk}^2}{p_{i..} p_{.jk}^3} \right) \right. \\ \left. + \left\{ 1 + 3\phi'''(1) + \phi^{(4)}(1) \right\} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \frac{x_{i..} x_{.jk} x_{ijk}^2}{p_{i..}^2 p_{.jk}^2} \right. \\ \left. - \left\{ 2 + 4\phi'''(1) + \phi^{(4)}(1) \right\} \left(\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \frac{x_{i..}^2 x_{.jk} x_{ijk}}{p_{i..}^2 p_{.jk}} \frac{x_{i..} x_{.jk} x_{ijk}}{p_{i..} p_{.jk}^2} \right) \right]$$

である。よって、 $c_\phi(t)$ は (B.3) を代入することで、

$$c_\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi)^{-(rst-1)/2} |\Sigma_{rst}|^{-1/2} \\ \times \left[\exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{x}'_{rst} \Sigma_{rst}^{-1} \mathbf{x}_{rst} + it \left(\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \frac{x_{ijk}^2}{p_{i..} p_{.jk}} - \sum_{i=1}^r \frac{x_{i..}^2}{p_{i..}} - \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \frac{x_{.jk}^2}{p_{.jk}} \right) \right\} \right] \\ \times \left[1 + \frac{1}{\sqrt{n}} g_1^\phi(\mathbf{x}_{rst}) \frac{1}{n} g_2^\phi(\mathbf{x}_{rst}) + o(n^{-1}) \right] \left[1 + \frac{1}{\sqrt{n}} h_1(\mathbf{x}_{rst}) + \frac{1}{n} h_2(\mathbf{x}_{rst}) \right] d\mathbf{x}_{rst} + o(n^{-1})$$

と表現できる。

さらに、行列 Λ_{rst} を

$$\Lambda_{rst} = \Lambda_1 + \Lambda_2$$

B 定理 4.2 の証明

とおく。ただし,

$$\begin{aligned}\Lambda_1 &= (I_{rst-1}O_{rst-1})A_1(I_{rst-1}O_{rst-1})', \\ \Lambda_2 &= \left(\frac{1}{1-2it} - 1\right) (I_{rst-1}O_{rst-1})A_2(I_{rst-1}O_{rst-1})'\end{aligned}$$

である。 I_{rst-1} は, $(rst-1) \times (rst-1)$ の単位行列で, O_{rst-1} は $rst-1$ 次元の零ベクトルであり,

$$\begin{aligned}A_1 &= \text{diag}(p_{1..}, \dots, p_{r..}) \otimes \text{diag}(p_{.11}, \dots, p_{.st}) - (\mathbf{p}_L \mathbf{p}'_L) \otimes (\mathbf{p}_C \mathbf{p}'_C), \\ A_2 &= \{\text{diag}(p_{1..}, \dots, p_{r..}) - (\mathbf{p}_L \mathbf{p}'_L)\} \otimes \{\text{diag}(p_{.11}, \dots, p_{.st}) - (\mathbf{p}_C \mathbf{p}'_C)\}\end{aligned}$$

そして,

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_L &= (p_{1..}, \dots, p_{r..})', \\ \mathbf{p}_C &= (p_{.11}, \dots, p_{.st})'\end{aligned}$$

であり, \otimes はクロネッカー積を表している。これらを用いて,

$$\begin{aligned}c_\phi(t) &= \left(\frac{|\Sigma_{rst}|}{|\Lambda_{rst}|}\right)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi)^{-(rst-1)/2} |\Lambda_{rst}|^{-1/2} \\ &\quad \times \left[\exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}'_{rst} \Sigma_{rst}^{-1} \mathbf{x}_{rst}\right) \right] A_\phi(\mathbf{x}_{rst}) d\mathbf{x}_{rst} + o(n^{-1})\end{aligned}\quad (\text{B.4})$$

と表すことができる。ただし,

$$A_\phi(\mathbf{x}_{rst}) = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \left\{ h_1(\mathbf{x}_{rst}) + g_1^\phi(\mathbf{x}_{rst}) \right\} + \frac{1}{n} \left\{ h_2(\mathbf{x}_{rst}) + h_1(\mathbf{x}_{rst})g_1^\phi(\mathbf{x}_{rst}) + g_2^\phi(\mathbf{x}_{rst}) \right\}$$

であり, Σ_{rst} は, (4.6) で与えられている。そして, (B.4) の積分を行うことで, 特性関数 $c_\phi(t)$ を

$$c_\phi(t) = \left(\frac{|\Sigma_{rst}|}{|\Lambda_{rst}|}\right)^{-1/2} \left[1 + \frac{1}{24n} \sum_{j=0}^3 (1-2it)^{-j} w_j^\phi + o(n^{-1}) \right],\quad (\text{B.5})$$

と表すことができる。ただし, v_j^ϕ ($j=0, 1, 2, 3$) は, (4.12), (4.13), (4.14), (4.15) で定義されている。よって,

$$\left(\frac{|\Sigma_{rst}|}{|\Lambda_{rst}|}\right)^{-1/2} = (1-2it)^{-(r-1)(st-1)/2}$$

この時, $\left(\frac{|\Sigma_{rst}|}{|\Lambda_{rst}|}\right)^{-1/2}$ は $\chi_{(r-1)(st-1)}^2$ の分布の特性関数である。さらに, (B.5) を反転させることで, (4.11) をえる。

これで, 定理 4.2 の証明が示せた。

参考文献

- [1] Alan Agresti, *Categorical Data Analysis 2nd Edition*, John Wiley & Sons, Inc., ISBN: 978-0-471-45876-0, 2003.
- [2] A. H. Bowker, A test for symmetry in contingency Tables, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **43**(244), 572-574, 1948.
- [3] O. E. Barndorff-Nielsen, D. R. Cox, Bartlett adjustment to the likelihood ratio statistic and the distribution of maximum likelihood estimator, *J. Roy. Statist. Soc. B*, **46**, 483-495, 1984.
- [4] O. E. Barndorff-Nielsen, P. Hall, On the level-error after Bartlett adjustment of the likelihood ratio statistic, *Biometrika*, **75**, 374-378, 1988.
- [5] H. Caussinus, Contribution à l'analyse statistique des tableaux de corrélation, *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse*, **29** 77-182, 965.
- [6] N. Cressie, T. R. C. Read, Multinomial goodness-of-fit tests, *J. Roy. Statist. Soc. B*, **46**, 440-464, 1984.
- [7] Y. Fujikoshi, A method for improving the large-sample chi-squared approximations to some multivariate test statistics, *Amer. J. Math. Management Sci.*, **17**, 15-29, 1997.
- [8] Y. Fujikoshi, Transformations with improved chi-squared approximations, *J. Multivariate Anal.*, **72**, 249-263, 2000.
- [9] Y. Kakizawa, Higher order monotone Bartlett-type adjustment for some multivariate test statistics, *Biometrika*, **83**, 923-927, 1996.
- [10] T. Kobe, N. Taneichi, Y. Sekiya, Improved transformed statistics for the test of one factor independence from the other two in an $r \times s \times t$ contingency table, *J. Japan. Statist. Soc.*, **45**(1), 77-98, 2015.
- [11] K. J. Koehler, Goodness-of-fit tests for log-linear models in sparse contingency tables, *J. Amer. Statist. Assoc.* **81**, 483-493, 1986.
- [12] D. N. Lawley, A general method for approximating to the distribution of the likelihood ratio criteria, *Biometrika*, **43**, 295-303, 1956.
- [13] M. L. Menéndez, J. A. Pardo, L. Pardo, M. C. Pardo, Asymptotic approximations for the distributions of the (h, ϕ) -divergence goodness-of-fit statistics: application to Renyi's statistics, *Kybernetes*, **26** (4), 442-452, 1997.
- [14] H. Ogura, Asymptotic approximation for the distribution of chi-square statistic for test for symmetry in 2×2 contingency table, *Master's thesis of Hokkaido University of Education*, 2013 (in Japanese).
- [15] T. R. C. Read, Closer asymptotic approximations for the distributions of the power divergence goodness-of-fit statistics, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **36**, 59-69, 1984.

- [16] T. R. C. Read, Small-sample comparisons for the power divergence goodness-of-fit statistics, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **79**, 929-935, 1984.
- [17] Y. Sekiya, N. Taneichi, Improvement of approximations for the distributions of multinomial goodness-of-fit statistics under nonlocal alternatives, *J. Multivariate Anal.*, **91**, 199-223, 2004.
- [18] M. Siotani, Y. Fujikoshi, Asymptotic approximations for the distributions of multinomial goodness-of-fit statistics, *Hiroshima Math. J.*, **14**, 115-124, 1984.
- [19] N. Taneichi, Y. Sekiya, A. Suzukawa, An asymptotic approximation for the distribution of ϕ -divergence multinomial goodness-of-fit statistic under local alternatives, *J. Japan Statist. Soc.*, **31 (2)**, 207-224, 2001.
- [20] N. Taneichi, Y. Sekiya, A. Suzukawa, Asymptotic approximations for the distributions of the multinomial goodness-of-fit statistics under local alternatives, *J. Multivariate Anal.*, **81**, 335-359, 2002.
- [21] N. Taneichi, Y. Sekiya, Improved transformed statistics for the test of independence in $r \times s$ contingency tables, *J. Multivariate Anal.*, **98**, 1630-1657, 2007.
- [22] S. Tomizawa, Diagonals-parameter symmetry model for cumulative probabilities in square contingency tables with ordered categories, *Biometrics*, **49**, 883-887, 1993.
- [23] S. Tomizawa, Analysis of square contingency tables in statistics, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **227**, 147-174, 2009.
- [24] J. K. Yarnold, Asymptotic approximations for the probability that a sum of lattice random vectors lies in a convex set, *Ann. Math. Statist.*, **43**, 1566-1580, 1972.
- [25] 小倉 寛生, 2×2 分割表の対称性検定におけるカイ二乗統計量の分布の漸近展開について, 北海道教育大学 修士論文, 2013.
- [26] 柳川 堯, 離散多変量データの解析, 共立出版, 2006.
- [27] 柳原 宏和, 正規および χ^2 近似の改良変換, 広島大学 修士論文, 1998.