

ハイブリッドロケットの c^* 効率について

片野田 洋* 永田 晴紀**

c^* Efficiency of Hybrid Rockets

Hiroshi KATANODA* and Harunori NAGATA**

A c^* efficiency of a hybrid rocket calculated by reconstruction technique, η_{rec} , is compared with the traditional c^* efficiency, η_{trad} , obtained by the time-averaged O/F ratio. Simulation data of combustion pressure and mass flow rate of oxidizer are provided for different three cases to calculate two types of c^* efficiency. The calculated results show that 1) η_{rec} and η_{trad} are almost equal when the theoretical characteristic exhaust velocity, c_{th}^* , varies almost linearly against the variation of O/F ratio during the firing, 2) η_{rec} is greater than η_{trad} when c_{th}^* varies non-linearly against the variation of O/F ratio, 3) η_{rec} is appropriate as a c^* efficiency of a hybrid rocket.

Keywords : Hybrid Rocket, c^* efficiency

1. 緒論

従来型のロケットには液体ロケットと固体ロケットがある。前者は燃料も酸化剤も液体であり、後者は燃料も酸化剤も固体である。加えて、燃料と酸化剤に相の異なる物質を用いるハイブリッドロケット¹⁾ (図 1) がある。ハイブリッドロケットでは、燃料に固体 (プラスチックなど)、酸化剤に液体 (液体酸素など) を用いる場合が多い。ハイブリッドロケットは燃料が爆発する心配がなく、また扱う液体が 1 種類であるため、液体ロケットや固体ロケットに比べて安全で小型化が可能であり、そのため安価に製造できるという特徴がある。

ハイブリッドロケットは実用例が少ないが、その

理由として、燃料の燃焼速度 (後退速度²⁾) が小さいことと、その結果として推力が低いことが挙げられる。後退速度を高める方法として、酸化剤を旋回させる方式³⁾ や燃料グレインをブロック化し、縦列の多段衝突噴流を用いる CAMUI 方式⁴⁾ 等が考案されている。

推力は燃焼ガスの状態に依存し、その良し悪しは後述の c^* 効率で評価することができる。従来型のロケットでは、 c^* 効率はプロペラントの質量流量、ノズルのスロート断面積、燃焼室圧力、および化学平衡計算により得られる特性排気速度から算出する

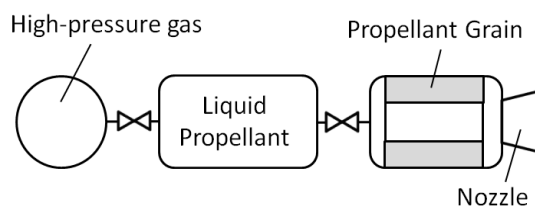


図 1 ハイブリッドロケットの模式図

2016 年 8 月 30 日受理

* 機械工学専攻

** 北海道大学大学院工学院 機械宇宙工学専攻

ことができる。しかし、ハイブリッドロケットでは燃焼中に O/F 比（燃料の質量流量 \dot{m}_f に対する酸化剤の質量流量 \dot{m}_o の比 \dot{m}_o/\dot{m}_f ）が変化し、その結果、 c^* 効率も時間的に変化する。これは従来型のロケット（固体ロケット、液体ロケット）にはない特徴である。そのため、ハイブリッドロケットには c^* 効率をどのように算出するかという特有の問題が存在する。 c^* 効率の算出法として後述の再現法（reconstruction technique）があるが、再現法で算出される c^* 効率は、従来型ロケットに用いられる c^* 効率よりも大きくなるのが理論的・実験的に示されている⁵⁾。

本研究では、ハイブリッドロケットの燃焼実験を想定した 3 通りの模擬実験データを用いて再現法により c^* 効率を算出する。そして、従来型ロケットの燃焼実験のデータ整理に用いる算出方法で得られる c^* 効率と比較して、ハイブリッドロケットの c^* 効率としてどちらが適切であるかを考察する。

2. c^* 効率の算出方法と計算条件

2.1 c^* 効率の算出方法⁵⁾

c^* 効率 η の定義は

$$\eta \equiv \frac{c_{ex}^*}{c_{th}^*} \quad (1)$$

ただし、 c_{ex}^* は実験的に算出される特性排気速度であり、式(2)で与えられる、 c_{th}^* は燃焼室のガスが化学平衡状態にあり、かつ燃焼室からノズルのスロートまでが準一次元定常等エントロピー流れであるときに c_{ex}^* の定義式を変形して得られる理論式であり、式(3)で与えられる。

$$c_{ex}^* \equiv \frac{p_c A_t}{\dot{m}_p} = \frac{p_c A_t}{\dot{m}_o + \dot{m}_f} \quad (2)$$

$$c_{th}^* = c_{th}^*(\xi_{ex}, p_c) = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \sqrt{\gamma R T_c}} \quad (3)$$

ここで、 p_c 、 A_t 、 \dot{m}_p 、 ξ_{ex} 、 γ 、 R 、 T_c はそれぞれ、燃焼室圧力、スロート断面積、プロペラントの質量流量、O/F 比の実験値、比熱比、気体定数、燃焼室

のガス温度である。燃焼室のガスが化学平衡状態にあり、かつ燃焼室からノズルのスロートまで準一次元定常等エントロピー流れであるとき、式(1)の c^* 効率 η は 1 となる。

従来型のロケットにおいて燃焼実験で得られる c^* 効率を η_{trad} とすると、式(1)から

$$\eta_{trad} = \overline{c_{ex}^*} / \overline{c_{th,av}^*} \quad (4)$$

ただし、

$$\overline{c_{ex}^*} = \overline{p_c} A_t / \overline{\dot{m}_p} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \overline{c_{th,av}^*} &= c_{th}^*(\overline{\xi_{ex}}, \overline{p_c}) \\ &= \frac{1}{\gamma} \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \sqrt{\gamma R T_c}} \quad (6) \end{aligned}$$

式(4)～(6)中の文字の上付バーは、燃焼開始時刻 $t=0$ から終了時刻 $t=t_b$ までの時間平均を意味する。

次に、ハイブリッドロケットの c^* 効率を算出する手法である再現法について述べる。この場合の c^* 効率を η_{rec} とする。ある時刻 t において、式(1)、(2)より、

$$\eta_{rec} c_{th}^*(\xi_{ex}(t), p_c(t)) = \frac{p_c(t) A_t}{\dot{m}_o(t) \left(1 + \frac{1}{\xi_{ex}(t)}\right)} \quad (7)$$

ハイブリッドロケットの燃焼実験では、実験データとして得られるのは燃焼室圧力の時間履歴 $p_c(t)$ 、酸化剤の質量流量の時間履歴 $\dot{m}_o(t)$ 、および燃焼終了後の燃料の焼失質量である。簡単のためにスロート断面積 A_t を一定と仮定すると、式(7)中の未知数は η_{rec} と $\xi_{ex}(t)$ である。一般に、 c^* 効率は燃焼中一定とするため、 η_{rec} を適当な値に仮定すれば、式(7)から任意の時刻 t での $\xi_{ex}(t)$ が陰的に求められる。

この計算を $t=0$ から t_b まで行くと、次式から燃料の質量流量の時間履歴 $\dot{m}_f(t)$ が得られる。

$$\dot{m}_f(t) = \frac{\dot{m}_o(t)}{\xi_{ex}(t)} \quad (8)$$

上式を $t=0 \sim t_b$ の範囲で積分すると

$$m_f = \int_0^{t_b} \dot{m}_f(t) dt \quad (9)$$

ただし、 m_f は燃焼終了時点での燃料の焼失質量であり、これが実験結果と一致するときの η_{rec} を試行錯誤的に求める。以上が再現法による η_{rec} の算出方法である。

次に、ハイブリッドロケットの場合の式(4)に対応する式を求める。式(7)を変形して

$$\eta_{rec} c_{th}^*(\xi_{ex}(t), p_c(t)) (\dot{m}_o(t) + \dot{m}_f(t)) = p_c(t) A_t \quad (10)$$

$t=0 \sim t_b$ の範囲で上式の両辺を積分し、 t_b で除すと、

$$\begin{aligned} \eta_{rec} \frac{1}{t_b} \int_0^{t_b} c_{th}^*(\xi_{ex}(t), p_c(t)) (\dot{m}_o(t) + \dot{m}_f(t)) dt \\ = A_t \frac{1}{t_b} \int_0^{t_b} p_c(t) dt \\ = A_t \bar{p}_c \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、プロペラントの時間平均の質量流量は、

$$\bar{m}_p = \frac{1}{t_b} \int_0^{t_b} (\dot{m}_o(t) + \dot{m}_f(t)) dt \quad (12)$$

式(12)の両辺で式(11)の両辺を除すと

$$\eta_{rec} \frac{\int_0^{t_b} c_{th}^*(\xi_{ex}(t), p_c(t)) (\dot{m}_o(t) + \dot{m}_f(t)) dt}{\int_0^{t_b} (\dot{m}_o(\tau) + \dot{m}_f(\tau)) d\tau} = \frac{A_t \bar{p}_c}{\bar{m}_p} \quad (13)$$

ここで、任意の時刻 t における質量流量加重平均の c^* 効率を次式で定義する。

$$c_{th, mass}^* \equiv c_{th}^*(\xi_{ex}(t), p_c(t)) \frac{\dot{m}_o(t) + \dot{m}_f(t)}{\int_0^{t_b} (\dot{m}_o(\tau) + \dot{m}_f(\tau)) d\tau} \quad (14)$$

上式の時間平均は、

$$\overline{c_{th, mass}^*} = \int_0^{t_b} c_{th, mass}^* dt \quad (15)$$

式(13)の左辺に式(14)、(15)を代入すると、

$$\eta_{rec} \overline{c_{th, mass}^*} = \frac{A_t \bar{p}_c}{\bar{m}_p} \quad (16)$$

上式の右辺は \bar{c}_{ex}^* なので、

$$\eta_{rec} = \frac{\overline{c_{ex}^*}}{c_{th, mass}^*} \quad (17)$$

再現法における c^* 効率 η_{rec} は式(17)で与えられる。式(4)、(17)の比をとると

$$\frac{\eta_{rec}}{\eta_{trad}} = \frac{\overline{c_{th, av}^*}}{c_{th, mass}^*} \quad (18)$$

本研究では、上式を用いて η_{rec} と η_{trad} の差異について考察する。

2.2 計算条件

本研究では、燃料はハイブリッドロケットの代表的な燃料の1つであるアクリル樹脂 (Polymethyl Methacrylate: PMMA, 1ユニットの分子式: $C_5H_8O_2$, 標準生成エンタルピー: $-108,130 \text{ cal/mol}^{(6)}$), 酸化剤は液体酸素 (Liquid Oxygen: LOX) とした。

計算条件は3通り (Case 1~3) とした。燃焼室圧力と LOX 質量流量の模擬実験データを図2に示す。燃焼室圧力の時間変化は3つの条件で同じであ

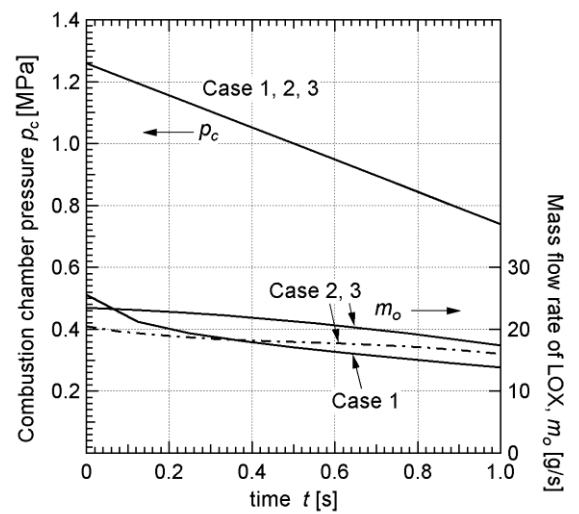


図2 燃焼室圧力と LOX 流量の時間変化 (模擬実験データ)

る。燃焼時間は本計算結果に影響しないが、便宜上いずれも1秒間とした。PMMA燃料の焼失質量はCase 1, 2, 3でそれぞれ22.2g, 14.8g, 11.7gとした。

3. 計算結果と考察

化学平衡計算コードCEA⁷⁾(Chemical Equilibrium with Applications)で計算した断熱条件での燃焼室のガス温度 T_c と比熱比 γ を、O/F比の関数として図3に示す。燃焼室圧力は1MPaとした。図より、 T_c はO/F比 = 1.6~1.9のときに最大値となる。 γ はO/F比 > 1.6のときに約1.12で一定である。

特性排気速度 c_{th}^* のO/F比による変化をCEAで計算した結果を図4に示す。 c_{th}^* は、O/F比 = 1.3のときに最大値1638m/sをとる。O/F比が1.3より大きくなると c_{th}^* は緩やかに線型的に減少するが、O/F比が1.3よりも小さくなると c_{th}^* は急激に減少する。

2章で述べた再現法でO/F比の時間変化を求めた結果を図5に示す。横軸に平行な破線は、 c_{th}^* が最大となるO/F比 = 1.3を示している。図より、いずれの場合もO/F比は時間とともに単調に増加するが、Case 1ではO/F比 ≤ 1.3である。Case 2では前半でO/F比 < 1.3、後半でO/F比 > 1.3となる。Case 3ではO/F比 > 1.3である。

図5に対応する特性排気速度 c_{th}^* の時間変化の計算結果を図6に示す。Case 1の場合、 $t < 0.3s$ ではO/F比が0.7以下であるため、 c_{th}^* は約1300m/s以下であるが、 $t = 1s$ 近傍ではO/F比が1.3に近づくため、 c_{th}^* は理論的な最大値に近い。Case 2の場合、 $t < 0.2s$ ではO/F比が1.0以下であるため、 c_{th}^* は約1500m/s以下であるが、 $t = 0.3 \sim 0.6s$ ではO/F比が1.3の近傍であるため、 c_{th}^* は最大値に近い。 $t > 0.6s$ ではO/F比が1.3よりも大きい側に離れるが、図4からも分かるように、 c_{th}^* はあまり低下しない。Case 3の場合、 $t < 0.2s$ ではO/F比が1.3の近傍であるため、 c_{th}^* は最大値に近い。その後、O/F比は時間とともに増加するが、 c_{th}^* はあまり低下しない。

図5, 6の結果を求める過程で得られた η_{rec} を表-1に示す。同表には、式(4)で得られた η_{rad} と η_{rec} / η_{rad} も示している。表-1より、Case 1では η_{rec} は η_{rad} よりも13%大きい。この違いはCase 2では5%である。Case 3では両者はほぼ等しい。

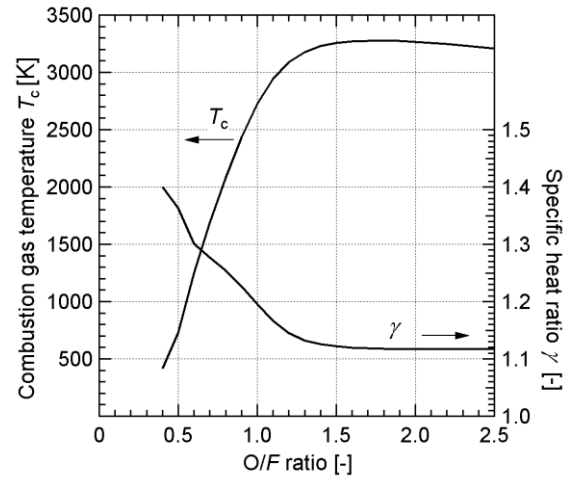


図3 燃焼ガス温度と比熱比のO/F比による変化

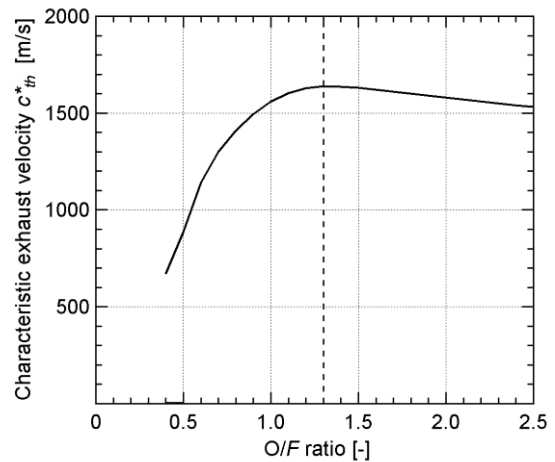


図4 特性排気速度 c_{th}^* のO/F比による変化

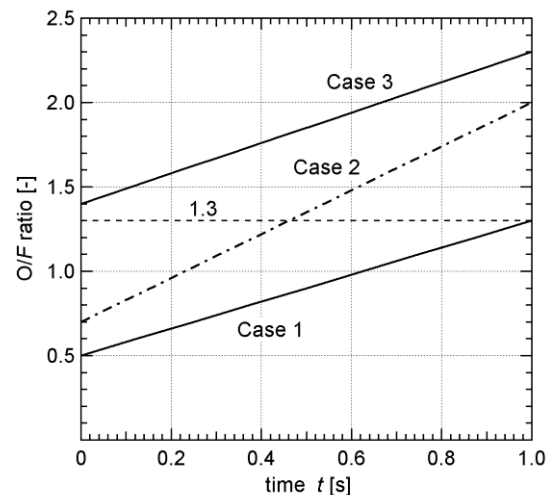


図5 O/F比の時間変化

これらの違いが生じる理由について、以下に考察する。式 (18) より、 η_{rec} / η_{trad} は $\overline{c_{th,av}^*} / \overline{c_{th,mass}^*}$ に等しい。 c_{th}^* は時間平均の O/F 比と時間平均の燃焼室圧力により計算されるが、図 2 に示す圧力の範囲では c_{th}^* に与える圧力の影響は小さい。そこで、O/F 比のみに着目する。いま、O/F 比 ξ の特定の区間において、 c_{th}^* を次のように ξ の二次関数で近似する。

$$c_{th}^*(\xi) = a + b\xi + c\xi^2 \quad (19)$$

図 4 より、 ξ の変化に対して c_{th}^* が線形的に変化する領域 ($c=0$) と、非線形的に変化する領域に分けて以下に考察する。 $\overline{c_{th,mass}^*}$ は式 (14) の時間積分で与えられるが、その本質は $c_{th}^*(t)$ の時間積分であると考えて、 $\overline{c_{th,mass}^*}$ の代わりに $c_{th}^*(t)$ の時間積分に着目する。ここで、改めて $\overline{c_{th,av}^*}$ を c_{th1}^* とおき、 $c_{th}^*(t)$ の時間積分を c_{th2}^* とおく。すなわち、

$$c_{th1}^* = c_{th}^*(\bar{\xi}) \quad (20)$$

$$c_{th2}^* = \frac{1}{t_b} \int_0^{t_b} c_{th}^*(\xi) dt \quad (21)$$

式 (19) を式 (20), (21) に代入すると、

$$c_{th1}^* = a + b\bar{\xi} + c(\bar{\xi})^2 \quad (22)$$

$$\begin{aligned} c_{th2}^* &= \frac{1}{t_b} \int_0^{t_b} (a + b\xi + c\xi^2) dt \\ &= a + b\bar{\xi} + c \frac{1}{t_b} \int_0^{t_b} \xi^2 dt \end{aligned} \quad (23)$$

まず、 ξ に対して c_{th}^* が線形的に変化する領域について考える。 $c=0$ とすると、式 (22), (23) から $c_{th1}^* = c_{th2}^*$ となる。よって、 ξ に対して c_{th}^* が線形的に変化する領域では c_{th1}^* と c_{th2}^* は等しくなる。すなわち、 η_{rec} と η_{trad} はほぼ等しくなる。

次に、 c_{th}^* が非線形的に変化する領域について考える。式 (22), (23) より、 c_{th1}^* と c_{th2}^* の大小関係は、式 (22), (23) それぞれの右辺第 3 項目の大小関係で決まる。 ξ は時間とともに変化することから、十分多くの N 個の離散的な実験データがあるとき、

$$(\bar{\xi})^2 = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i \right)^2 \quad (24)$$

$$\frac{1}{t_b} \int_0^{t_b} \xi^2 dt = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^2 \quad (25)$$

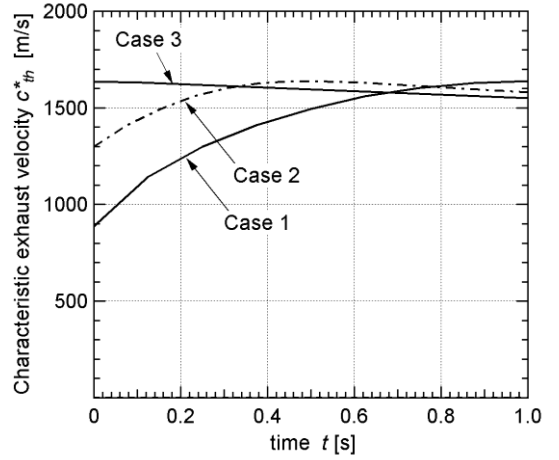


図 6 c_{th}^* の時間変化

表-1 c^* 効率の比較

Case #	1	2	3
η_{rec}	0.930	0.980	0.960
η_{trad}	0.826	0.934	0.962
η_{rec} / η_{trad}	1.13	1.05	0.998

式 (25) から式 (24) を引いたものは統計学における分散 V^2 であり、 V^2 は常に正である。すなわち、

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i \right)^2 = V^2 > 0 \quad (26)$$

式 (19) の定数 c は負であることから、式 (22), (23), (26) より $c_{th1}^* > c_{th2}^*$ 、すなわち、 $c_{th,av}^* > c_{th,mass}^*$ となる。したがって、 ξ に対して c_{th}^* が非線形的に変化する領域では、式 (18) より $\eta_{rec} > \eta_{trad}$ となる。

以上の考察は、表-1 の結果を定性的に説明している。すなわち、Case 1, 2 では、図 4, 5 より ξ に対して c_{th}^* が非線形的に変化し、このとき表-1 より η_{rec} / η_{trad} は 1 より大きい。Case 3 では、 ξ に対して c_{th}^* は線形的に変化し、表-1 より η_{rec} / η_{trad} は約 1 となっている。

最後に、ハイブリッドロケットの c^* 効率として、 η_{trad} 、 η_{rec} のどちらが適切であるかについて考察する。式 (2), (3) より、 c^* 効率は実際の燃焼室の状態がどの程度化学平衡状態に近いかが、かつ燃焼室のよどみ点状態からノズルスロートまでが準一次元定常等エントロピー流れにどの程度近いかを表す

性能指標である。燃焼室のガスの状態がどの程度化学平衡状態に近いかに関係なく、ノズルスロートまで準一次元定常等エントロピー流れが成り立つとすると、 c^* 効率は燃焼室のガスの状態がどの程度化学平衡状態に近づいたかを表す指標となる。ハイブリッドロケットの場合、既に述べたように O/F 比や酸化剤流量が燃焼開始直後から終了まで時々刻々変化とする。そのため、ハイブリッドロケットの c^* 効率は、燃焼開始から終了まで、常に化学平衡状態にあったときに 1 となるべきである。式 (14),

(15) に示したように、 $\overline{c_{th, mass}^*}$ はそのように評価されている。他方、 $\overline{c_{th, av}^*}$ は時間平均の O/F 比から計算されるため、燃焼の途中で O/F 比がその最適値から外れることがあっても、その時間平均値が最適値に近ければ最大値に近い値となる。すなわち、 $\overline{c_{th, av}^*}$ は O/F 比が最適値から外れることによる損失を含んでいない。したがって、ハイブリッドロケットの c^* 効率としては、 $\overline{c_{th, mass}^*}$ を用いる η_{rec} の方が適切であるといえる。 η_{trad} は不適切であり、その取扱いには注意が必要である。

4. 結論

PMMA を燃料、LOX を酸化剤とするハイブリッドロケットについて、3通りの時系列の模擬燃焼実験データを用い、再現法により c^* 効率を計算した。さらに、ハイブリッドロケットの c^* 効率として、 η_{trad} と η_{rec} のどちらが適切であるかについて考察した。本研究の条件の範囲内において得られた主な結論を以下に示す。

- (1) O/F 比に対して c_{th}^* が線形的に変化する領域では、 η_{rec} と η_{trad} は等しい。
- (2) O/F 比に対して c_{th}^* が非線形的に変化する領域では、 $\eta_{rec} > \eta_{trad}$ となる。
- (3) ハイブリッドロケットの c^* 効率としては η_{rec} が適切であり、 η_{trad} は不適切である。

参考文献

- 1) G. Sutton and O. Biblarz, Rocket Propulsion Elements, 7th Ed., John Willey & Sons, pp.579-607 (2000).
- 2) M. J. Chiaverini and K. K. Kuo (Eds.), Fundamentals of Hybrid Rocket Combustion and

Propulsion, American Institute of Aeronautics and Astronautics, p.23 (2006)

- 3) 北川 幸樹、湯浅 三郎、液体酸素旋回型ハイブリッドロケットエンジンの燃焼特性、日本航空宇宙学会論文集、**54**、629 (2006)
- 4) 伊藤 光紀、前田 剛典、柿倉 彰仁、金子 雄大、森一大、中島 卓司、脇田 督司、植松 努、戸谷 剛、大島 伸行、永田 晴紀、縦列多段衝突噴流(CAMUI)方式を用いたハイブリッドロケットの燃料後退特性、日本航空宇宙学会論文集、**55**、646 (2007)
- 5) H. Nagata, H. Nakayama, M. Watanabe, M. Wakita and T. Totani, Accuracy and Applicable Range of a Reconstruction Technique for Hybrid Rockets, *Advances in Aircraft & Spacecraft Science*, **1**, 3, pp.273-289 (2014).
- 6) S. W. Benson, F. R. Cruickshank, D. M. Golden, G. R. Haugen, H. E. O'Neal, A. S. Rodgers, R. Shaw and R. Walsh, Additivity Rules for the Estimation of Thermochemical Properties, *Chemical Reviews*, **69**, 3, pp.279-324 (1969).
- 7) S. Gordon and B. J. McBride, Computer Program for Calculation of Complex Chemical Equilibrium Compositions and Applications, I Analysis, NASA Reference Publications 1311, 55 pages (1994).