

同時進行するプロジェクトによるクロス担保の理論分析¹

王 鏡凱²

Key words: Diversification Strategy, Cross-Pledging, Moral Hazard

キーワード：多角化戦略，クロス担保，モラルハザード

1. はじめに

本論文は Tirole[2006]の固定投資モデルと可変投資モデルに基づき，互いに独立なプロジェクトによるクロス担保(Cross-Pledging)を理論分析したものである．Tirole[2006]の固定投資モデルについて， n 個のプロジェクトによるクロス担保の分析を一般化した上，可変投資モデルとの比較分析を行うことが本論文の目的である．

複数のプロジェクトが互いに独立であれば，クロス担保が利用できる．プロジェクトの独立性により，プロジェクトの数 n が大きくなるにしたがって，企業家のモラルハザード(Moral Hazard)問題は緩和され，企業家の借入能力も向上する．最適解において企業家の期待効用が， $n \geq 2$ の場合は $n = 1$ の場合より大きいことが分かる．

企業の多角化戦略(Diversification Strategy)は時間軸上で考えると大きく 2 つのタイプに分けられる．1 つは同時進行のケースであり，もう 1 つは逐次進行のケースである．企業の実際の多角化戦略も違えば，それに先行する資金調達行動も異なる．本論文では Tirole[2006]に基づき，企業の多角化戦略が同時進行の場合において，資金調達行動に与える影響を考察する³．

プロジェクトが同時進行のケースにおいて多くの場合ではプロジェクト間のクロス担保が想定される．クロス担保の先行研究については Diamond[1984]と Tirole[2006]がある．Diamond[1984]では，複数のプロジェクトが互いに独立であれば，クロス担保が可能になり，借手のモラルハザード問題が緩和される．そして，借手の借入能力を向上させることができる．一方，Tirole[2006]では明示的に企業の資金制約問題をモデリングしたのである．

¹ 本論文は掲載にあたり，レフェリーより詳細かつ示唆的なアドバイスを多々頂いた．記して感謝したい．なお，本論文は H26 年度鹿児島大学法文学部長裁量経費「若手研究者の研究支援事業」による成果の一部である．

² 鹿児島大学法文学部准教授．E-mail: kyogaiw@leh.kagoshima-u.ac.jp

³ 多角化戦略が逐次進行の場合において，企業の資金調達行動に与える影響に関する考察は王[2015]を参照されたい．

Tirole[2006]は固定投資モデルを使用して n 個のプロジェクトによるクロス担保を一般化した⁴。Tirole[2006]では可変投資モデルに関して 2 個のプロジェクトのケースのみを分析している。可変投資モデルに関して n 個のプロジェクトによるクロス担保の理論分析を一般化したのは王・楊[2015a]である。そして、本論文では固定投資モデルと可変投資モデルとの比較分析を行う。

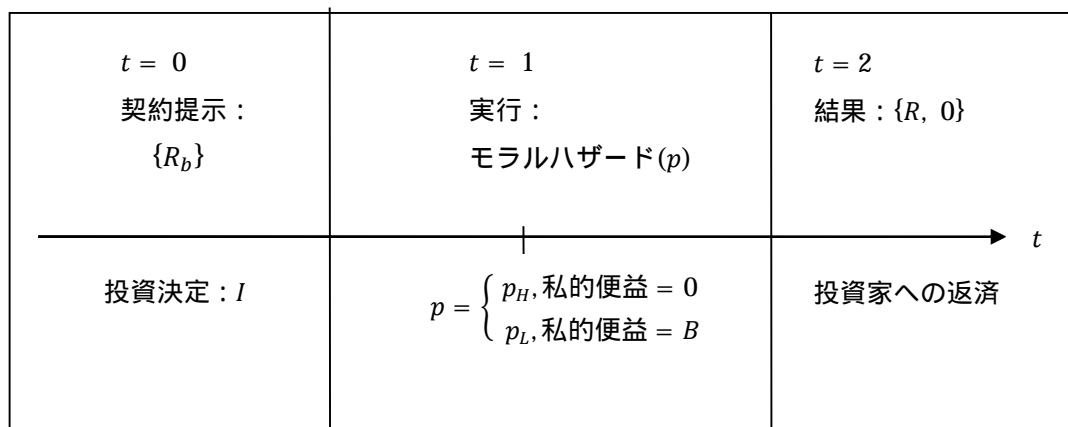
本論文の構成は以下の通りである。第 2 節ではベンチマークとなる固定投資モデルの考察を行う。第 3 節では可変投資モデルの考察を行う。第 4 節では全体をまとめる。

2. ベンチマーク：固定投資モデル

ここでは Tirole[2006]の固定投資モデルについて説明する。本モデルでは、資金の借手である企業家は私的便益を得るために行動し、資金の貸手である投資家の利益を害するような行動をとるかもしれない、というモラルハザードが存在する状況を想定している。リスク中立な企業家(エージェント)は、投資資金を必要とする正の NPV(Net Present Value)のプロジェクトを n 個持っている。しかし、企業家は十分な内部資金を持たないため、プロジェクトを実施するには外部資金を借りる必要がある。貸手となるのはリスク中立な投資家(プリンシパル)である。企業家と投資家の間では貸借の契約を結ぶが、企業家のモラルハザード問題によって契約は複雑になる。つまり、本モデルにおいては、企業家がプロジェクトを実行する際に努力するか、あるいはしないかを選択し、それを投資家が観察できない、という情報の非対称性が存在する。このことによって、企業家が外部から調達できる資金の量は制約され、自己資金が少ない企業家は最適な投資ができないという問題に直面することになる。

2.1 基本設定

図 1：モデルのタイムライン



⁴ 王・楊[2015b]を参照されたい。

ゲームのタイミングは図 1 に示されている。プレイヤーは 2 人、リスク中立的な企業家と投資家である。外部資金調達市場が完全競争であり、投資家は利潤ゼロで貸出すと仮定する。期首 ($t = 0$) において、自己資金 nA を持つ企業家が互いに独立な n 個のプロジェクトへの投資を考えている。プロジェクトに必要な投資額は nI である。ここで I は外生変数であり、本モデルは投資額 I に関して固定投資モデルということである。

また、Tirole[2006]にしたがい、均等投資のケースを想定する。つまり、それぞれのプロジェクトの投資額は I であり、プロジェクト当たりの自己資金は A である。よって、各プロジェクトは独立性を除いて、実質上の違いがなく、区別する必要もない。

自己ファイナンスできない ($A < I$) 企業家は外部の資金調達を考える必要があり、投資家と貸借契約を結ぶことになる。貸借契約の中身は、 n 個のプロジェクトが成功した場合と失敗した場合に応じた担保設定の決め方を定めたものである。以下では契約の中身を説明する。

企業家と投資家が契約について合意すれば、 n 個のプロジェクトへの投資は実行されることになる。期中 ($t = 1$) において企業家はプロジェクトを実行する際にモラルハザードを起こす可能性がある。各プロジェクトに対して企業家の選択肢は努力するかしないかの 2 通りしかない。企業家が努力すれば、プロジェクトの成功確率は p_H となる。逆に企業家が努力しなければ、私的便益 B を得るが、プロジェクトの成功確率は p_L となる。ここでは、 $p_H > 1/2$ かつ $\Delta p \equiv p_H - p_L > 0$ とする。私的便益 B は外生変数であり、投資額に関して固定である。

期末 ($t = 2$) において、 n 個のプロジェクトの成果が実現する。各プロジェクトの成果は成功と失敗の 2 通りしかない。実現される成果はキャッシュインフロー (Cash Inflow) のみである。したがって、企業家が投資家に提供できる担保は将来のプロジェクトのキャッシュインフローのみである。

プロジェクトのキャッシュインフローの配分方法については期首の契約に基づいて、各プロジェクトが成功した場合と失敗した場合に応じて決められている。あるプロジェクトが成功した場合には、キャッシュインフロー R が実現し、企業家は R_b をもらい、残り ($R - R_b$) は投資家がもらう。あるプロジェクトが失敗した場合にはキャッシュインフローが 0 となり、企業家と投資家は何も得られない。企業家は有限責任であることを仮定する。つまり、 $R_b \geq 0$ である。 R は私的便益 B と同様、投資額に関して固定である。

2.2 最適化問題

ここでは基本設定を前提に互いに独立な n 個のプロジェクトへの均等投資によるクロス担保問題を定式化する。一般性を失うことなく、企業家が n 個のプロジェクトすべてを成功させた場合のみ、投資家は彼に報酬 $R_b > 0$ を支払うことが契約可能である。その確率は p_H^n である。1 つのプロジェクトでも失敗した場合には、企業家は報酬を得ることができない。その確率は $(1 - p_H^n)$ である。以下では、プロジェクトを実行するとき、企業家が努力するこ

とを選択することが均衡となるケースを分析する．企業家の（ネット）効用関数は，

$$U_b = p_H^n R_b - nA \quad (1)$$

と書くことができる．企業家が報酬 R_b をもらえるのは， n 個のプロジェクトがすべて成功したときのみである．その確率は p_H^n である．逆に確率 $(1 - p_H^n)$ では，1つ以上のプロジェクトが失敗することを意味し，企業家は何ももらえない．

企業家の効用が(1)式のようにするためには，彼のインセンティブ条件と投資家の参加制約条件を満たす必要がある．企業家のインセンティブ条件は以下のように表現することができる．企業家がすべてのプロジェクトに対して努力すると彼の効用は(1)式の通りであるが， n 個のプロジェクトのうち i 個のプロジェクトに対して努力しない場合には企業家の効用は

$$\tilde{U}_{bi} = p_H^{n-i} p_L^i R_b - nA + iB, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

となる．したがって，企業家に自主的に努力してもらうためには，

$$U_b \geq \tilde{U}_{bi} \quad (3)$$

の条件が満たされる必要がある．これは企業家のインセンティブ条件であり，整理すると

$$p_H^{n-i} (p_H^i - p_L^i) R_b \geq iB, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

となる．企業家が n 個のプロジェクトにおいてすべて努力する場合の期待効用が i 個のプロジェクトに対して努力しない場合の期待効用よりも高いことを表す．しかし，付録で示したように，(4)式において $i = n$ の場合は $i < n$ の場合の十分条件である．

投資家の参加制約条件は彼女の期待収入が貸出額以上であることを保証するものであり，

$$np_H R - p_H^n R_b \geq n(I - A) \quad (5)$$

となる．(5)式の左辺は投資家の期待回収額を表し，右辺は期首に企業家が投資家から借入れた金額を表す．(5)式の全体は投資家の期待収入が投資額を上回らないといけないことを表す．貸出市場が完全競争なので(5)式は常に等号で成立する．ここでは，簡単化のために，

$$\rho_0 \stackrel{\text{def}}{=} \rho_1 - p_H^n B / (p_H^n - p_L^n), \quad \rho_1 \stackrel{\text{def}}{=} p_H R$$

と定義する．分析の有効性を保証するために， $0 < \rho_0 < I < \rho_1$ と仮定する．

(5)式を用いて企業家の効用関数を

$$U_b = n(\rho_1 - I) \quad (6)$$

と書き換えることができる．プロジェクトの NPV は厳密に正($\rho_1 > I$)であり，企業家は投資を実施することが最適である．まとめると，企業家の資金調達問題は(4)式と(5)式を所与として，彼の効用(6)式を最大にするように R_b を求める最大化問題と定義できる．

2.3 均衡の特徴

最適解において(5)式は等号で成立するので， $R_b^* = n(\rho_1 - I + A)/p_H^n$ が得られる．効用 $U_b^* = n(\rho_1 - I)$ である．ただし， $A \geq \bar{A}$ を満たす必要がある． \bar{A} は企業家が借入するために必要最小限の自己資金であり，

$$\bar{A} = I - \rho_0 > 0$$

を満たすものである． $A < \bar{A}$ の企業家はプロジェクトを実行することができない． \bar{A} の下限と n の上限は $I - \rho_0 > 0$ によって与えられるので，プロジェクトの数 n は大きくなるが，無限には発散しない．同じく自己資金 \bar{A} は n の増加にしたがって小さくなるが，0には収束しない． ρ_0 は n に関して増加関数であることは明らかであり， $\rho_0 < I$ より， $\bar{A} > 0$ が厳密に成立する．これらの特徴はDiamond[1984]のモデルにはなかったものである．Tirole[2006]では明示的に企業の資金制約問題をモデリングした結果，Diamond[1984]のモデルの問題点を克服したといえる．

まとめると $n = 1$ の場合， $\rho_0 = \rho_1 - p_H B/\Delta p$ により，

$$R_b^* = (\rho_1 - I + A)/p_H, \quad U_b^* = \rho_1 - I$$

が得られる．

$n = 2$ の場合， $\rho_0 = \rho_1 - p_H^2 B/(p_H^2 - p_L^2)$ により，

$$R_b^* = 2(\rho_1 - I + A)/p_H^2, \quad U_b^* = 2(\rho_1 - I)$$

が得られる．

$n > 2$ の場合， $\rho_0 = \rho_1 - p_H^n B/(p_H^n - p_L^n)$ により，

$$R_b^* = n(\rho_1 - I + A)/p_H^n, U_b^* = n(\rho_1 - I)$$

が得られる。 ρ_0 は n に関して増加関数であるため、 \bar{A} は n に関して減少関数である。したがって、 $n > 2$ の場合の R_b^* は $n \leq 2$ の場合の R_b^* より大きいことが分かる。効用 U_b^* についても同じことがいえる。プロジェクトの独立性により、企業家のモラルハザード問題(インセンティブ条件(4)式)が緩和された結果として、企業家の借入能力(参加制約条件(5)式)が向上しただけでなく、企業家の期待収益と期待効用も向上したのである。そして、 \bar{A} は n に関して減少関数であることから、他の条件が一定ならば、プロジェクト間の独立性の高い多角化戦略をとっている企業ほど、より効率的な現金保有行動をする可能性が高いことが考えられる。

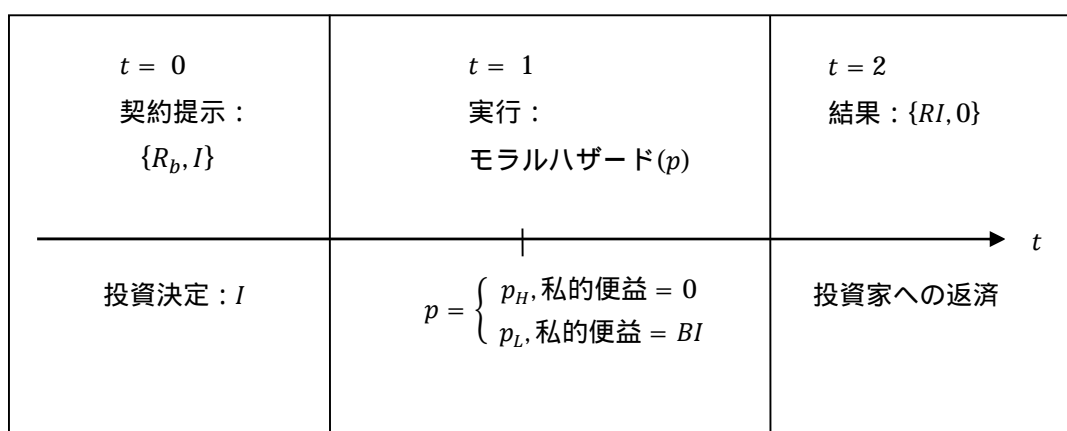
3. クロス担保の一般型：可変投資モデル

企業の多角化戦略について Diamond [1984] は先駆的な論文を発表した。Diamond [1984] と比較すると、Tirole [2006] の固定投資モデルは明示的に企業の資金制約問題をモデリングした。具体的には、企業家という借手が投資行動に関するモラルハザードを起こすかもしれない。そして、モラルハザードが原因で借手は投資に必要な資金を十分に調達できない問題に遭遇すると想定されている。複数のプロジェクトの間でクロス担保が利用可能なら、借手のモラルハザード問題が緩和される。そして、借手の借入能力を向上させることができる。

このように、プロジェクトのクロス担保による借入能力の向上効果は、Tirole [2006] は固定投資モデルを使用して n 個のプロジェクトによるクロス担保を一般化した。しかし、可変投資モデルに関する分析は一般化されていない。本節では Tirole [2006] の分析を補完すべく、可変投資モデルに関して n 個のプロジェクトによるクロス担保の分析を一般化する。

3.1 基本設定

図 2：モデルのタイムライン



ゲームのタイミングは図 2 に示されている。Holmstrom and Tirole [1997] 及び Tirole

[2006]にしたがって、可変投資モデルを考える。本節で用いる可変投資モデルは、第2節で説明した固定投資モデルと基本的に同じモデルであるが、唯一の変更点はプロジェクトへの投資額 I を内生変数として扱う点にある。期首 ($t = 0$) において、自己資金 A を持つ企業家が互いに独立な n 個のプロジェクトへの投資を考えている。 n 個のプロジェクトに必要な投資総額は I である。均等投資を想定すると、それぞれのプロジェクトの投資額は I/n であり、プロジェクト当たりの自己資金は A/n である。よって、各プロジェクトは独立性を除いて、実質上の違いがなく、区別する必要もない。したがって、本モデルは投資額 I に関して可変投資モデルということである。

投資額 I を連続変数に変更したことによって、資金の借手である企業家の私的便益 B は投資額 I に関して不変ではなく、1 単位当たりの投資額に関して不変であるということになる。投資規模が I なら、私的便益は BI である。 R は私的便益 B と同様、1 単位当たりの投資額に関して不変である。投資規模 I のプロジェクトが成功すれば、キャッシュインフロー RI は実現する。

プロジェクトのキャッシュインフローの配分方法については期首の契約に基づいて、プロジェクトが成功した場合と失敗した場合に応じて決められている。プロジェクトが成功した場合には、投資額 1 単位当たりのキャッシュインフロー R が実現し、企業家は R_b をもらい、残り $(RI - R_b)$ は投資家がもらう。プロジェクトが失敗した場合にはキャッシュインフローが 0 となり、企業家と投資家は何ももらえない。企業家は有限責任であることを仮定する。つまり、 $R_b \geq 0$ である。

3.2 最適化問題

ここでは互いに独立なプロジェクトが n 個の場合のクロス担保問題を定式化する。2.1 節と同様、企業家が n 個のプロジェクトすべてを成功させた場合のみ、投資家は彼に報酬 $R_b > 0$ を支払うことは、一般性を失うものではない。その成功確率は p_H^n である。1 つでもプロジェクトを失敗させると、企業家は報酬を得ることができない。その確率は $(1 - p_H^n)$ である。以下では、プロジェクトを実行するとき、企業家が努力することを選択することが均衡となるケースを分析する。企業家の (ネット) 効用関数は、

$$U_b = p_H^n R_b - A \quad (7)$$

と書くことができる。企業家が報酬 R_b をもらえるのは、 n 個のプロジェクトがすべて成功したときのみである。1 つでもプロジェクトを失敗させると企業家は何ももらえない。

企業家の効用が(7)式のようになるためには、彼のインセンティブ条件と投資家の参加制約条件を満たす必要がある。企業家のインセンティブ条件は以下のように表現することができる。企業家がすべてのプロジェクトに対して努力すると彼の効用は(7)式の通りである

が n 個のプロジェクトのうち i 個のプロジェクトに対して努力しない場合には企業家の効用は

$$\tilde{U}_{bi} = p_H^{n-i} p_L^i R_b - A + iBI/n, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

となる。したがって、企業家に自主的に努力してもらうためには、

$$U_b \geq \tilde{U}_{bi} \quad (3)$$

の条件が満たされる必要がある。これは企業家のインセンティブ条件であり、整理すると

$$p_H^{n-i} (p_H^i - p_L^i) R_b \geq iBI/n, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

となる。企業家が n 個のプロジェクトにおいてすべて努力する場合の期待効用が i 個のプロジェクトに対して努力しない場合の期待効用よりも高いことを表す。しかし、 R_b の係数は第 2.2 節の(4)式と同じなので、付録で示したように、(9)式において $i = n$ の場合は $i < n$ の場合の十分条件である。

投資家の参加制約条件は彼女の期待収入が貸出額以上であることを保証するものであり、

$$p_H RI - p_H^n R_b \geq I - A \quad (10)$$

となる。(10)式の左辺は投資家の期待回収額を表し、右辺は期首に企業家が投資家から借入れた金額を表す。(10)式の全体は投資家の期待収入が投資額を上回らないといけないことを表す。貸出市場が完全競争なので(10)式は常に等号で成立する。ここでは、簡単化のために、第 2.2 節で定義した ρ_0 と ρ_1 を用いて企業家の効用関数を

$$U_b = (\rho_1 - 1)I \quad (11)$$

と書き換えることができる。ただし、分析の有効性を保証するために、 $0 < \rho_0 < 1 < \rho_1$ と仮定する。投資額 1 単位当たりの NPV は厳密に正($\rho_1 > 1$)であり、企業家は投資額 I を最大化することが最適である。まとめると、企業家の資金調達問題は(9)式と(10)式を所与として、彼の効用(11)式を最大にするように $\{R_b, I\}$ を決める最大化問題と定義できる。

3.3 均衡の特徴

最適解において、(9)式と(10)式は等号で成立するので、 $\{R_b^{**} = kAB/(p_H^n - p_L^n), I^{**} = kA\}$ が得られる。ただし、

$$k \stackrel{\text{def}}{=} 1/(1 - \rho_0)$$

と定義する． $0 < \rho_0 < 1$ より， $k > 1$ が分かる．

まとめると $n = 1$ の場合， $\rho_0 = \rho_1 - p_H B / \Delta p$ により，

$$R_b^{**} = kAB / \Delta p, \quad I^{**} = kA, \quad U_b^{**} = kA(\rho_1 - 1)$$

が得られる．

$n = 2$ の場合， $\rho_0 = \rho_1 - p_H^2 B / (p_H^2 - p_L^2)$ により，

$$R_b^{**} = kAB / (p_H^2 - p_L^2), \quad I^{**} = kA, \quad U_b^{**} = kA(\rho_1 - 1)$$

が得られる．

$n > 2$ の場合， $\rho_0 = \rho_1 - p_H^n B / (p_H^n - p_L^n)$ により，

$$R_b^{**} = kAB / (p_H^n - p_L^n), \quad I^{**} = kA, \quad U_b^{**} = kA(\rho_1 - 1)$$

が得られる． ρ_0 は n に関して増加関数であるため， k も n に関して増加関数である．したがって， $n > 2$ の場合の最適解 $\{R_b^{**}, I^{**}\}$ は $n \leq 2$ の場合の最適解 $\{R_b^{**}, I^{**}\}$ より大きいことが分かる． 効用 U_b^{**} についても同じことがいえる． プロジェクトの独立性により， 企業家のモラルハザード問題（インセンティブ条件(9)式）が緩和された結果として， 企業家の借入能力（参加制約条件(10)式）が向上しただけでなく， 企業家の期待収益と期待効用も向上したのである． そして， k は n に関して増加関数であること， および $k > 1$ であることを考えると， プロジェクトの数 n が増えると， 投資額 I に対して必要最小限の自己資金 A はより少ない額で済む． k は n の増加にしたがってより効果が大きくなる． 他の条件が一定ならば， プロジェクト間の独立性の高い多角化戦略をとっている企業ほど， より効率的な現金保有行動をする可能性が高いことが考えられる．

4. おわりに

本論文は Tirole[2006]に基づき， n 個の同時進行するプロジェクトによるクロス担保の理論分析をしたものである． 固定投資モデルに対して， 可変投資モデルでは投資額も内生変数として扱うことができ， 投資レベルに対するさまざまな影響を分析することが可能になる． これが本論文おける最大の貢献といえる． 複数のプロジェクトが互いに独立であれば， クロス担保が利用できる． 多角化戦略は企業のモラルハザード問題を緩和させるだけでなく， 企

業の借入能力を向上させることもできる．そして，他の条件が一定ならば，プロジェクト間の独立性の高い多角化戦略をとっている企業ほど，その現金保有行動はより効率的であることをモデルから導いた．

付録

付録では，企業家のインセンティブ条件(4)式と(9)式において $i = n$ の場合は $i < n$ の場合の十分条件であることを示す．企業家のインセンティブ条件，

$$U_b \geq \tilde{U}_{bi} \quad (3)$$

を固定投資モデルと可変投資モデルに適用すると，それぞれ(4)式と(9)式のように書ける．

$$p_H^{n-i}(p_H^i - p_L^i)R_b \geq iB, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

$$p_H^{n-i}(p_H^i - p_L^i)R_b \geq iBI/n, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

企業家が n 個のプロジェクトにおいてすべて努力する場合の期待効用が i 個のプロジェクトに対して努力しない場合の期待効用よりも高いことを表す．そして， R_b の係数に注目すると，(4)式と(9)式の左辺は同じ型の係数

$$f(i) = p_H^{n-i}(p_H^i - p_L^i)/i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

であることが分かる．係数 $f(i)$ を i の関数と見なすことができる． i が1単位増えると，分母ではプロジェクトの数である自然数 i が整数1単位ごとに増加するに対して，分子では確率の掛け算なので必ず1以下しか増えないことが分かる．よって， $i = n$ のとき，係数関数 $f(i)$ は最小となり， $i < n$ の場合の十分条件であることが示された．

参考文献

- 王鏡凱，楊樂[2015a]，「コーポレート・ファイナンスアプローチによる企業の多角化戦略の考察」『地域政策科学研究』12，15-24．
- 王鏡凱，楊樂[2015b]，「多角化戦略が企業の現金保有行動に与える影響：複数プロジェクトが同時進行するケース」鹿児島大学法文学部『経済学論集』84，21-29．
- 王鏡凱[2015]，「多角化戦略が企業の現金保有行動に与える影響：プロジェクトが逐次進

行するケース」鹿児島大学法文学部『経済学論集』84, 15-20 .

Diamond, D. [1984], "Financial intermediation and delegated monitoring," *Review of Economic Studies* 51, pp. 393-414.

Holmstrom, B., and J. Tirole [1997], "Financial Intermediation, Loanable Funds, and the Real Sector," *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 112, No. 3, pp. 663-691.

Tirole, J. [2006], *The Theory of Corporate Finance*, Princeton University Press.