Analysis of the Triad Duel Game of Dixit and Nalebuff (1991):
Constrained Generalization

WANG Jingkai and JIANG Jun

Dixit and Nalebuff (1991)の三者決闘ゲームに関する考察：条件付き一般化[1]

王　鏡凱[2]・江　駿[3]

1.　はじめに

本研究は Dixit and Nalebuff (1991)の三者決闘ゲームについて考察するものである．本研究の主な貢献は三者決闘ゲームを条件付きで一般化したことである．

三者決闘ゲームについては，Dixit and Nalebuff (1991)では先読み推論法を用いて考察されており，王・江(2017)ではバックワード・インダクションの手法を用いて考察されている．本研究ではバックワード・インダクションの手法を用いるだけでなく，三者決闘ゲームを条件付き一般化する．

条件付き一般化とは，三者決闘ゲームを数値例として考察するではなく，より一般的な比較分析ができるようにすることである．ただし，3 人のプレイヤーのうち，最後のプレイヤーC の命中率だけは Dixit and Nalebuff (1991)の仮定と同じ値(確率 1)に固定することは唯一の制約条件である．したがって本研究では Dixit and Nalebuff (1991)の三者決闘ゲームの 3 プレイヤーのうち，最後のプレイヤーC の命中率だけを固定するという条件の下でその他の 2 人のプレイヤー(A・B)の命中率(p，q)について，$(0<p<q<1)$を制約条件として三者決闘ゲームを一般化する．

条件付き一般化することによって，プレイヤーたちの命中率について特定の数値例だけでなく，より一般的なケースについても簡単に分析することができるようになる．本研究の条件付き一般化の分析の結果では Dixit and Nalebuff (1991)になかった最適戦略も見つけた．

三者決闘ゲームにおいて各プレイヤーの生き残るための最適戦略は，各プレイヤーの命中率の絶対的な大小関係だけでなく，相対的な大小関係にも影響を受ける．Dixit and Nalebuff (1991)になかった最適戦略を発見できたことは，本研究の特徴であり，貢献である．

本研究の構成は以下の通りである．まず第 2 節では Dixit and Nalebuff (1991)の三者決闘ゲームについて説明する．そして，第 3 節では Dixit and Nalebuff (1991)に基づき先読

[1] 本論文は，鹿児島大学法文学部紀要『経済学論集』第 88 号（2017 年 3 月）pp.31～39 に記載されたものであり，査読により修正し掲載されるものである．なお，本論文の作成にあたり，レフェリーより数多くの有益なコメントおよび詳細かつ示唆的なアドバイスを頂いた．ここに記して感謝したい．また，本論文は H28 年度および H29 年度鹿児島大学学長裁量経費「若手・女性研究者研究支援事業」による成果の一部である．

[2] 本論文についての責任は，すべて第一著者である王鏡凱に帰する．
E-mail: kyogaiw@leh.kagoshima-u.ac.jp
[3] 鹿児島大学大学院

み手法による解き方を説明する．第 4 節ではバックワード・インダクションの方法を用いて条件付きの一般化を行い，最後に全体をまとめる．

2. Dixit and Nalebuff (1991)の三者決闘ゲームについて

ここでは Dixit and Nalebuff (1991，p.292)に基づき三者決闘ゲームについて説明する．プレイヤーは 3 人，ラリー・モー・カリー(ここでは A・B・C と呼ぶ)が 2 ラウンド制の逐次ゲームとして，A→B→C の順に 1 発ずつ撃つことになっている．

各プレイヤーの戦略は 2 つしかなく，相手を撃つかまたはわざと外すかである．相手を撃つと決めた場合，3 人の命中率はそれぞれ{A：B：C = 30%：80%：100%}となっている．

各プレイヤーにとっての最善の結果は，自分だけが生き残ることである．次によいのは 2 人が生き残り，そのうちの 1 人になることである．3 番目によいのは 3 人全員が生き残ることである．最悪なのは自分だけが殺されることである．以上のルールの下でプレイヤーA の生存確率を最大にする最適戦略とは何かについて求める問題である．

問題を解く前に各プレイヤーの目的関数，特にプレイヤーA の目的関数について説明する[4]．モデルの設定上，生き残り方によって各プレイヤーの選好順序があることは明らかである．そうなると，各プレイヤーの選好について利得関数で示す必要はないかという疑問が出る．言い換えれば，各プレイヤーの選好に対する違いを期待効用関数で示す必要はないか．さらに，選好の順序があり，それに対する効用関数もあり，プレイヤーの目的関数は生き残り方の期待効用最大化になるのではないかというものである．

本論文の答としては各プレイヤーの目的関数，特にプレイヤーA の目的関数はあくまでも自分の生存確率の最大化である．Dixit and Nalebuff (1991)では生き残り方によって各プレイヤーの選好順序があることは確かである．この選好の順序だけでは目的関数または期待効用の最大化に直接影響しない．例えば A が最終期までに生き残るとき，A のみ生き残る場合の効用と(A・B) が生き残る場合の効用については選好の順序という意味では考えられるが，その選好の違いを数値化して大小関係を比較するのは難しい．このような複雑な議論を回避するためにも各プレイヤーの目的関数はあくまでも自分の生存確率の最大化と仮定している．

また，この選好の順序は 2 ラウンド制の逐次ゲームのルール（制約条件）として必要不可欠である．なぜなら，このような選好の順序を仮定しないと，共謀が排除できないからである．各プレイヤーの目的関数は生存確率の最大化だけであれば，選好の順序を仮定せず，単に n ラウンド制の逐次ゲームをやっても，全員が空砲またはわざと外すことで，確率 1 で

[4] プレイヤーA の目的関数を生存確率だけにするか，それとも各プレイヤーの生き残り方に基づく期待効用関数にするかについては，本文中に明示されるべきであるとレフェリーの方から指摘されており，ここに記して感謝したい．

全員が生き残れる．このような共謀行為は本研究におけるゲームの性質と異なるものであり，本論文は Dixit and Nalebuff (1991)に倣い，共謀の可能性を排除し，生存確率が最大となる A の戦略を求める．

3.　先読み手法による解き方：Dixit and Nalebuff (1991，p.292 を参照)

ここでは先読み手法で A の選択肢を個々に検討する．もし A が B を狙い命中させたら，その次は A 自身がやられてしまう．なぜなら次は C の番になり，彼は A を確実に撃ち当て最善の結果に至る．だから A にとって B を狙うのはいい選択肢ではない．

次にもし A が C を狙い命中させたら次は B の番となり，B は A を狙うことになる．そうなると，A 自身の生き残れる確率は 20%以下となる．だからこれもあまり魅力のある選択肢ではない．

A の最適行動は第 1 ラウンドではわざと空に向けて撃つことで外す，そして第 2 ラウンドでは B か C の生き残ったほうを狙うことである．第 1 ラウンドで A がわざと外した場合，B は C を狙い，もし失敗しても C が B を撃ち当てる．第 2 ラウンドに入り，再び A の番となる．A は B か C の生き残ったほうを狙えば，30%以上の確率で A は唯一の生き残りとなる．

三者決闘ゲームから得られる教訓としては，小物(A)がスターになるには最初のチャンスは見送ったほうがよい場合がある．ライバルが多数いるときは，トップを走っている者は 2 番手以降から集中攻撃を受け，潰されることがある．こういう状況では，実力者(B と C)が互いに潰し合うまでは小物(A)が後方に控えておくほうが得である．

4.　条件付き一般化

ここでは王・江(2017)に倣いバックワード・インダクションの手法を用いて一般化を行う．先読み推論法に対しバックワード・インダクションは各サブゲームにおける各プレイヤーの行動が詳細に考察することができ，ゲームの構造をより深く理解することができるメリットがある．また，条件付き一般化する前に 3 人の命中率については，{ A：B：C = p：q：1 }かつ($0<p<q<1$)として仮定する．

4.1.　第 2 段階のゲーム

まずは第 2 段階について考える．C の命中率は確率 1 であることに注目して，第 1 段階のゲーム終了時点において生き残ったプレイヤーは{A・B}ペアかまたは{A・C}ペアのはず

である[5]．プレイヤーが 2 人の場合は，わざと外すことは最適戦略ではなく，互いに順番に１発ずつ撃つことは最適戦略である．

そして, この第 2 段階のゲームの結果は各プレイヤーの命中率によって一意的に決まる．生き残ったプレイヤーは{A・B}ペアの場合は考えられる結果は以下の 3 つである．

結果①：p の確率(A→B)で A だけ生き残り，そしてゲーム終了；
結果②：q(1－p)の確率(A→B→A)で B だけ生き残り，そしてゲーム終了；
結果③：(1－p)(1－q)の確率(A→B→A)で A・B ともに生き残り，そしてゲーム終了．

また, 生き残ったプレイヤーは{A・C}ペアの場合は考えられる結果は以下の 2 つである．

結果④：p の確率(A→C)で A だけ生き残り，そしてゲーム終了；
結果⑤：(1－p)の確率(A→C→A)で C だけ生き残り，そしてゲーム終了．

ここではもし第 1 段階のゲーム終了時点において生き残ったプレイヤーは{B・C}ペアの場合，考えられる結果は 2 つである．q の確率(B→C)で B だけ生き残り，そしてゲーム終了する．または(1－q)の確率(B→C→B)で C だけ生き残り，そしてゲーム終了する．C の命中率は 1 であるにもかかわらず B を撃たないことは C の合理性に反する．つまり，第 1 段階のゲーム終了時点において B と C は同時に生き残れない．したがって第 1 段階のゲーム終了時点において生き残ったプレイヤーが{B・C}ペアの場合はオフ・パスであることが分かる．

同じくもし第 1 段階のゲーム終了時点において生き残ったプレイヤーは{A・B・C}全員の場合，B と C は同時に生き残れない性質は変わらないから，{A・B・C}の場合もオフ・パスである．詳細の説明については 4.2.1 節を参照されたい．

4.2.　第 1 段階のゲーム

4.2.1.　C の行動について

バックワード・インダクションにしたがって，第 1 段階のゲームについて考察する．まずは A→B→C の順で C について考える．第 1 段階のゲームにおいて A→B→C の順で A→B がそれぞれ一発を撃ち，誰に向けて発砲したのか結果はともかく，C が撃たれて退場すればそれまでのことである．もし C が生き残っていれば，考えられるすべての結果は，⑥{A・C}が生き残っているケース，⑦{B・C}が生き残っているケース，⑧{A・B ・C}全員が生き残っているケース，の 3 通りである．

[5] C の命中率は 1 のため，もし第 1 段階に C の出番があれば，C が取れる行動は(わざと外す)，(C→A)，(C→B)の 3 通りしかない．そして，(わざと外す)と(C→A)の選択は(C→B)よりも劣ることについては 4.2.1 節で詳細に説明してあり，参照されたい．したがって，第 1 段階において生き残ったプレイヤー{A・B}ペアかまたは{A・C}ペアである．

結果⑥：もし{A・C}が生き残っており，かつ今は C の出番とすれば，1 の確率(C→A)で C だけ生き残り，そしてゲーム終了；

結果⑦：もし{B・C}が生き残っており，かつ今は C の出番とすれば，1 の確率(C→B)で C だけ生き残り，そしてゲーム終了；

結果⑧：もし{A・B・C}全員が生き残っており，かつ今は C の出番とすれば，1 の確率(C→B)で{A・C}が生き残ったまま第 2 段階のゲームに入ることになる．

結果⑧について，もし{A・B・C}全員が生き残っており，かつ今は C の出番とすれば，C が取れる行動は(わざと外す)(C→A) (C→B)の 3 通りしかない．C が(わざと外す)を選んだ場合，{A・B・C}全員が生き残ったまま第 2 段階のゲームに入ることになる．これは各プレイヤーの選好に矛盾するので，(C→A)または (C→B)よりも劣る戦略である[6]．C が(C→A)を選んだ場合，{B・C}が生き残ったまま第 2 段階のゲームに入ることになる．そして C の生存確率は(1-q)となる．一方，C が(C→B)を選んだ場合，{A・C}が生き残ったまま第 2 段階のゲームに入ることになる．そして C の生存確率は(1-p)となる．命中率の大小関係から，C にとって{A・C}が生き残ったまま第 2 段階のゲームに入る方は{B・C}が生き残ったまま第 2 段階のゲームに入る方よりも望ましい．

4.2.2. B の行動について

次に A→B→C の順で B について考える．第 1 段階のゲームにおいて A→B→C の順で A が一発を撃ち，誰に向けて発砲したのか結果はともかく，B が撃たれて退場すればそれまでのことである．もし B が生き残っていれば，考えられるすべての結果は，⑨{A・B}が生き残っているケースと⑩{A・B・C}全員が生き残っているケースの 2 通りである．

結果⑨：もし{A・B}が生き残っており，かつ今は B の出番とすれば，q の確率(B→A)で B だけが生き残り，そしてゲーム終了する．または(1－q)の確率(B→A)で外れて{A・B}2 人が生き残ったまま第 2 段階のゲームに入ることになり，結果①②③のどれかになる．

もし B が(わざと外す)を選んだ場合，{A・B}が生き残ったまま第 2 段階のゲームに入ることになる．これはプレイヤーB が自分の生存確率のうち q だけを諦めることと同じなので，目的関数の最大化に反する．したがって結果⑨において B の最適行動は(B→A)である．

後の説明を簡単にするため，第 1 段階の(B→A)から始まり第 2 段階の最後までのサブゲーム(結果⑨)をゲーム h と呼ぶ(図 1 を参照)．

[6] 各プレイヤーにとっての最善の結果は，自分だけが生き残ることである．次によいのは 2 人が生き残り，そのうちの 1 人になることである．3 番目によいのは 3 人全員が生き残ることである．最悪なのは自分だけが殺されることである．

ゲーム h において A・B・C それぞれの生存確率を $P_h(A)$・$P_h(B)$・$P_h(C)$とする．結果⑨より，$P_h(A)$・$P_h(B)$・$P_h(C)$の計算結果は以下の通りである．

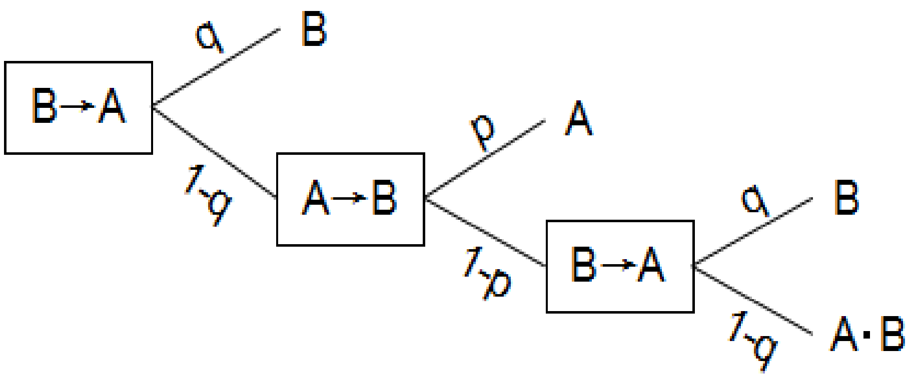
$$P_h(A) = (1-q)[P(\text{結果①}) + P(\text{結果③})] = p(1-q) + (1-p)(1-q)^2$$

$$P_h(B) = q + (1-q)[P(\text{結果②}) + P(\text{結果③})]$$

$$= q + q(1-p)(1-q) + (1-p)(1-q)^2 = q + (1-p)(1-q)$$

$$P_h(C) = 0$$

図 1：サブゲーム h

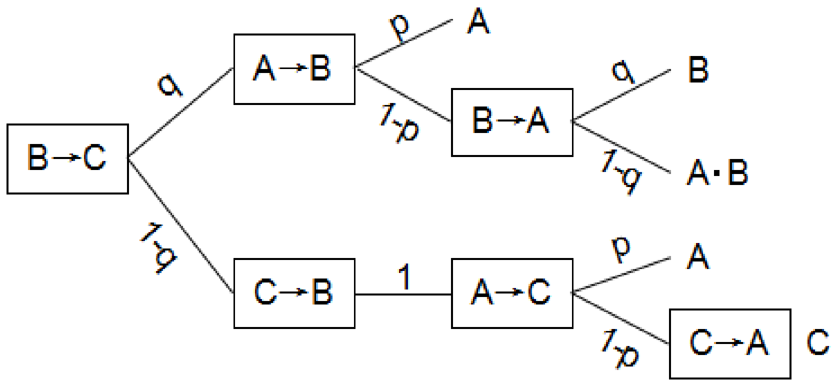


結果⑩：もし{A・B・C}が生き残っており，かつ今は B の出番とすれば，q の確率(B→C)で{A・B}が生き残ったまま第 2 段階のゲームに入ることになり，結果①②③のどれかになる．または(1－q)の確率(B→C)で外れて C の出番となり，そして結果⑧より，1 の確率(C→B)で B が消えて{A・C}が生き残ったまま第 2 段階のゲームに入ることになり，結果④⑤のどれかになる．

もし，結果⑩において B が(B→C)以外の行動を選択すれば，結果⑦⑧より，1 の確率(C→B)で B が消えるので，B にとっては最適な行動ではない．したがって結果⑩において B の最適行動は(B→C)である．

後の説明を簡単にするため，第 1 段階の(B→C)から始まり第 2 段階の最後の結果①②③④⑤までのサブゲーム(結果⑩)をゲーム g と呼ぶ(図 2 を参照)．

図 2：サブゲーム g



ゲーム g において A・B・C それぞれの生存確率を $P_g(A)$・$P_g(B)$・$P_g(C)$とする．結果⑩および結果①②③④⑤より，$P_g(A)$・$P_g(B)$・$P_g(C)$の計算結果は以下の通りである．

$$P_g(A) = q[P(\text{結果①}) + P(\text{結果③})] + (1-q)P(\text{結果④}) = pq + q(1-p)(1-q) + p(1-q)$$

$$P_g(B) = q[P(\text{結果②}) + P(\text{結果③})] = q^2(1-p) + q(1-p)(1-q)$$

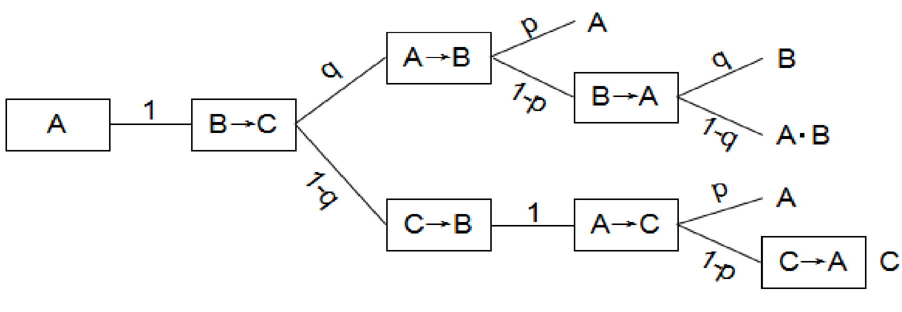
$$P_g(C) = (1-q)P(\text{結果⑤}) = (1-p)(1-q)$$

4.2.3.　A の行動について

最後に A→B→C の順で A の出番となった場合，A の最適行動について考える．この場合は考えられる結果は⑫{A・B・C}全員が生き残っているケースのみである．この場合の A の行動集合は{わざと外す，A→B，A→C}である．

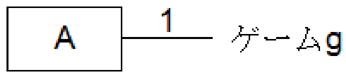
もし A が{わざと外す}を選んだ場合，三者決闘ゲームは図 3 のようにサブゲーム g と同じになる．A の意思決定問題は実質的に結果⑩(サブゲーム g)を 1 の確率でプレイすることである．

図 3：A がわざと外した場合



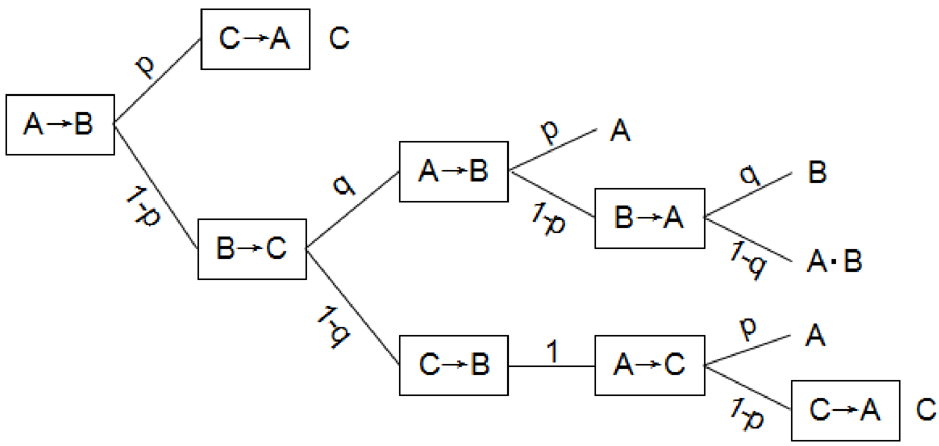
また A・B・C それぞれの生存確率はサブゲーム g において求めた $P_g(A)$・$P_g(B)$・$P_g(C)$ である．さらに，サブゲーム g(図 2)を用いることで図 3 は図 4 のように変換することができ，A の意思決定問題を大幅に簡略化することができる．

図 4 : A がわざと外した場合のサブゲームによる表現



もし A が{A→B}を選んだ場合，三者決闘ゲームは図 5 のようになる．A の意思決定問題は実質的に p と(1－p)の確率で結果⑥と結果⑩(サブゲーム g)からなるサブゲームをプレイすることである．

図 5 : {A→B}の場合



さらに，サブゲーム g(図 2)を用いることで図 5 は図 6 のように変換することができ，A の意思決定問題を大幅に簡略化することができる．

図 6 : {A→B}の場合のサブゲームによる表現

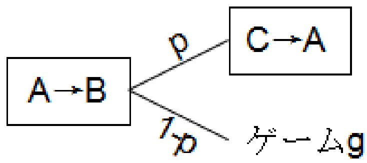
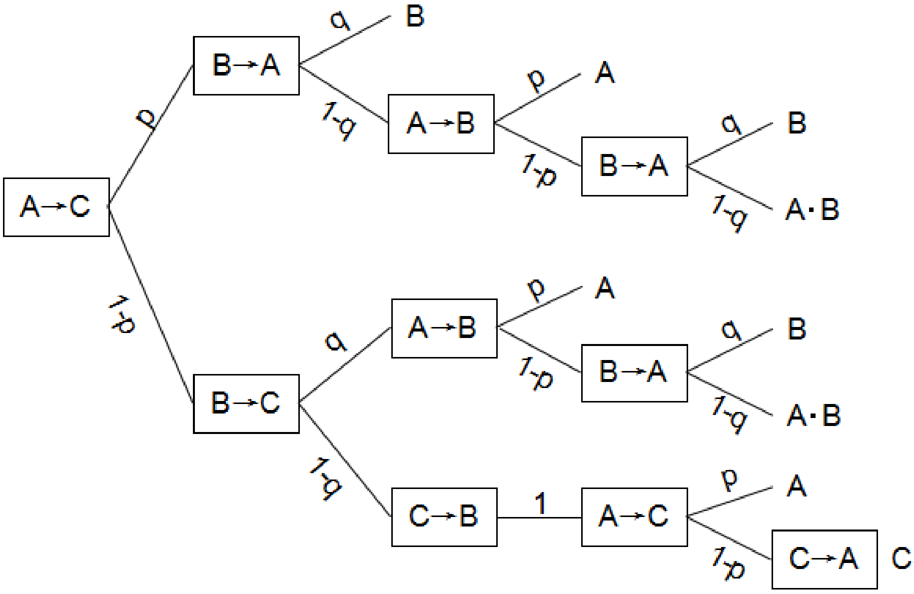


図 5 または図 6 から分かるように，三者決闘ゲームにおいて A の意思決定問題は実質的

に p と(1－p)の確率で結果⑥と結果⑩(サブゲーム g)からなるサブゲームをプレイすることである．しかし，結果⑥において A の生存確率は 0 なので，明らかにサブゲーム g の生存確率 $P_g(A)$よりも低い．したがって A にとっては，p と(1－p)の確率で結果⑥と結果⑩(サブゲーム g)からなるサブゲームをプレイすることは最適な戦略ではない．それよりも A が{わざと外す}を選び，図 3 または図 4 のようにサブゲーム g を 1 の確率でプレイしたほうが合理的である．

もし A が{A→C}を選んだ場合，三者決闘ゲームは図 7 のようになる．A の意思決定問題は実質的に p と(1－p)の確率で結果⑨(サブゲーム h)と結果⑩(サブゲーム g)からなるサブゲームをプレイすることである．

図 7 : { A→C }の場合



さらに，サブゲーム h(図 1)とサブゲーム g(図 2)を用いることで図 7 は図 8 のように変換することができ，A の意思決定問題を大幅に簡略化することができる．

図 8 : { A→C }の場合のサブゲームによる表現

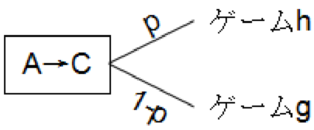


図 7 または図 8 から分かるように，三者決闘ゲームにおいて A の意思決定問題は実質的に p と(1－p)の確率で結果⑨(サブゲーム h)と結果⑩(サブゲーム g)からなるサブゲームをプレイすることである．しかし，結果⑨(サブゲーム h)における A の生存確率 $P_h(A)$と結果

⑩(サブゲーム g)における A の生存確率 $P_g(A)$の大小関係については，$P_h(A) > P_g(A)$の場合と $P_h(A) \leq P_g(A)$の場合がある．

$P_h(A) \leq P_g(A)$の場合，Dixit and Nalebuff (1991, p.292)と王・江(2017)の分析と同じ結論になる．つまり A にとっては，p と(1－p)の確率で結果⑨(サブゲーム h)と結果⑩(サブゲーム g)からなるサブゲームをプレイすることは最適戦略ではない．それよりも A が{わざと外す}を選び，図 3 または図 4 のようにサブゲーム g を 1 の確率でプレイしたほうが合理的である．

$P_h(A) \leq P_g(A)$の条件は $pq \geq (1-p)(1-q)(1-2q)$であり，p と q が極めて小さな数値でない限りこの条件は満たされる．一方，$P_h(A) > P_g(A)$の条件は $pq < (1-p)(1-q)(1-2q)$であり，p と q が極めて小さな数値ならこの条件は満たされる．

$P_h(A) > P_g(A)$の場合，これは Dixit and Nalebuff (1991, p.292)と王・江(2017)の分析になかったケースであり，本研究の条件付き一般化による成果である．このケースでは A にとっては，p と(1－p)の確率で結果⑨(サブゲーム h)と結果⑩(サブゲーム g)からなるサブゲームをプレイすることは最適戦略である．A が{わざと外す}を選び，図 3 または図 4 のようにサブゲーム g を 1 の確率でプレイすることは合理的ではない．

A の意思決定における最適戦略は以下の 2 つのケースによってまとめられる．$P_h(A) \leq P_g(A)$なら，つまり条件 $pq \geq (1-p)(1-q)(1-2q)$が成立する場合，A の最適戦略は結果⑩(サブゲーム g)を 1 の確率でプレイする．$P_h(A) > P_g(A)$なら，つまり条件 $pq < (1-p)(1-q)(1-2q)$が成立する場合，A の最適戦略は p と(1－p)の確率で結果⑨(サブゲーム h)と結果⑩(サブゲーム g)からなるサブゲームをプレイすることである．

5.　まとめ

本研究は Dixit and Nalebuff (1991)の三者決闘ゲームについて考察するものである．本研究では先読み手法ではなく，より複雑な状況にも対応できるバックワード・インダクションの手法を用いた．さらに，本研究は($0<p<q<1$)を制約条件として三者決闘ゲームを一般化した．

条件付き一般化することによって，プレイヤーたちの命中率について特定の数値例だけでなく，より一般的なケースについても簡単に分析することができるようになる．本研究の条件付き一般化の分析の結果では Dixit and Nalebuff (1991)になかった最適戦略を見つけた．

三者決闘ゲームにおいて各プレイヤーの生き残るための最適戦略は，各プレイヤーの命中率の絶対的な大小関係だけでなく，相対的な大小関係にも影響を受ける．Dixit and Nalebuff (1991)になかった最適戦略を発見できたことは，本研究の貢献である．

Analysis of the Triad Duel Game of Dixit and Nalebuff (1991):
Constrained Generalization

WANG Jingkai and JIANG Jun

参考文献

Avinash Dixit and Barry Nalebuff (1991), Thinking Strategically: Competitive Edge in Business, Politics and Everyday Life, WW Norton & Co. (菅野隆，嶋津祐一　訳[1991]，「戦略的思考とは何か―エール大学式『ゲーム理論』の発想法」，TBS ブリタニカ)

王鏡凱・江駿(2017)，「Dixit and Nalebuff (1991)の三者決闘ゲームに関する考察：数値例を中心に」鹿児島大学法文学部『経済学論集』88，21-29.