Bulletin of the Educational Research and Development, Faculty of Education, Kagoshima University
2018, Vol.27, 31-40

論 文

「式と計算」の授業設計と実践に関する研究

和　田　信　哉［鹿児島大学教育学系（数学教育）］
中　川　裕　之［大　分　大　学　教　育　学　部］
岩　田　耕　司［福　岡　教　育　大　学　教　育　学　部］
伊　藤　優一郎［鹿児島大学教育学部附属小学校］

A study on design and practice of lessons about "Expressions and Calculations"

WADA Shinya・NAKAGAWA Hiroyuki・IWATA Koji・ITO Yuichiro

キーワード：計算法則、計算順序、□の意味、文字式利用のサイクル

１．はじめに

小学校第４学年算数科における「式と計算」の単元は，学習指導要領（文部科学省, 2008）によれば，問題場面を四則や括弧が混合した式で表してその計算順序や交換法則等の計算法則を理解したり，それらの計算法則等を□や△などの記号を用いてまとめたりすることを学習する。このような内容は，中学校以降で学習する代数的内容にとっては本質的なことである（Carraher & Schliemann, 2007；杉山，1986）。しかしながら，この単元は「法則」等を内容とすることから，教師主導でそれを教える傾向にある。また,「交換法則, 結合法則, 分配法則についてまとめること」（文部科学省, 2008，p205）とあるように，既習内容を再び扱ってまとめるという側面もあるため，児童にとって何が新しく学習する内容なのかがわかりにくいという傾向もある。

そこで，本稿では，「式と計算」の単元を児童が少しでも主体的に学習することができ，また代数学習につながるような授業を設計し，それを実践的に検討することを目的とする。はじめに，先行研究を整理するとともに教科書分析を行い，この単元の実践的課題を明らかにし，その課題を解決するための授業設計の観点を挙げ，単元の構想を提示する。そして，その授業設計に基づいた授業の実際及び事後調査の結果を記述し，授業設計の観点について考察していく。

２．「式と計算」の実践的課題

本研究は，中学校以降の代数学習の困難を解消するために，小学校から代数的推論を促進させていこうとする初期の代数（Carraher & Schliemann，2007）の立場に立って研究を進めており，第２学年の「加法と減法の相互関係」（和田，2014）や，第３学年の「除法の導入」（和田・宮崎，2016)，第３学年の「□を使った式」（和田ほか，2017）で授業設計を行い，実践的に検討している。本稿はその一環として，第４学年の「式と計算」の授業設計及びその実践的検討を行うものである。

さて，この単元に関する先行研究をみてみると，小山（2003）はこの指導のねらいについて，計

算法則を見いだして理解することとその法則を活用することの二点を挙げている。しかし黒澤(2003)は，実際にはそのような指導はあまりみられないことを指摘している。その理由として，筆算の指導のように，計算の手続き的知識を形式化することやその習熟に重点が置かれがちであることを挙げている。計算の指導は，ただでさえ手続きの形式化やその習熟に重点が置かれがちである上に，この単元の内容は「法則」であるから，なおさらそのような傾向に拍車がかかることは想像に難くない。

また，この単元は，すべての算数科教科書（６社）で，①総合式での表現，②計算順序（左から計算すること，括弧先行，乗除先行），③計算法則（交換法則，結合法則，分配法則），④活用，の順序で内容が配列されている。しかし，括弧先行や交換法則，結合法則，分配法則は既習であり，この単元で新規に学習するものではないため，毎時間，何が新しく学習する内容なのかが不明確である。そのため，これまでの計算法則等をまとめるという側面が強く，またそれは規約的なものでもあるため，教師主導の単調な授業展開になりがちになるものと思われる。

３．授業設計の観点

われわれは,算数の授業設計の基本は「既習を基に未習を考える」という観点であると考えている。そこで，上述の課題を解消するため，まず，この単元ではじめて学習する未習内容と既習内容とを明確にすることが重要であると考え，それぞれを次のように整理した。

〇既習内容
・左から順に計算すること
・括弧の中を先に計算すること
・交換法則，結合法則，分配法則
〇未習内容
・□に加えて△や〇を用いて計算法則等をまとめること
・乗除を先に計算すること
・加減混合や乗除混合の際には結合法則が必ずしも成り立たないこと
・計算順序や法則の計算の工夫への活用

これらのことから，「既習を基に未習を考える」という観点に基づき，表１のように単元を構成することにした。

第１時は，はじめに既習である２項の加法の式の交換法則を取り上げて□と△を用いて表し，次に３項に式を拡げ，既習である３項の加法の式の結合法則を取り上げて□と△と〇を用いて表す。そして，３項の式の中に減法も含まれる問題を提示し，加法だけのときと同様に結合法則を用いて計算できるかを児童に問い，括弧から先に計算することを考えさせる。第２時は，第１時の乗法･除法バージョンである。また，第３時は，四則混合の３項の式の場合，乗除を先に計算する

表１　単元の構成

時間	授業内容
1	２項の加法の式の交換法則（記号による形式化），３項の加法の式の結合法則（記号による形式化），加減混合の３項の式の計算順序（括弧先行）
2	２項の乗法の式の交換法則（記号による形式化），３項の乗法の式の結合法則（記号による形式化），乗除混合の３項の式の計算順序（括弧先行）
3	四則混合の３項の式の計算順序（乗除先行），計算順序のまとめ
4	□などの記号の一般数としての扱い（分配法則の記号による形式化），計算法則のまとめ
5	計算の工夫（加法の結合法則の活用，乗法の結合法則の活用，分配法則の活用）
6	文字式利用のサイクル（立式，変形，読み）に基づいた活用
7	事後調査

ことを具体的な問題場面から考えさせ，これまでに学んだ計算順序をまとめる。

第４時は，既習である分配法則を扱う。また，本単元ではじめて□などの記号を一般数（定数）として扱うが，実際は第３時までのように簡単に扱ってしまうことがほとんどであろう。そこで，分配法則の問題については，３項の数値の内の１つを「○」という記号で示し，記号を含んだ式として計算することを通して，一般数としての記号の理解を深めることを意図した。そして，第４時の最後には，これまでに学んだ計算法則をまとめるものとする。

第５時は，これまでの計算法則を活用して，工夫して計算する問題を扱うものであり，第６時の文字式利用のサイクルは，三輪（1996）が提起しているそのサイクルを経ることが式の理解を深めるであろうという立場から取り入れたものである。この時点では文字式ではないが，計算法則を活用して式変形を行う際には敢えて計算しないで式表現を行うため，その式における数字は「擬変数」（藤井，1999）として機能しているので，文字式利用のサイクルを経ることが可能であると考えた。

以上の授業設計の特徴をまとめると，次のようになる。

(1) 計算順序から計算法則という構成ではなく，加減と乗除それぞれに関する計算順序と計算法則をまとめて「既習を基に未習を考える」という構成にする。
(2) 分配法則の学習の際，□などの記号を問題に含めて，一般数としての扱いを明確にする。
(3) 計算のきまりの活用の際，文字式利用のサイクルに基づいた構成も取り入れる。

４．授業の実際

ここでは，授業設計の特徴が端的に現れる第１時，第４時，第６時の授業の実際について記述していく。授業を実施したクラスは鹿児島市内にある小学校のクラス（男子 16 名，女子 17 名，計 33 名）であり，授業は筆者の一人である伊藤が，2016 年 10 月 25 日から 11 月 1 日にかけて行った。なお，プロトコルや以後の文章における記号Ｔは教師，WS のような大文字２つは特定の児童，Ｃは特定で

きない児童，Cs は複数の児童たちを表している。

（１）第１時

はじめに，教師が「50 ＋ 30」という式になる問題を口頭で述べ，児童たちに式を考えさせた。すぐに，児童たちは「50 ＋ 30」と答え，他の式を教師が尋ねると，「30 ＋ 50」と答えた。どちらも答えが 80 になるので等号で結ぶことができることを全体で確認し，教師が「□＋△＝△＋□」と形式化した。次に，「文房具屋さんで 360 円の色ペンと 80 円の鉛筆，120 円のノートを買おうと考えています。全部で何円になるでしょうか」という問題を教師が提示した。その問題の式として「360 ＋ 80 ＋ 120」（児童 TM），「360 ＋（80 ＋ 120）」（TT），「（360 ＋ 80）＋ 120」（YT），「（80 ＋ 120）＋ 360」（C）が出され，それらの比較を通しながら，「計算は左から」と「括弧は先に」という計算順序に関する性質が想起され，教師が「（□＋△）＋○＝□＋（△＋○）」と形式化した。

次に，教師は「500 円もって買い物に行きました。120 円のノートと 360 円の色ペンを買います。残りは何円になりますか」という問題を提示した。式をかけるという児童が約 30 人いたので，教師は次のように尋ねた。

T：じゃあ，（式を）かけるとしたときに，このお話（前の問題）のときにはこれ（「（360 ＋ 80）＋ 120」と「360 ＋（80 ＋ 120）」），ひっくり返した式ができたよね。できたよね。しかもこの，こんなふうにひっくり返したら，ここ（360 ＋（80 ＋ 120））括弧つけたら，便利なものがみつけられましたね。じゃあ，これも同じようにひっくり返せそうじゃないですか。

C：うーん。

T：括弧，変えさえすれば。どう？

C：括弧は入れられない。

T：先についてる括弧を後ろのほうに入れ変えちゃえば。

Cs：できない。

T：でも，さっきできるっていったよね。

C：たし算はできる。

Cs：できない。

このように，加法の結合法則と比較しながら，この加減混合の場面を表す式ではそのような法則が成り立たないことを児童たちはかなり強く意識していた。そして，「500 －（120 ＋ 360）」（児童 SY），「（500 － 120）－ 360」（TT），「（500 － 360）－ 120」（HA）という式が出され，そのまま括弧の位置を変えることができないこと，後者二つの式は括弧を省略できること，前者の括弧の中は「あわせて使った金額」であることを全体で確認し，「たし算のときは括弧を動かして計算してもいいが，ひき算が混ざっているときは括弧を動かすだけではだめ」と教師がまとめた。最後に，児童 YT が「先生，これのかけ算バージョンってあるの」と発言したので，教師は，明日はそれを取り上げるとい

う予告を行った。

（２）第４時

はじめに，教師は「シールのシートが２枚あります。シールは全部で何枚になるでしょうか」という問題を示し，図１を児童に提示した。そして教師が式をかけそうか尋ねたところ，児童の反応は芳しくなく，そこで，次のようなやりとりがなされた。

OY：あの，ここ（横）の点々は何を意味してるんですか。
T：ここの点々ですか。ここの点々はですね，ずっとあるんですけど，これね，先生がもう面倒くさくてもうここ省きました。実はずっと続いているんです。ずっと続いてて，最後の終わりはここまでですよっていう意味です。だから，このシールを全部かくのは正直つらかったので，面倒くさくて省きました。
C：そこに何個入るんですか。
T：あ，そこに何個入るんですか。ここにですね，ずっと置いて○枚入ります。○枚。
C：○枚って何ですか。
C：○枚って何枚ですか。
T：○枚っていうのは○枚です。
C：ああー。
C：数は何枚。
T：数は○。
C：0 じゃない。
C：先生，0。
T：0 じゃないですよ。

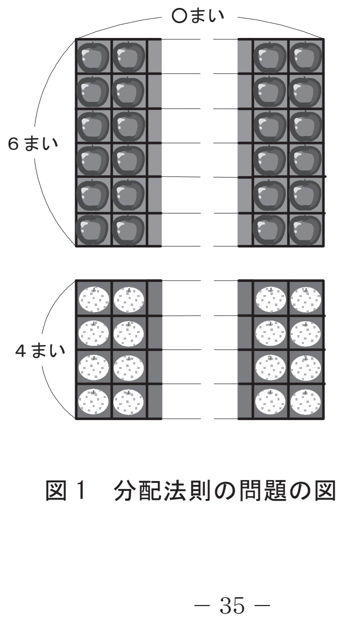


図１　分配法則の問題の図

C：りんごの全部の数は幾つですか。
T：りんごの全部の数は分かりません。
C：何なん。
T：ここに６枚あって，こっちには○枚あります。１，２，３，４，５，６，うんうんうんうん，○あります。

この後，梨の横の数についても質問が出たので，同様に○枚あることを教師は説明し，次のように述べた。

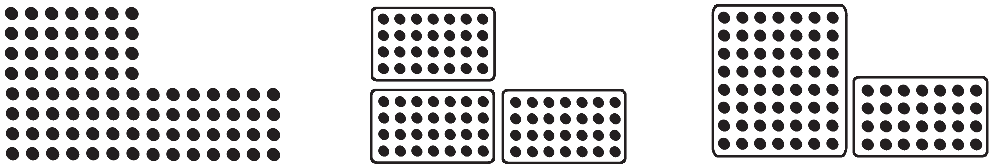
T：ね，ここ（○）には１が入るかもしれないし，２が入るかもしれないし，３が入るかもしれないし，８が入るかもしれない。いろんな数字が入る可能性のある，一応今は○枚に置きました。

これに対して，「ああ，そういうこと」とある児童がつぶやき，教師は３年生の□を使った式に言及した。そして，それと同じように○で置いたことを説明し，式で表すように促した。その後，教師がどのような式になるか尋ねたところ，児童 TT が「６×○＋４×○」と答えた。その式について，全体で「６×○」が林檎の枚数，「４×○」が梨の枚数であることを確認し，次に児童 MO が別の式「（６＋４）×○」を発表した。そこで教師が括弧のまとまりが何を意味するか尋ねたところ，児童 AS が黒板の前で図を指しながら，「林檎のこの縦と梨のこの縦」と説明した。
それぞれの式の意味を確認した後，同じものを表しているのに違う式になっているのはおかしいのではないかと教師は尋ねた。それに対し，児童 WS は次のように説明した。

WS：えっと，まあ，例えばだけど，イの式で６＋４したら 10 だけど，普通に６×２と４×２したら，えっと，４×２＝８で６×２が，えっと，12 だから，足したら 20 で，その，６＋４足したら 10 だから，それを×２しても 20 になるから，答えは変わらないと思います。

このように，「仮に２を○に代入したら」というように，○をプレースホルダーとして考えている姿がみられた。これに対し，他の児童から他の数が入っても同じだという反応があり，各自で好きな数を代入して確かめる活動を行った。それによって，各自が選んだ様々な数でも成り立つことが確かめられ，これら二つの式が等しいことを児童たちは実感した。
その後，２つのシールの差を求める問題を扱った後，教師はこれまでの計算法則（加法と乗法の交換法則及び結合法則，分配法則）を記号を用いて一般的に「計算のきまり」としてまとめた。

（３）第６時
第６時は，はじめに教師は図２(a) を示しながらおはじきの全部の数を数える問題であることを告げ，「さくらさんは，次のように考えました。これをですね，こんなふうに考えた」といって，図２



(a)　　(b)　　(c)

図２　第６時の問題の図

(b) のようにおはじきを囲んだ。そして, さくらさんの考えを式に表すように促した。児童 KM は「28 × ３」, 児童 KS は「４×７×３」と答え, 両者とも妥当であることを全体で確認し,「４×７」が「28」に等しいことから，敢えて「(４×７) ×３」と表すことができることを教師は確認した。

そして次に，教師は計算法則を用いてこの式を変形できるかを尋ね，児童たちは前の時間にまとめた計算のきまりを参照しながら「４× (７×３)」に変形できることを確認した。その上で「みずほさんは「この式に変えてもおはじきでも表せるよ」といいました。どのように並び替えたのかな？」という問題を教師は提示し，児童たちに図がかかれたプリントを配布して考えさせた。これについて「「７×３」のかたまりが４こ」,「４のかたまりが 21 こ」という数え方が図とともに示されたのに対し，教師は「４× 21 のままだと４× 21 がいくつ？」と尋ね，ある児童が「「４× 21」が１つ」と答えた。これについて, 児童 SJ が図２(b) の上の「４×７」の部分を横に移動させる考えを発表し，教師は図を実際に切って「４× 21」の長方形に変形してみせた。

この一連のサイクルをふまえ，次のサイクルに移った。今度は，図２(c) のように教師が囲み，どのような式になるか児童に尋ねた。児童 AS が「８×７＋４×７」と答え，児童たちは同意した。そこで教師は,「この式をみたら計算のきまりがイメージ湧く？」と問い，計算法則に基づいて式変形を行うように促した。児童たちは，再び計算のきまりを参照しながら,「(８＋４) ×７」に変形できることを確認し，次に教師はこの式を図で示すことができるかを尋ねた。各自で考えた後，児童 MO が前に出て，図を縦に切り,「12 ×７」の長方形に並び替えて説明した。

（４）事後調査

第７時に，以下のような調査問題で，対象クラス（実験群）と，教科書に準じて指導を行った別のクラス（統制群）に事後調査を行った（第１時，第４時，第６時に直接関係しない $\boxed{1}$ と $\boxed{3}$ は省略する)。

$\boxed{1}$　次の２つの問題を読んで，１つの式に表して，答えを求めましょう。(省略)

$\boxed{2}$　次の計算をしましょう。

（１）４００－（２５＋７５）　　（２）５＋２５×４＋１

（３）２０－６÷（４－２）　　（４）（９０－２５×２）÷５

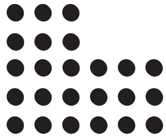
$\boxed{3}$　計算のきまりを使って，工夫して計算をしましょう。どのようなきまりを使ったか，説明しましょう。（省略）

$\boxed{4}$　次の計算で，正しい式に○を，まちがっている式に×を書きましょう。

（１）７－２＋□＝７－（２＋□）　（２）□×４×２＝□×（２×４）

（３）３＋□＋２＝３＋（２＋□）　（４）（□＋２）×４＝□＋２×４

$\boxed{5}$　右のようにおはじきをならべ，こ数を数える方法を考えることになりました。



（１）ゆうきさんは，おはじきをならべなおして，８×３という式を考えました。この考えがわかるように，図を使って説明しましょう。（註；解答欄にも同じ図がかかれている）

（２）げんきさんは，２×３＋３×６という式を考えました。あい子さんは，「計算のきまりを使うと，ゆうきさんの式８×３と同じになるね」と言いました。あい子さんの考えを，式を使って説明しましょう。

（３）（２）の２×３＋３×６＝８×３という考えにあうように，おはじきをならべなおします。ならべなおし方を，図を使って説明しましょう。（註；解答欄にも同じ図がかかれている）

調査結果は表２のようになった。両クラスの結果を各設問を１点として得点化し，t 検定により比較（有意水準５％）したところ，調査結果全体では有意差はみられなかったが，大問ごとでは$\boxed{5}$で有意な差がみられ，さらに$\boxed{5}$の小問ごとでは (2) で有意な差がみられた。なお，$\boxed{5}$については，３問とも正解とみなした児童数は実験群のクラスで７人，統制群のクラスで４人，２問正解がそれぞれ８人と５人，１問正解がそれぞれ 12 人と 10 人，全問不正解がそれぞれ６人と 14 人であった。

５．考察

ここでは主に，授業設計の特徴に基づいて考察を行っていく。特徴の一つは，内容の配列を「既習を基に未習を考える」としたことである。教科書では，四則に関係なく，はじめに計算順序があり，次に計算法則という構成である。しかし，そこには既習内容と未習内容が混在しているので，計算順序と計算法則を区別せず，加減についての既習内容から未習内容へ，続いて同様に乗除について

表２　事後調査の結果

問題 / クラス	$\boxed{2}$				$\boxed{4}$				$\boxed{5}$		
	(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)
実験群	97.0	54.5	72.7	66.7	45.5	72.7	63.6	57.6	57.6	48.5	42.4
統制群	100	60.6	63.6	63.6	45.5	72.7	57.6	60.6	42.4	24.2	30.3

※（実験群 33 名，統制群 33 名，数値は％で小数第２位を四捨五入した）

の既習内容から未習内容へ，そして四則混合という構成にした。そうしたところ，第１時のように，未習内容に取り組む際に，既習内容と比較しながら考えている様子がみられた。また，第１時の最後のように，乗除でも同じような性質が成り立つのではないか，という類推を促すことにもつながり，単元を通して児童の問いが連続するような授業が実現できた。

また，特徴の二つ目として，□などの記号を一般数として認識できるように分配法則の授業を設計したことが挙げられる。第３時までは，教科書と同様に，計算法則をまとめる際に□などの記号を用いただけであったが，第４時の問題の中に「○」を含めると，児童たちはかなり戸惑っていた。つまり，単に計算法則を記号で置き換えるだけでは一般数としての認識には至らないということが示唆される。授業では，その後に教師が「いろんな数字が入る可能性のある」という説明をするとともに，最終的に○にいろいろな数を当てはめて確かめるという活動により，プレースホルダーに基づいた一般数として，□などの記号の意味が認識されたといえよう。

三つ目の特徴は，文字式利用のサイクルに基づいた計算のきまりの活用である。現行の学習指導要領では式を読む活動が強調されているため，児童たちはその活動自体は経験していた。しかしながら，文字式利用のサイクルのような一連の流れの中で式を読むという活動は行っていない。特に，目的意識をもった式変形（三輪，1996）は重要であるが，小学校算数ではあまり強調されることはない。なぜならば，文字式ではなく数字の式を算数では主として扱うからである。しかし，この単元では計算法則を学習することから，小学校では機会の少ない式変形を扱うことができるので，本単元では文字式利用のサイクルのような一連の流れの中で式を読む活動を取り入れるべきだと考える。事後調査の結果からも，その有効性が示唆されよう。

ただし，事後調査の結果について，$\boxed{5}$以外の問題についてはほとんど差がみられなかった。正答率が高くて差がみられなかった問題については問題ないと考えるが，特に$\boxed{4}$は正答率がそれほど高くない中で差がみられなかった。つまり，□を一般数として認識できるかどうかを問う問題であったが，一般数としての扱いを位置づけた実験群の児童でもそれほど高い正答率を得ることができなかった。もちろん，授業の中では児童から自然と○の中に数を当てはめてみる考えが現れたので，それなりの意味があったといえるのであるが，それだけでは不十分であったことが窺える。

６．おわりに

本稿は，「式と計算」の単元において児童が主体的に学習することができ，また代数学習につながるような授業を設計し，それを実践的に検討することを目的としていた。その結果，本稿で提案した授業設計は児童たちの問いが連続するような構成になっていることや，□などの記号の意味の理解が深まったことを明らかにした。また，事後調査の結果から，文字式利用のサイクルに基づいた式を読む活動が重要であることも示唆された。

ただし，特に□などの記号の意味の理解については，１時間だけで児童の認識が一般数にまで変容したとは言い切れない結果となった。例えば，和田ほか（2017）では，第３学年の「□を使った式」の単元において，未知数ではなく一般数として導入することを提案している。□などの記号の意味

の理解を深めるためには，このような研究もふまえ，「式と計算」の単元だけでなく小学校算数全体のカリキュラムを体系的に見直していく必要があろう。

謝辞

本研究の実施に多大なるご協力をいただきました山下守先生，久保博之先生，並びに児童の皆様に心より御礼申し上げます。なお，本研究はJSPS科研費JP15K04452の助成を受けている。

引用及び参考文献

Carraher, D. W. & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In Frank K. Lester, Jr. (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning, 669-705. Information Age Publishing.

黒澤俊二（2003)，「計算のきまりを見いだす児童とそこへの教師介入の一事例研究」，『第36回数学教育論文発表会「課題別分科会」発表収録』，93-105.

小山正孝（2003)，「「計算のきまり」の指導のねらいと内容」，『第36回数学教育論文発表会「課題別分科会」発表収録』，106-109.

杉山吉茂（1986)，『公理的方法に基づく算数·数学の学習指導』，東洋館.

藤井斉亮（1999)，「「数字の式」から「文字の式」に至る指導」，『新しい算数・数学教育の実践を目指して』，153-162，東洋館.

三輪辰郎（1996)，「文字式の指導序説」，『筑波数学教育研究』，15，1-14.

文部科学省（2008)，『小学校学習指導要領解説算数編』，東洋館.

和田信哉（2014)，「加法と減法の相互関係に関する研究」，全国数学教育学会誌『数学教育学研究』，20(2)，77-91.

和田信哉・中川裕之・岩田耕司（2017)，「「□を使った式」に関する児童の認識の変容の分析」，『日本教科教育学会誌』，40(3)，69-80.

和田信哉・宮崎憲一郎（2016)，「等分除と包含除の統合に関する実践的研究」，『鹿児島大学教育学部教育実践研究紀要』，25，23-32.