

# $x^2 y^2$ 模型の古典解の振る舞いについて

道下 洋二\*

(2016年10月25日 受理)

## On the behavior of classical solutions in $x^2 y^2$ model

Michishita Yoji

### 要約

M2膜の量子力学の特徴を単純化して2つの変数 $x(t)$ と $y(t)$ を用いて捉えたモデルとして知られる $x^2 y^2$ モデルの古典解の性質を調べ、次のことを証明する： $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \pm\infty$  (あるいは  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \pm\infty$ ) を満たす古典解はポテンシャルの底を等速運動し続ける解のみである。これらの解の集合は解全体の空間の中では「測度0」であるので、この事実はほとんどの解は無限遠に到達する前に引き返してしまうことを意味する。

キーワード：膜理論、弦理論

---

\* 鹿児島大学教育学部 准教授

## 1 はじめに

$x^2y^2$  モデルは [1] において M 理論の M2 膜の有効理論を正則化して与えられる  $SU(N)$  行列量子力学 [2] のエネルギースペクトルを単純化して説明するためのモデルとして導入された。(その他のコンテキストでも使われておりさまざまな名前で呼ばれるようであるがここでは  $x^2y^2$  モデルと呼んでおく。) これらの量子力学モデルのポテンシャルは、無限遠まで続く「無限に狭い」平坦方向を持っているという共通の特徴を持っている。これらのモデルのボゾンのバージョンにおいては、量子効果を考慮するとこの平坦方向は持ち上がって平坦でなくなり、その結果エネルギースペクトルは離散的になるが、超対称バージョンではボゾンの変数とフェルミオンの変数のそれぞれからの量子効果への寄与が打ち消して平坦方向が平坦なままなので、エネルギースペクトルは連続的になる [1]。

この事実に対応して、これらのモデルの古典解にもこれを反映した構造があることが期待される。そこで本稿では  $x^2y^2$  モデルの古典解を調べる。このモデルは 2 つの変数  $x(t)$  と  $y(t)$  を持ち、解は 4 つの初期条件  $x(t_0), \dot{x}(t_0), y(t_0), \dot{y}(t_0)$  でパラメトライズできる。また名前の通り  $x^2y^2$  という形のポテンシャルを持っている。ここで  $x(t)$  が無限に狭いポテンシャルの底  $y = 0$  付近を這いながら無限遠  $x = \pm\infty$  まで到達できるかを問うてみよう。 $x(t) = at + b, y(t) = 0$  という解、すなわちポテンシャルの底から少しも離れない解は、無限の未来あるいは過去に無限遠まで到達するのは容易にわかる。しかし多少  $y = 0$  から離れて、 $y = 0$  の周りを振動しながら  $x = \pm\infty$  まで到達する解があるのかないのかは直にはわからない。

本稿では次の事実を証明する：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \pm\infty \text{ となる解は } x(t) = at + b, y(t) = 0 \text{ 以外には存在しない。}$$

この解はパラメータを  $a, b$  の 2 つしか持たないので、解全体の空間では「測度 0」の集合をなすに過ぎない。すなわちほとんどの解は無限遠まで到達できないので、ポテンシャルに平坦方向はあっても平坦方向としては役立っていないことになる。(ただし  $x(t)$  が  $x = 0$  の周りを振動しながらその振幅が際限なく大きくなっていくという運動をする可能性は否定していない。)

無限遠まで到達できないほとんどの古典解は量子論での規格化可能な離散スペクトルに対応し、ごくわずかの無限遠まで到達できる解は規格化不可能な連続スペクトルに対応すると言える。このごくわずかの解は超対称な場合でない限り量子効果を生き延びることはできないことになる。

第 2 節では  $x^2y^2$  モデルの基礎的事項についてまとめる。第 3 節では古典解の初期条件とその後の時間発展のしかたを分類する。第 4 節で  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \pm\infty$  を満たす解は  $x(t) = at + b, y(t) = 0$  だけであることを証明する。第 5 節ではまとめと残された問題について述べる。

## 2 準備

$x^2y^2$  モデルのボゾンのバージョンは次の Lagrangian で与えられる<sup>†</sup>:

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2 - x^2y^2. \quad (2.1)$$

ポテンシャル  $x^2y^2$  は平坦方向  $x=0$  と  $y=0$  を持つ。  $x$  が大きくなるにつれて、  $(x, y=0)$  での、平坦方向に垂直な方向のポテンシャルの曲率は際限なく増加していく。これが冒頭に述べた「無限に狭い」の意味であり、これがこの系の古典および量子力学に興味深い効果をあたえる。

古典的運動方程式は

$$\ddot{x} + 2xy^2 = 0, \quad \ddot{y} + 2yx^2 = 0. \quad (2.2)$$

であり、次で与えられるこの系のエネルギー  $E(\geq 0)$  は保存される:

$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2 + x^2y^2. \quad (2.3)$$

このモデルには次の 2 つの離散対称性がある:

$$x \rightarrow -x, \quad x \leftrightarrow y. \quad (2.4)$$

1 つ古典解があれば、上の変換によって新しい解を与えることができる。そこで以下では解などの場合分けをするときに上の変換によって他の場合から与えることができるような場合についての議論は省略するので了承されたい。

$x(t)$  と  $y(t)$  は 2 階微分方程式の解なので、それらとそれらの導関数は連続関数である。さらに運動方程式を用いれば、高階導関数も低い階数の導関数で表すことができるので、帰納法によって任意の階数の導関数も連続である。すなわち  $x(t)$  と  $y(t)$  は  $C^\infty$  級である。

いくつかの厳密解はすぐに発見できる。そのひとつは  $x=y$  とおいて得られる:

$$\dot{x} = \pm\sqrt{E-x^4}. \quad (2.5)$$

これは Jacobi の楕円関数  $\text{sn}$  によって解かれる:

$$x(t) = E^{1/4}\text{sn}(E^{1/4}(t+c), i), \quad (2.6)$$

$c$  は定数である。これは周期  $4E^{-1/4}K$  の周期関数 ( $K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ ) である。もう一つの解は  $x(t)$  と  $y(t)$  をポテンシャルの底に常に置くことで得られる:

$$x(t) = at + b, \quad y(t) = 0, \quad (2.7)$$

$a$  と  $b$  は定数である。微分方程式の解の一意性から、ある時刻  $t_0$  に  $y(t_0) = \dot{y}(t_0) = 0$  であつたら、その初期条件を満たす解は (2.7) であることに注意しよう。

このモデルの超対称なバージョンのひとつが次の Lagrangian で与えられる:

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2 - x^2y^2 + i\theta_1^\dagger\dot{\theta}_1 + i\theta_2^\dagger\dot{\theta}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}[x(\theta_1^\dagger\theta_1 - \theta_2^\dagger\theta_2) - iy(\theta_1^\dagger\theta_2 - \theta_2^\dagger\theta_1) + (x+iy)\theta_1^\dagger\theta_2^\dagger - (x-iy)\theta_1\theta_2], \quad (2.8)$$

<sup>†</sup>[1] で与えられているのは本稿のものに  $t \rightarrow 2^{-1/3}t, x \rightarrow 2^{-1/6}x, y \rightarrow 2^{-1/6}y$  というリスケールを行ったものである。

ここで  $\theta_1$  と  $\theta_2$  は複素グラスマン変数である。この運動方程式のボゾンの部分はボゾンのバージョンのものと同じである。

$x$  と  $y$  の共役運動量は  $p_x = \dot{x}$  と  $p_y = \dot{y}$  で与えられ、超荷  $Q$  は

$$Q = \frac{i}{2}(p_x + ip_y + \sqrt{2}xy)\theta_1 + \frac{i}{2}(p_x + ip_y - \sqrt{2}xy)\theta_2 - \frac{i}{2}(p_x - ip_y + \sqrt{2}xy)\theta_1^\dagger - \frac{i}{2}(p_x - ip_y - \sqrt{2}xy)\theta_2^\dagger. \quad (2.9)$$

で与えられる。 $Q^\dagger = Q$  であることと、 $\frac{1}{2}\{Q, Q\}$  がこの系の Hamiltonian を与えることに注意せよ。

量子力学的には、任意の状態  $|*\rangle$  は

$$|*\rangle = \int dx dy [ |x, y\rangle \psi_0(x, y) + \theta_1^\dagger |x, y\rangle \psi_1(x, y) + \theta_2^\dagger |x, y\rangle \psi_2(x, y) + \theta_1^\dagger \theta_2^\dagger |x, y\rangle \psi_3(x, y) ], \quad (2.10)$$

と展開できる。 $|x, y\rangle$  は  $\theta_1 |x, y\rangle = \theta_2 |x, y\rangle = 0$  を満たす状態である。この展開係数  $\psi_n$  を使うと、Schrödinger 方程式は次のように分解される：

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + x^2 y^2 & \frac{x+iy}{\sqrt{2}} \\ \frac{x-iy}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + x^2 y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_0 \\ -\psi_3 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \psi_0 \\ -\psi_3 \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + x^2 y^2 & \frac{x+iy}{\sqrt{2}} \\ \frac{x-iy}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + x^2 y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_2 + \psi_1 \\ \psi_2 - \psi_1 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \psi_2 + \psi_1 \\ \psi_2 - \psi_1 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

これらの方程式から直ちに、ボゾンの状態のエネルギースペクトルとフェルミオンの状態のそれとが縮退していることが見て取れる。これらの方程式は連続スペクトルをもつことが [1] で証明されている。

### 3 古典解の時間発展

本節では古典的運動方程式  $\dot{x} = -2xy^2$ ,  $\dot{y} = -2yx^2$  の解の時間発展について調べる。もし  $y(t)$  と  $\dot{y}(t)$  の両方 (もしくは  $x(t)$  と  $\dot{x}(t)$  の両方) がある時刻  $t = t_0$  でゼロであったら、 $x(t)$  と  $y(t)$  は (2.7) の形をしている。従って本節ではこの場合は排除して考える。そうすると  $t = t_0$  での初期条件は次のように分類される：

- (a) :  $x(t_0) \geq 0$ ,  $\dot{x}(t_0) > 0$ ,  $y(t_0) \geq 0$ ,  $\dot{y}(t_0) > 0$ ,
- (b) :  $x(t_0) > 0$ ,  $\dot{x}(t_0) \leq 0$ ,  $y(t_0) \geq 0$ ,  $\dot{y}(t_0) > 0$ ,
- (c) :  $x(t_0) > 0$ ,  $\dot{x}(t_0) \leq 0$ ,  $y(t_0) > 0$ ,  $\dot{y}(t_0) \leq 0$ .

他の可能な場合は (2.4) によって作ることができる。これらの条件から出発して  $x(t)$  と  $y(t)$  がどのようにふるまうか調べてみよう。

(a) の場合  $\dot{x}(t_0) > 0$  であるので、 $t_0$  の近傍で  $x(t)$  は増加する。従ってある正の実数  $\epsilon$  に対して、

$$t_0 < \forall t < t_0 + \epsilon, \quad x(t) > 0, \quad \dot{x}(t) > 0, \quad y(t) > 0, \quad \dot{y}(t) > 0. \quad (3.1)$$

である。 $\dot{x}(t) > 0$  である限り  $x(t)$  は正のままにとどまる。そして運動方程式から  $\ddot{x}(t) = -2x(t)y(t)^2 < 0$  であるので  $\dot{x}(t)$  は減少する。そこで  $x(t)$  と  $y(t)$  の振る舞いは  $\dot{x}(t)$  がゼロとなる点があるかどうかによって次のように分類される：

$$(a-1) : t_0 < \exists t_1 \text{ s.t. } x(t_1) > 0, \quad \dot{x}(t_1) = 0, \quad y(t_1) > 0, \quad \dot{y}(t_1) > 0,$$

$$t_0 < \forall t < t_1, \quad x(t) > 0, \quad \dot{x}(t) > 0, \quad y(t) > 0, \quad \dot{y}(t) > 0,$$

$$(a-2) : \text{入れ替え } x \leftrightarrow y \text{ によって (a-1) から作られる場合,}$$

$$(a-3) : t_0 < \exists t_1 \text{ s.t. } x(t_1) > 0, \quad \dot{x}(t_1) = 0, \quad y(t_1) > 0, \quad \dot{y}(t_1) = 0,$$

$$t_0 < \forall t < t_1, \quad x(t) > 0, \quad \dot{x}(t) > 0, \quad y(t) > 0, \quad \dot{y}(t) > 0,$$

$$(a-4) : t_0 < \forall t, \quad x(t) > 0, \quad \dot{x}(t) > 0, \quad y(t) > 0, \quad \dot{y}(t) > 0.$$

実は (a-4) は不可能である。これは次のように示せる。 $\dot{x}(t) > 0, \dot{y}(t) > 0$  は  $x(t), y(t)$  が永久に増加していくことを示す。そうすると  $X \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$  と  $Y \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$  は有限か無限かのどちらかであるが、 $0 < L < X, Y$  を満たすある固定した  $L$  に対して、

$$\exists T, \quad T < \forall t, \quad L < x(t), y(t). \quad (3.2)$$

であり、運動方程式から

$$T < \forall t, \quad \ddot{x}(t) = -2x(t)y(t)^2 < -2L^3 < 0. \quad (3.3)$$

となる。この不等式の両辺を  $T$  から  $t$  まで積分して次を得る：

$$\dot{x}(t) - \dot{x}(T) < -2L^3(t - T). \quad (3.4)$$

これは十分大きい  $t$  に対して、 $\dot{x}(t)$  が負になることを意味するが、それは  $\dot{x}(t) > 0$  の仮定に矛盾する。従って (a-4) は不可能である。

また (a-1) の場合、 $\ddot{x}(t_1) = -2x(t_1)y(t_1)^2 < 0$  であるので、 $t = t_1$  の近傍では  $\dot{x}(t)$  は減少する。従ってある正の実数  $\epsilon$  に対して、

$$t_1 < \forall t < t_1 + \epsilon, \quad x(t) > 0, \quad y(t) > 0, \quad \dot{y}(t) > 0$$

$$t_0 < \forall t < t_1, \quad \dot{x}(t) > 0,$$

$$\dot{x}(t_1) = 0,$$

$$t_1 < \forall t < t_1 + \epsilon, \quad \dot{x}(t) < 0. \quad (3.5)$$

よって  $t = t_1$  以降の  $x(t)$  と  $y(t)$  の振る舞いは (b) の場合として扱える。

(a-3) の場合も同様に分析できる：

$$t_1 < \forall t < t_1 + \epsilon, \quad x(t) > 0, \quad y(t) > 0,$$

$$t_0 < \forall t < t_1, \quad \dot{x}(t), \dot{y}(t) > 0,$$

$$\dot{x}(t_1) = \dot{y}(t_1) = 0,$$

$$t_1 < \forall t < t_1 + \epsilon, \quad \dot{x}(t), \dot{y}(t) < 0. \quad (3.6)$$

よって  $t = t_1$  以降の  $x(t)$  と  $y(t)$  の振る舞いは (c) の場合として扱える。

(b) の場合  $\ddot{x}(t_0) = -2x(t_0)y(t_0)^2 < 0$ ,  $\dot{y}(t_0) > 0$  であるので、 $t_0$  の近傍で  $\dot{x}(t)$  は減少し、 $y(t)$  は増加する。したがって正の実数  $\epsilon$  が存在して次が成り立つ。

$$t_0 < \forall t < t_0 + \epsilon, \quad x(t) > 0, \quad \dot{x}(t) < 0, \quad y(t) > 0, \quad \dot{y}(t) > 0. \quad (3.7)$$

$x(t) > 0$  である限り、 $\dot{x}(t)$  は負のまま、 $x(t)$  は減少する。同様に  $\dot{y}(t) > 0$  である限り、 $y(t)$  は正のままであり、運動方程式から、 $\ddot{y}(t) = -2y(t)x(t)^2 < 0$  であるので、 $\dot{y}(t)$  は減少する。したがって  $x(t)$  と  $y(t)$  の振る舞いは、 $x(t)$  と  $\dot{y}(t)$  がゼロになる点があるかどうかによって次のように分類される。

$$(b-1) : t_0 < \exists t_1 \text{ s.t. } x(t_1) = 0, \quad \dot{x}(t_1) < 0, \quad y(t_1) > 0, \quad \dot{y}(t_1) > 0,$$

$$t_0 < \forall t < t_1, \quad x(t) > 0, \quad \dot{x}(t) < 0, \quad y(t) > 0, \quad \dot{y}(t) > 0,$$

$$(b-2) : t_0 < \exists t_1 \text{ s.t. } x(t_1) > 0, \quad \dot{x}(t_1) < 0, \quad y(t_1) > 0, \quad \dot{y}(t_1) = 0,$$

$$t_0 < \forall t < t_1, \quad x(t) > 0, \quad \dot{x}(t) < 0, \quad y(t) > 0, \quad \dot{y}(t) > 0,$$

$$(b-3) : t_0 < \exists t_1 \text{ s.t. } x(t_1) = 0, \quad \dot{x}(t_1) < 0, \quad y(t_1) > 0, \quad \dot{y}(t_1) = 0,$$

$$t_0 < \forall t < t_1, \quad x(t) > 0, \quad \dot{x}(t) < 0, \quad y(t) > 0, \quad \dot{y}(t) > 0,$$

$$(b-4) : t_0 < \forall t, \quad x(t) > 0, \quad \dot{x}(t) < 0, \quad y(t) > 0, \quad \dot{y}(t) > 0.$$

実は (b-4) は不可能である。それは次のように示せる。 $\ddot{x}(t) = -2x(t)y(t)^2 < 0$  は  $\dot{x}(t)$  が永久に減少していくことを示す。そうすると  $\xi \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t) < 0$  は有限か負の無限大かのどちらかであるが、 $0 < L < -\xi$  を満たすある固定した  $L$  に対して、

$$\exists T, \quad T < \forall t, \quad \dot{x}(t) < -L. \quad (3.8)$$

この不等式の両辺を  $T$  から  $t$  まで積分して次を得る。

$$x(t) - x(T) < -L(t - T). \quad (3.9)$$

これは十分大きい  $t$  に対して  $x(t)$  が負であることを意味するが、それは仮定  $x(t) > 0$  に矛盾する。したがって (b-4) は不可能である。

また (b-1) の場合、 $t = t_1$  の近傍で  $x(t)$  は減少する。したがってある正の実数  $\epsilon$  に対して、

$$t_1 < \forall t < t_1 + \epsilon, \quad \dot{x}(t) < 0, \quad y(t) > 0, \quad \dot{y}(t) > 0,$$

$$t_0 < \forall t < t_1, \quad x(t) > 0,$$

$$x(t_1) = 0,$$

$$t_1 < \forall t < t_1 + \epsilon, \quad x(t) < 0. \quad (3.10)$$

よって  $t = t_1$  以降の  $x(t)$  と  $y(t)$  の振る舞いは (a) で  $x$  を  $-x$  に置き換えた場合として扱える。

(b-2) の場合は (a-1) と同様に扱える。すなわちある正の実数  $\epsilon$  に対して、

$$t_1 < \forall t < t_1 + \epsilon, \quad x(t) > 0, \quad \dot{x}(t) < 0, \quad y(t) > 0,$$

$$\begin{aligned}
t_0 < \forall t < t_1, & \quad \dot{y}(t) > 0, \\
& \quad \dot{y}(t_1) = 0, \\
t_1 < \forall t < t_1 + \epsilon, & \quad \dot{y}(t) < 0.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

よって  $t = t_1$  以降の  $x(t)$  と  $y(t)$  の振る舞いは (c) の場合として扱える。

(b-3) の場合は (b-1) と (b-2) の組み合わせである。すなわちある正の実数  $\epsilon$  に対して、

$$\begin{aligned}
t_1 < \forall t < t_1 + \epsilon, & \quad \dot{x}(t) < 0, \quad y(t) > 0, \\
t_0 < \forall t < t_1, & \quad x(t), \dot{y}(t) > 0, \\
& \quad x(t_1) = \dot{y}(t_1) = 0, \\
t_1 < \forall t < t_1 + \epsilon, & \quad x(t), \dot{y}(t) < 0.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

よって  $t = t_1$  以降の  $x(t)$  と  $y(t)$  の振る舞いは (b) で  $x$  と  $y$  を  $y$  と  $-x$  にそれぞれ置き換えた場合として扱える。

(c) の場合  $\dot{x}(t_0) = -2x(t_0)y(t_0)^2 < 0$  であるので、 $t_0$  の近傍で  $\dot{x}(t)$  と  $\dot{y}(t)$  は減少する。したがってある正の実数  $\epsilon$  に対して、

$$t_0 < \forall t < t_0 + \epsilon, \quad x(t) > 0, \quad \dot{x}(t) < 0, \quad y(t) > 0, \quad \dot{y}(t) < 0 \tag{3.13}$$

$x(t) > 0$  かつ  $y(t) > 0$  である限り、 $\dot{x}(t)$  と  $\dot{y}(t)$  は負のままにとどまり  $x(t)$  と  $y(t)$  は減少する。したがって  $x(t)$  と  $y(t)$  のふるまいは、 $x(t)$  と  $y(t)$  がゼロになる点があるかどうかによって次のように分類される。

$$(c-1) : t_0 < \exists t_1 \text{ s.t. } x(t_1) = 0, \quad \dot{x}(t_1) < 0, \quad y(t_1) > 0, \quad \dot{y}(t_1) < 0,$$

$$t_0 < \forall t < t_1, \quad x(t) > 0, \quad \dot{x}(t) < 0, \quad y(t) > 0, \quad \dot{y}(t) < 0,$$

$$(c-2) : \text{入れ替え } x \leftrightarrow y \text{ によって (c-1) から作られる場合,}$$

$$(c-3) : t_0 < \exists t_1 \text{ s.t. } x(t_1) = 0, \quad \dot{x}(t_1) < 0, \quad y(t_1) = 0, \quad \dot{y}(t_1) < 0,$$

$$t_0 < \forall t < t_1, \quad x(t) > 0, \quad \dot{x}(t) < 0, \quad y(t) > 0, \quad \dot{y}(t) < 0,$$

$$(c-4) : t_0 < \forall t, \quad x(t) > 0, \quad \dot{x}(t) < 0, \quad y(t) > 0, \quad \dot{y}(t) < 0.$$

実は (c-4) は不可能であることが (b-4) のときと同様に示される。

また (c-1) の場合、 $\dot{x}(t_1) < 0$  であるので、 $t = t_1$  の近傍で  $x(t)$  は減少する。したがってある正の実数  $\epsilon$  に対して、

$$\begin{aligned}
t_1 < \forall t < t_1 + \epsilon, & \quad \dot{x}(t) < 0, \quad y(t) > 0, \quad \dot{y}(t) < 0, \\
t_0 < \forall t < t_1, & \quad x(t) > 0, \\
& \quad x(t_1) = 0, \\
t_1 < t < t_1 + \epsilon, & \quad x(t) < 0.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

よって  $t = t_1$  以降の  $x(t)$  と  $y(t)$  の振る舞いは (b) で  $x$  と  $y$  を  $y$  と  $-x$  にそれぞれ置き換えた場合として扱える。

(c-3) の場合も同様に分析できる。すなわち

$$\begin{aligned} t_1 < \forall t < t_1 + \epsilon, \quad \dot{x}(t) < 0, \quad \dot{y}(t) < 0, \\ t_0 < \forall t < t_1, \quad x(t), y(t) > 0, \\ x(t_1) = y(t_1) = 0, \\ t_1 < \forall t < t_1 + \epsilon, \quad x(t), y(t) < 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

よって  $t = t_1$  以降の  $x(t)$  と  $y(t)$  の振る舞いは (a) で  $x$  と  $y$  を  $-x$  と  $-y$  にそれぞれ置き換えた場合として扱える。

#### 4 $x(t)$ と $y(t)$ の振動的ふるまい

前節で (2.7) 以外の解のふるまいについて調べたが、本節ではそれらの解が  $x = 0, y = 0$  の周りに振動すること、すなわち  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \pm \infty$  を満たす解は (2.7) のみであることを、を証明する。前節の (a)、(b)、(c) の場合に対応して次の場合を考える。

$$(A) : x > 0, \quad \dot{x} > 0, \quad y > 0, \quad \dot{y} > 0,$$

$$(B) : x > 0, \quad \dot{x} < 0, \quad y > 0, \quad \dot{y} > 0,$$

$$(B)' : x > 0, \quad \dot{x} > 0, \quad y > 0, \quad \dot{y} < 0,$$

$$(C) : x > 0, \quad \dot{x} < 0, \quad y > 0, \quad \dot{y} < 0.$$

(B)' は (B) で  $x$  と  $y$  を入れ替えて得られることに注意せよ。前節でこれらの場合がどのように時間発展して互いに入れ替わるか導いた：

$$(A) \rightarrow (B) \text{ or } (B)' \text{ or } (C),$$

$$(B) \rightarrow (A)_x \text{ or } (B)'_x \text{ or } (C),$$

$$(B)' \rightarrow (A)_y \text{ or } (B)_y \text{ or } (C),$$

$$(C) \rightarrow (A)_{xy} \text{ or } (B)_y \text{ or } (B)'_x,$$

ここで  $(A)_x$  と  $(A)_y$  は (A) で符号反転  $x \rightarrow -x$  と  $y \rightarrow -y$  をそれぞれ行って得られる場合である。 $(A)_{xy}$  は (A) で符号反転  $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y$  を行って得られる場合である。 $(B)_x, (B)'_x$  なども同様である。

(B) と (C) では  $x$  は減少している。 $x$  が十分減少すれば  $x$  は負になる。 $x$  が正のままとどまる唯一の場合は

$$(B) \rightarrow (C) \rightarrow (B)_y \rightarrow (C)_y \rightarrow (B) \rightarrow \dots \quad (4.1)$$

であることが容易にわかる。…はこの列が初めに戻って繰り返すことを意味する。



同様に (A) と (B)' では  $x$  は増加している。 $x$  の増加は止まるかもしれないし、永久に増加し続けるかもしれない。永久に増加し続ける唯一の場合は

$$(A) \rightarrow (B)' \rightarrow (A)_y \rightarrow (B)'_y \rightarrow (A) \rightarrow \dots \quad (4.2)$$

であることが容易にわかる。

じつはこれら (4.1) と (4.2) は不可能である。それを以下で証明していく。したがって  $x(t)$  は増加し続けることもないし、正のままとどまることもない。すなわち  $x = 0$  の周りを振動することになる。

(4.1) が不可能であることの証明 もしこれが可能なら、 $\ddot{x} = -2xy^2 \leq 0$  であり  $\dot{x}$  は永久に減少していく。そうすると  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t) \equiv \xi < 0$  は有限か負の無限大である。 $L > 0$  を  $\xi < -L$  を満たす実数として、

$$\exists T, \quad T < \forall t, \quad \xi \leq \dot{x}(t) < -L. \quad (4.3)$$

が成り立つ。この不等式の両辺を積分して、

$$x(t) - x(T) < -L(t - T) \quad (T < t). \quad (4.4)$$

これは十分大きい  $t$  に対して  $x(t)$  は負であることを意味するが、それは  $x(t) > 0$  の仮定に反する。

(4.2) が不可能であることの証明 もしこれが可能なら、 $x$  は正で、永久に単調増加する。したがって  $\ddot{x} = -2xy^2 \leq 0$  であり  $\dot{x}$  は減少する。 $\dot{x}$  は正のままとどまるので  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t) \equiv \xi$  が存在し  $0 \leq \xi < \sqrt{2E}$  でなければならない。 $y(t)$  は  $y = 0$  の周りを振動する。 $t_n$  と  $T_n$  を次を満たす時刻とする。

$$t_0 < T_0 < t_1 < T_1 < t_2 < T_2 < \dots, \quad (4.5)$$

$$y(t_n) = 0, \quad \dot{y}(T_n) = 0, \quad (4.6)$$

$$t_{2n} < \forall t < t_{2n+1}, y(t) > 0, \quad \text{and} \quad t_{2n+1} < \forall t < t_{2n+2}, y(t) < 0. \quad (4.7)$$

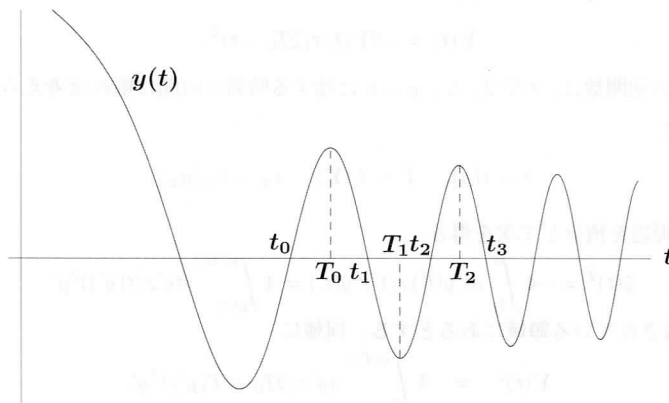


図 1:  $y(t)$

(図1を見よ。)  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$  であることに注意せよ。十分に大きい  $t_0$  をとれば、 $t > t_0$  で、ある定数  $c$  と十分小さい固定された正の実数  $\epsilon$  に対し、

$$\xi \leq \dot{x}(t) < \xi + \epsilon, \tag{4.8}$$

$$0 < \xi t + c < x(t) < \xi t + c + \epsilon, \tag{4.9}$$

である。(図2を見よ。)

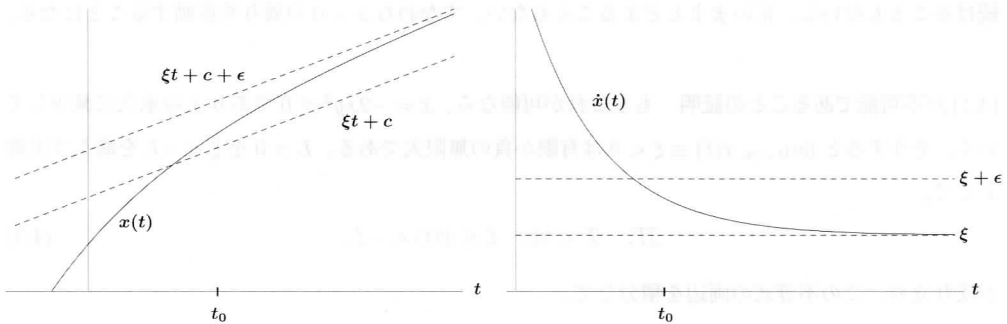


図 2:  $x(t)$  と  $\dot{x}(t)$

$t_1 - t_0$  を評価するためいくつかの補助関数を定義する。 $y_{\pm}(t)$  を  $t = T_0$  で  $y(t)$  と同じ条件  $y_{\pm}(T_0) = y(T_0)$ ,  $\dot{y}_{\pm}(T_0) = 0$  を満たし、さらに次の微分方程式を満たす関数とする。

$$\ddot{y}_+(t) = -2y_+(t)x(t_0)^2, \quad \ddot{y}_-(t) = -2y_-(t)x(t_1)^2, \tag{4.10}$$

これは  $y_+$  と  $y_-$  がそれぞれ周期  $\frac{\sqrt{2}\pi}{x(t_0)}$  と  $\frac{\sqrt{2}\pi}{x(t_1)}$  の調和振動をすることを意味する。

$$y_+(t) = y(T_0) \cos[\sqrt{2}x(t_0)(t - T_0)], \tag{4.11}$$

$$y_-(t) = y(T_0) \cos[\sqrt{2}x(t_1)(t - T_0)]. \tag{4.12}$$

$Y(t)$  を、 $t = T_0$  に鏡を置いて得られる  $y(t)$  の鏡像とする。すなわち  $Y(t) = y(2T_0 - t)$ 。そうすると  $Y(T_0) = y(T_0)$ ,  $\dot{Y}(T_0) = 0$  であり、

$$\ddot{Y}(t) = -2Y(t)x(2T_0 - t)^2. \tag{4.13}$$

$y(t), Y(t), y_{\pm}(t)$  の逆関数は、 $t$  が  $T_0$  と、 $y = 0$  に達する時刻との間に限れば考えられる。それらを以下のように記す。

$$t = t(y), \quad T = T(Y), \quad t_{\pm} = t_{\pm}(y_{\pm}). \tag{4.14}$$

$\ddot{y}y = -2yx^2\dot{y}$  の両辺を積分して次を得る。

$$\dot{y}(t)^2 = -4 \int_{T_0}^t dt' y(t') x(t')^2 \dot{y}(t') = 4 \int_{y(t)}^{y(T_0)} dy' x(t(y'))^2 y'. \tag{4.15}$$

$t$  は (4.14) が定義されている領域にあるとする。同様に

$$\dot{Y}(t)^2 = 4 \int_{Y(t)}^{Y(T_0)} dy' x(2T_0 - T(y'))^2 y', \tag{4.16}$$

$$\dot{y}_+(t)^2 = 4 \int_{y_+(t)}^{y_+(T_0)} dy' x(t_0)^2 y', \tag{4.17}$$

$$\dot{y}_-(t)^2 = 4 \int_{y_-(t)}^{y(T_0)} dy' x(t_1)^2 y'. \quad (4.18)$$

$x(t)^2$  は単調減少するので、 $y(t) = Y(T)$  を満たす  $t$  と  $T$  に対し、

$$\dot{y}(t)^2 - \dot{Y}(T)^2 = 4 \int_{y(t)}^{y(T_0)} dy' [x(t(y'))^2 - x(2T_0 - T(y'))^2] y' > 0, \quad (4.19)$$

したがって  $\dot{y}(t) < \dot{Y}(T) < 0$  である。 $y_{\pm}(t)$  に対する同様な議論から、 $y_-(t_-) = y(t) = Y(T) = y_+(t_+)$  に対して、

$$\dot{y}_-(t_-) < \dot{y}(t) < \dot{Y}(T) < \dot{y}_+(t_+) < 0, \quad (4.20)$$

これらから

$$t'_+(y) < T'(y) < t'(y) < t'_-(y) < 0, \quad (4.21)$$

ここでプライムは  $y$  についての微分を表す。これらの不等式を  $y$  から  $y(T_0)$  まで積分して

$$t_-(y) < t(y) < T(y) < t_+(y), \quad (4.22)$$

したがって

$$0 < y_-(t) < y(t) < Y(t) < y_+(t). \quad (4.23)$$

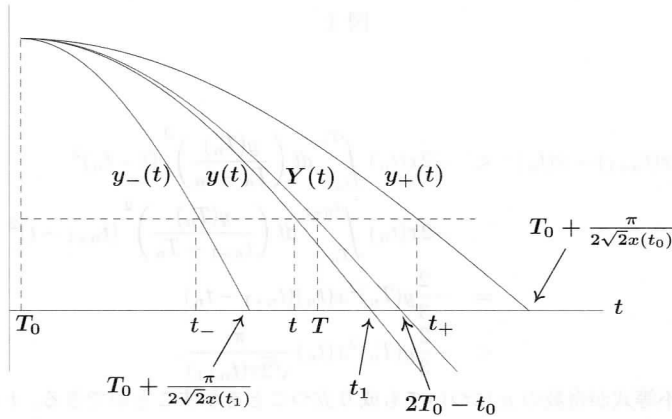


図 3:  $y(t)$ ,  $Y(t)$ ,  $y_+(t)$  と  $y_-(t)$

(図 3 を見よ。) こうして次を得る。

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2x(t_1)}} < t_1 - T_0 < T_0 - t_0 < \frac{\pi}{2\sqrt{2x(t_0)}}, \quad (4.24)$$

したがって

$$\frac{\pi}{\sqrt{2x(t_1)}} < t_1 - t_0 < \frac{\pi}{\sqrt{2x(t_0)}}. \quad (4.25)$$

同様の議論から

$$\frac{\pi}{\sqrt{2x(t_{n+1})}} < t_{n+1} - t_n < \frac{\pi}{\sqrt{2x(t_n)}}. \quad (4.26)$$

これらの不等式から、 $n$  が増加すれば  $t_{n+1} - t_n$  は減少することが直ちにわかる。

次に  $\dot{x}$  を評価しよう。 $\ddot{x} = -2y^2x < 0$  の両辺を積分して次を得る。

$$\dot{x}(t_{n+1}) - \dot{x}(t_n) = -2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} dt y(t)^2 x(t) < -2x(t_n) \int_{t_n}^{t_{n+1}} dt y(t)^2. \quad (4.27)$$

$n$  が偶数のときは、 $y$  は上に凸であるので、 $t_n < t < T_n$  では  $0 < \frac{y(T_n)}{T_n - t_n}(t - t_n) < y(t)$  であり、 $T_n < t < t_{n+1}$  では  $0 < \frac{y(T_n)}{t_{n+1} - T_n}(t_{n+1} - t) < y(t)$  である。(図4を見よ。)

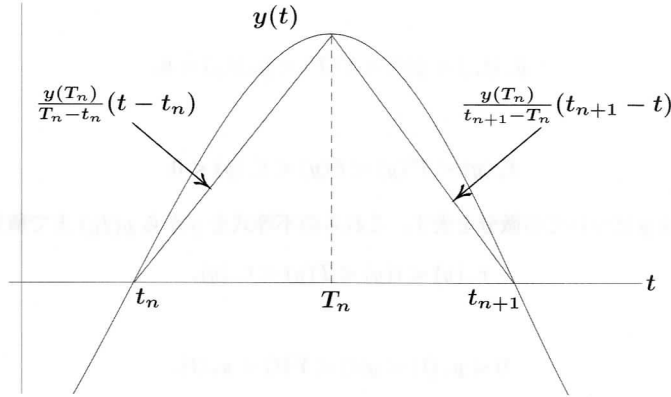


図 4:

したがって

$$\begin{aligned} \dot{x}(t_{n+1}) - \dot{x}(t_n) &< -2x(t_n) \int_{t_n}^{T_n} dt \left( \frac{y(T_n)}{T_n - t_n} \right)^2 (t - t_n)^2 \\ &\quad - 2x(t_n) \int_{T_n}^{t_{n+1}} dt \left( \frac{y(T_n)}{t_{n+1} - T_n} \right)^2 (t_{n+1} - t)^2 \\ &= -\frac{2}{3} y(T_n)^2 x(t_n) (t_{n+1} - t_n) \\ &< -\frac{2}{3} y(T_n)^2 x(t_n) \frac{\pi}{\sqrt{2}x(t_{n+1})}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

同様にこの不等式が奇数の  $n$  についても成り立つことを示すことができる。 $t = T_n$  での  $E$  は  $E = \frac{1}{2} \dot{x}(T_n)^2 + x(T_n)^2 y(T_n)^2$  で与えられ、

$$y(T_n)^2 = \frac{E - \frac{1}{2} \dot{x}(T_n)^2}{x(T_n)^2} > \frac{E - \frac{1}{2} (\xi + \epsilon)^2}{x(t_{n+1})^2}. \quad (4.29)$$

である。したがって

$$\begin{aligned} \dot{x}(t_{n+1}) - \dot{x}(t_n) &< -\frac{\sqrt{2}\pi}{3} \left[ E - \frac{1}{2} (\xi + \epsilon)^2 \right] \frac{x(t_n)}{x(t_{n+1})^3} \\ &< -\frac{\sqrt{2}\pi}{3} \left[ E - \frac{1}{2} (\xi + \epsilon)^2 \right] \frac{\xi t_n + c}{(\xi t_{n+1} + c + \epsilon)^3}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

この不等式の両辺の和をとると、

$$\dot{x}(t_{n+1}) - \dot{x}(t_0) < -\frac{\sqrt{2}\pi}{3} \left[ E - \frac{1}{2} (\xi + \epsilon)^2 \right] \sum_{m=0}^n \frac{\xi t_m + c}{(\xi t_{m+1} + c + \epsilon)^3}. \quad (4.31)$$

右辺の和

$$\sum_{m=0}^n \frac{\xi t_m + c}{(\xi t_{m+1} + c + \epsilon)^3} \quad (4.32)$$

が  $n \rightarrow \infty$  で発散することを以下で示そう。それを用いれば十分大きい  $n$  で  $\dot{x}(t_n) < 0$  であるがこれは  $\dot{x}(t) > 0$  の仮定に反する。以上で (4.2) の場合の不可能性の証明が完結する。

$\xi = 0$  に対しては (4.32) が発散することは明らかである。 $\xi > 0$  に対しては、(4.26) より、

$$t_{n+1} - t_n < \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{1}{\xi t_n + c}, \quad (4.33)$$

であり、

$$\frac{1}{\xi t_n + c} (t_{n+1} - t_n) < \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{1}{(\xi t_n + c)^2}. \quad (4.34)$$

この不等式の両辺の和をとると、左辺は次の積分で評価できる。(図5を見よ。):

$$\int_{t_0}^{t_{n+1}} dt \frac{1}{\xi t + c} < \sum_{m=0}^n \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{1}{(\xi t_m + c)^2}. \quad (4.35)$$

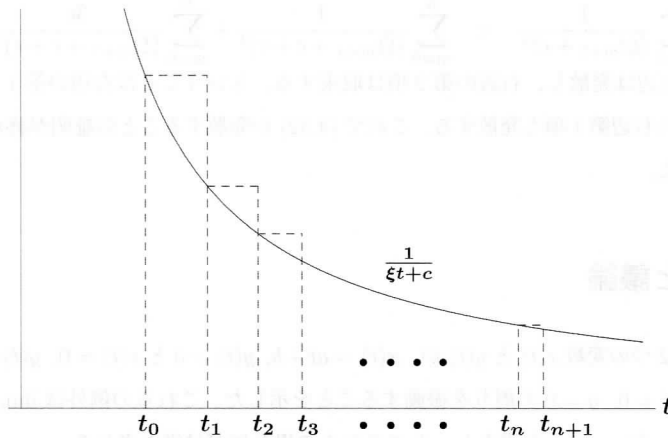


図 5:  $\sum_{m=0}^n \frac{1}{\xi t_m + c} (t_{m+1} - t_m)$  は  $\frac{1}{\xi t + c}$  の下側の面積より大きい。

この積分は容易に計算でき、次を得る。

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi \xi} \log \left( \frac{\xi t_{n+1} + c}{\xi t_0 + c} \right) < \sum_{m=0}^n \frac{1}{(\xi t_m + c)^2}. \quad (4.36)$$

極限  $n \rightarrow \infty$  をとると

$$\sum_{m=0}^n \frac{1}{(\xi t_m + c)^2} = \infty. \quad (4.37)$$

同様に (4.26) から

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{1}{\xi t_{n+1} + c + \epsilon} < t_{n+1} - t_n, \quad (4.38)$$

であり、

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{1}{(\xi t_{n+1} + c + \epsilon)^{N+1}} < \frac{1}{(\xi t_{n+1} + c + \epsilon)^N} (t_{n+1} - t_n). \quad (4.39)$$

$N > 1$  に対してこの不等式の両辺の和をとると

$$\sum_{m=0}^n \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{1}{(\xi t_{m+1} + c + \epsilon)^{N+1}} < \int_{t_0}^{t_{n+1}} dt \frac{1}{(\xi t + c + \epsilon)^N}$$

$$= \frac{1}{(N-1)\xi} \left[ \frac{1}{(\xi t_0 + c + \epsilon)^{N-1}} - \frac{1}{(\xi t_{n+1} + c + \epsilon)^{N-1}} \right] \quad (4.40)$$

極限  $n \rightarrow \infty$  で上の最後の表現は収束し、それゆえ左辺の和  $\sum_{m=0}^n \frac{1}{(\xi t_{m+1} + c + \epsilon)^{N+1}}$  は収束する。

したがって (4.32) は次のように評価される。

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^n \frac{\xi t_m + c}{(\xi t_{m+1} + c + \epsilon)^3} &= \sum_{m=0}^n \frac{1}{(\xi t_{m+1} + c + \epsilon)^2} - \sum_{m=0}^n \frac{\xi(t_{m+1} - t_m) + \epsilon}{(\xi t_{m+1} + c + \epsilon)^3} \\ &> \sum_{m=0}^n \frac{1}{(\xi t_{m+1} + c + \epsilon)^2} - \sum_{m=0}^n \frac{\xi(t_1 - t_0) + \epsilon}{(\xi t_{m+1} + c + \epsilon)^3}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

上の最後の表現の第2項は  $n \rightarrow \infty$  で収束する。第1項については、

$$\frac{1}{(1-z)^2} < 1 + 3z \quad (0 < z \ll 1), \quad (4.42)$$

に注意すれば次を得る。

$$\sum_{m=0}^n \frac{1}{(\xi t_{m+1} + c)^2} < \sum_{m=0}^n \frac{1}{(\xi t_{m+1} + c + \epsilon)^2} + \sum_{m=0}^n \frac{3\epsilon}{(\xi t_{m+1} + c + \epsilon)^3}. \quad (4.43)$$

極限  $n \rightarrow \infty$  で左辺は発散し、右辺の第2項は収束する。ということは右辺の第1項は発散し、したがって (4.41) の右辺第1項も発散する。これで (4.32) が発散することの証明が終わり、(4.2) の不可能性が示された。

## 5 まとめと議論

$x^2y^2$  モデルの2つの変数  $x(t)$  と  $y(t)$  が、 $x(t) = at + b$ ,  $y(t) = 0$  と  $x(t) = 0$ ,  $y(t) = at + b$  の場合を除いて、原点  $x = 0$ ,  $y = 0$  の周りを振動することを示した。これらの例外は  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \pm\infty$  あるいは  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \pm\infty$  を満たし、かつこれらの場合にだけ満たされる。

$x(t)$  と  $y(t)$  は通常は永久に増加したり減少したりすることはないのではあるが、振動を繰り返すうちに振動の振幅がどんどん大きくなるという可能性は排除できていない。量子論的には、超対称な場合では規格化不可能なエネルギー固有状態は漸近的には平坦方向に沿った平面波であることが知られており [1]、(2.7) に対応している。さらに規格化可能な固有状態は原点  $x = 0$ ,  $y = 0$  の周りに局在しなければならず、そのためもし振動が増大していく解があったとしても、量子論的なスペクトラムの構造に影響を与えることはないと考えられる。

本稿の結果の拡張の方向性として、(9+1)D 超対称ゲージ理論から得られる M2 膜行列模型、あるいはより次元の低い超対称ゲージ理論から得られる行列模型で、ここで示したことと同様なことが成り立つかどうか調べるのは有意義であると思われる。

## 参考文献

- [1] B. de Wit, M. Luscher and H. Nicolai, "The Supermembrane Is Unstable", Nucl. Phys. **B320** (1989) 135.

- [2] B. de Wit, J. Hoppe and H. Nicolai, “*On the quantum mechanics of supermembranes*”, *Nucl. Phys.* **B305** (1988) 545.