# Dixit and Nalebuff（1991）の三者決闘ゲームに関する考察：条件付き一般化の数値例

王　鏡凱[1]・楊　楽[2]・張　峰[3]

## 1．はじめに

本研究は Dixit and Nalebuff（1991）の三者決闘ゲームについて考察するものである．本研究の主な貢献は，王・江（2017b）の条件付き一般化についてエクセルによるシミュレーションより，プレイヤー（A・B）の命中率（p，q）に基づき４つのケース分けにしたこと，そして４つのケースに対応する数値例を与え，その意味を考察したことである．

三者決闘ゲームについては，Dixit and Nalebuff（1991）では先読み推論法を用いて考察されており，王・江（2017a, b）ではバックワード・インダクションの手法を用いて考察されている．王・江（2017a）では Dixit and Nalebuff（1991）の数値例に基づき，バックワード・インダクションの手法を用いて考察されている．

王・江（2017b）ではバックワード・インダクションの手法を用いるだけでなく，三者決闘ゲームをより一般的な比較分析ができるように条件付き一般化した．条件付き一般化とは，最後のプレイヤー C の命中率だけを固定するという条件の下でその他の２人のプレイヤー（A・B）の命中率（p，q）について，$(0 < p < q < 1)$ を制約条件として三者決闘ゲームを一般化することである．王・江（2017b）の条件付き一般化の分析結果では Dixit and Nalebuff（1991）になかった最適戦略も見つけた．三者決闘ゲームにおいて各プレイヤーの生き残るための最適戦略は，各プレイヤーの命中率の絶対的な大小関係だけでなく，相対的な大小関係にも影響を受ける．Dixit and Nalebuff（1991）になかった最適戦略を発見できたことは，王・江（2017b）の貢献と言える．

しかし，王・江（2017b）の条件付き一般化の成果を数値例で示していなかったことから，プレイヤー A の意思決定に関する解釈が必ずしも明瞭ではない．そこで，本研究ではエクセルによるシミュレーションより，王・江（2017b）の条件付き一般化について，プレイヤー（A・B）の命中率（p，q）に基づき４つのケース分けにした．そして４つのケースに対応する数値例を与え，その意味を考察した．

本研究の構成は以下の通りである．まず第２節では Dixit and Nalebuff（1991）の三者決闘ゲームについて説明する．そして，第３節では Dixit and Nalebuff（1991）に基づき先読み手法による解き方を

1　鹿児島大学・准教授，本論文についての責任はすべて第一著者である王鏡凱に帰する．
E-mail: kyogaiw@leh.kagoshima-u.ac.jp
2　China Construction Bank
3　Taishan Medical University

説明する．第４節では王・江(2017b)に基づきバックワード・インダクションによるゲームの一般化を説明する．第５節ではエクセルのシミュレーションによる４つのケース分けとそれに対応する数値例を考察する．最後に全体をまとめる．

## ２．Dixit and Nalebuff（1991）の三者決闘ゲームについて

ここでは Dixit and Nalebuff(1991，p.292)に基づき三者決闘ゲームについて説明する．プレイヤーは３人，ラリー・モー・カリー(ここでは A・B・C と呼ぶ)が２ラウンド制の逐次ゲームとして，A→B→C の順に１発ずつ撃つことになっている．

各プレイヤーの戦略は２つしかなく，相手を撃つかまたはわざと外すかである．相手を撃つと決めた場合，３人の命中率はそれぞれ{A : B : C = 30% : 80% : 100%}となっている．

各プレイヤーにとっての最善の結果は，自分だけが生き残ることである．次によいのは２人が生き残り，そのうちの１人になることである．３番目によいのは３人全員が生き残ることである．最悪なのは自分だけが殺されることである．以上のルールの下でプレイヤー A の生存確率を最大にする最適戦略とは何かについて求める問題である．

問題を解く前に各プレイヤーの目的関数，特にプレイヤー A の目的関数について説明する[4]．モデルの設定上，生き残り方によって各プレイヤーの選好順序があることは明らかである．本論文では各プレイヤーの目的関数，特にプレイヤー A の目的関数は自分の生存確率の最大化である．Dixit and Nalebuff(1991)では生き残り方によって各プレイヤーの選好順序があることは確かである．この選好の順序だけでは目的関数または期待効用に影響するか否かについての議論を回避するためにも，各プレイヤーの目的関数はあくまで自分の生存確率の最大化と仮定している．

また，この選好の順序は２ラウンド制の逐次ゲームのルール(制約条件)として必要不可欠である．なぜなら，このような選好の順序を仮定しないと，共謀が排除できないからである．各プレイヤーの目的関数は生存確率の最大化だけであれば，選好の順序を仮定せず，単に n ラウンド制の逐次ゲームをやっても，全員が空砲またはわざと外すことで，確率１で全員が生き残れる．このような共謀行為は本研究におけるゲームの性質と異なるものであり，本論文は Dixit and Nalebuff(1991)に倣い，共謀の可能性を排除し，生存確率が最大となる A の戦略を求める．

## ３．先読み手法による解き方：Dixit and Nalebuff（1991，p.292を参照）

ここでは先読み手法で A の選択肢を個々に検討する．もし A が B を狙い命中させたら，その次は A 自身がやられてしまう．なぜなら次は C の番になり，彼は A を確実に撃ち当て最善の結果に

---

[4] 久留米大学の野崎竜太郎先生から以下のご指摘をいただいた．プレイヤー A の目的関数を生存確率だけにするか，それとも各プレイヤーの生き残り方に基づく期待効用関数にするかについては，本文中に明示されるべきである．ここに記して感謝したい．

至る．だから A にとって B を狙うのはいい選択肢ではない．

次にもし A が C を狙い命中させたら次は B の番となり，B は A を狙うことになる．そうなると，A 自身の生き残れる確率は20% 以下となる．だからこれもあまり魅力のある選択肢ではない．

A の最適行動は第 1 ラウンドではわざと空に向けて撃つことで外す，そして第 2 ラウンドでは B か C の生き残ったほうを狙うことである．第 1 ラウンドで A がわざと外した場合，B は C を狙い，もし失敗しても C が B を撃ち当てる．第 2 ラウンドに入り，再び A の番となる．A は B か C の生き残ったほうを狙えば，30% 以上の確率で A は唯一の生き残りとなる．

三者決闘ゲームから得られる教訓としては，小物(A)がスターになるには最初のチャンスは見送ったほうがよい場合がある．ライバルが多数いるときは，トップを走っている者は 2 番手以降から集中攻撃を受け，潰されることがある．こういう状況では，実力者(B と C)が互いに潰し合うまでは小物(A)が後方に控えておくほうが得である．

## 4．王・江（2017b)：条件付き一般化

ここでは王・江(2017b)を参照しながらバックワード・インダクションによる一般化結果を説明する．条件付き一般化する前に 3 人の命中率については，$\{A : B : C = p : q : 1\}$ かつ $(0 < p < q < 1)$ として仮定する．

### 4.1．第 2 段階のゲーム

まずは第 2 段階について考える．C の命中率は確率 1 であることに注目して，第 1 段階のゲーム終了時点において生き残ったプレイヤーは {A・B} ペアかまたは {A・C} ペアのはずである[5]．プレイヤーが 2 人の場合は，わざと外すことは最適戦略ではなく，互いに順番に 1 発ずつ撃つことは最適戦略である．

そして，この第 2 段階のゲームの結果は各プレイヤーの命中率によって一意的に決まる．生き残ったプレイヤーは {A・B} ペアの場合は考えられる結果は以下の 3 つである．

結果①：$p$ の確率(A→B)で A だけ生き残り，そしてゲーム終了；

結果②：$q(1-p)$ の確率(A→B→A)で B だけ生き残り，そしてゲーム終了；

結果③：$(1-p)(1-q)$ の確率(A→B→A)で A・B ともに生き残り，そしてゲーム終了．

[5] C の命中率は 1 のため，もし第 1 段階に C の出番があれば，C が取れる行動は(わざと外す)，(C→A)，(C→B)の 3 通りしかない．そして，(わざと外す)と(C→A)の選択は(C→B)よりも劣ることについては4.2.1節で詳細に説明してあり，参照されたい．したがって，第1段階において生き残ったプレイヤー {A・B} ペアかまたは {A・C} ペアである．

また，生き残ったプレイヤーは{A・C}ペアの場合は考えられる結果は以下の２つである．

結果④：p の確率(A→C)で A だけ生き残り，そしてゲーム終了；
結果⑤：(1－p)の確率(A→C→A)で C だけ生き残り，そしてゲーム終了．

ここではもし第１段階のゲーム終了時点において生き残ったプレイヤーは{B・C}ペアの場合，考えられる結果は２つである．q の確率(B→C)で B だけ生き残り，そしてゲーム終了する．または(1－q)の確率(B→C→B)で C だけ生き残り，そしてゲーム終了する．C の命中率は１であるにもかかわらず B を撃たないことは C の合理性に反する．つまり，第１段階のゲーム終了時点において B と C は同時に生き残れない．したがって第１段階のゲーム終了時点において生き残ったプレイヤーが{B・C}ペアの場合はオフ・パスであることが分かる．

同じくもし第１段階のゲーム終了時点において生き残ったプレイヤーは{A・B・C}全員の場合，B と C は同時に生き残れない性質は変わらないから，{A・B・C}の場合もオフ・パスである．詳細の説明については4.2.1節を参照されたい．

### 4.2. 第１段階のゲーム

#### 4.2.1. C の行動について

バックワード・インダクションにしたがって，第１段階のゲームについて考察する．まずは A→B→C の順で C について考える．第１段階のゲームにおいて A→B→C の順で A→B がそれぞれ一発を撃ち，誰に向けて発砲したのか結果はともかく，C が撃たれて退場すればそれまでのことである．もし C が生き残っていれば，考えられるすべての結果は，⑥{A・C}が生き残っているケース，⑦{B・C}が生き残っているケース，⑧{A・B・C}全員が生き残っているケース，の３通りである．

結果⑥：もし{A・C}が生き残っており，かつ今は C の出番とすれば，１の確率(C→A)で C だけ生き残り，そしてゲーム終了；
結果⑦：もし{B・C}が生き残っており，かつ今は C の出番とすれば，１の確率(C→B)で C だけ生き残り，そしてゲーム終了；
結果⑧：もし{A・B・C}全員が生き残っており，かつ今は C の出番とすれば，１の確率(C→B)で{A・C}が生き残ったまま第２段階のゲームに入ることになる．

結果⑧について，もし{A・B・C}全員が生き残っており，かつ今は C の出番とすれば，C が取れる行動は(わざと外す)(C→A)(C→B)の３通りしかない．C が(わざと外す)を選んだ場合，{A・B・C}全員が生き残ったまま第２段階のゲームに入ることになる．これは各プレイヤーの選好に矛

盾するので，(C→A)または(C→B)よりも劣る戦略である[6]．C が(C→A)を選んだ場合，{B・C}が生き残ったまま第２段階のゲームに入ることになる．そして C の生存確率は(1－q)となる．一方，C が(C→B)を選んだ場合，{A・C}が生き残ったまま第２段階のゲームに入ることになる．そして C の生存確率は(1－p)となる．命中率の大小関係から，C にとって{A・C}が生き残ったまま第２段階のゲームに入る方は{B・C}が生き残ったまま第２段階のゲームに入る方よりも望ましい．

### 4.2.2. B の行動について

次に A→B→C の順で B について考える．第１段階のゲームにおいて A→B→C の順で A が一発を撃ち，誰に向けて発砲したのか結果はともかく，B が撃たれて退場すればそれまでのことである．もし B が生き残っていれば，考えられるすべての結果は，⑨{A・B}が生き残っているケースと⑩{A・B・C}全員が生き残っているケースの２通りである．

結果⑨：もし{A・B}が生き残っており，かつ今は B の出番とすれば，q の確率(B→A)で B だけが生き残り，そしてゲーム終了する．または(１－q)の確率(B→A)で外れて{A・B}２人が生き残ったまま第２段階のゲームに入ることになり，結果①②③のどれかになる．

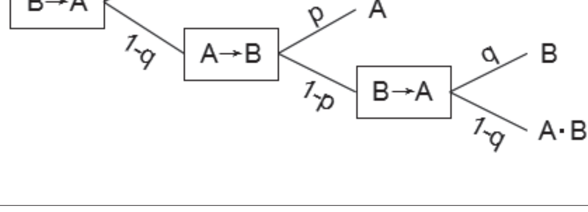
もし B が(わざと外す)を選んだ場合，{A・B}が生き残ったまま第２段階のゲームに入ることになる．これはプレイヤー B が自分の生存確率のうち q だけを諦めることと同じなので，目的関数の最大化に反する．したがって結果⑨において B の最適行動は(B→A)である．

後の説明を簡単にするため，第１段階の(B→A)から始まり第２段階の最後までのサブゲーム(結果⑨)をゲーム h と呼ぶ(図１を参照)．

ゲーム h において A の生存確率を Ph(A)とする．結果⑨より，Ph(A)の計算結果は以下の通りである．

$$\mathrm{Ph}(\mathrm{A}) = (1-q)\,[\mathrm{P}(\text{結果①}) + \mathrm{P}(\text{結果③})] = p(1-q) + (1-p)(1-q)2$$

**図１：サブゲーム h**



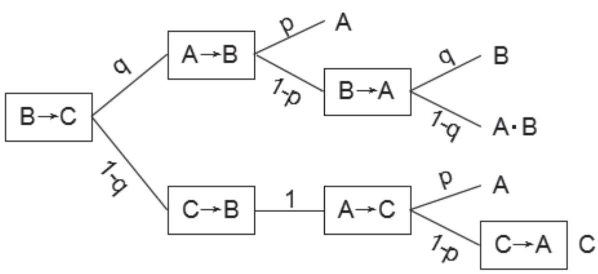

[6] 各プレイヤーにとっての最善の結果は，自分だけが生き残ることである．次によいのは２人が生き残り，そのうちの１人になることである．３番目によいのは３人全員が生き残ることである．最悪なのは自分だけが殺されることである．

結果⑩：もし{A・B・C}が生き残っており，かつ今はBの出番とすれば，qの確率(B→C)で{A・B}が生き残ったまま第2段階のゲームに入ることになり，結果①②③のどれかになる．または(1－q)の確率(B→C)で外れてCの出番となり，そして結果⑧より，1の確率(C→B)でBが消えて{A・C}が生き残ったまま第2段階のゲームに入ることになり，結果④⑤のどれかになる．

もし，結果⑩においてBが(B→C)以外の行動を選択すれば，結果⑦⑧より，1の確率(C→B)でBが消えるので，Bにとっては最適な行動ではない．したがって結果⑩においてBの最適行動は(B→C)である．

後の説明を簡単にするため，第1段階の(B→C)から始まり第2段階の最後の結果①②③④⑤までのサブゲーム(結果⑩)をゲームgと呼ぶ(図2を参照)．

**図2：サブゲームg**




ゲームgにおいてAの生存確率をPg(A)とする．結果⑩および結果①②③④⑤より，Pg(A)の計算結果は以下の通りである．

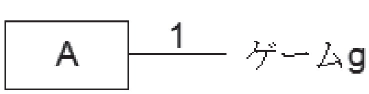
$$Pg(A)=q\,[P(\text{結果①})+P(\text{結果③})]+(1-q)P(\text{結果④})=p+q(1-p)(1-q)$$

### 4.2.3. Aの行動について

最後にA→B→Cの順でAの出番となった場合，Aの最適行動について考える．この場合は考えられる結果は⑫{A・B・C}全員が生き残っているケースのみである．この場合のAの行動集合は{わざと外す，A→B，A→C}である．

もしAが{わざと外す}を選んだ場合，三者決闘ゲームは図3のようにサブゲームgと同じになる．Aの意思決定問題は実質的に結果⑩(サブゲームg)を1の確率でプレイすることである．

**図3：Aがわざと外した場合のサブゲームによる表現**



もしAが{A→B}を選んだ場合，三者決闘ゲームは図4のようになる．Aの意思決定問題は実質的にpと(1－p)の確率で結果⑥と結果⑩(サブゲームg)からなるサブゲームをプレイすることである．

**図4：{A→B} の場合のサブゲームによる表現**

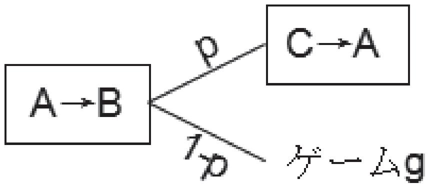



図4から分かるように，三者決闘ゲームにおいてAの意思決定問題は実質的にpと(1－p)の確率で結果⑥と結果⑩(サブゲームg)からなるサブゲームをプレイすることである．しかし，結果⑥においてAの生存確率は0なので，明らかにサブゲームgの生存確率Pg(A)よりも低い．したがってAにとっては，pと(1－p)の確率で結果⑥と結果⑩(サブゲームg)からなるサブゲームをプレイすることは最適な戦略ではない．それよりもAが{わざと外す}を選び，図3のようにサブゲームgを1の確率でプレイしたほうが合理的である．

もしAが{A→C}を選んだ場合，三者決闘ゲームは図5のようになる．Aの意思決定問題は実質的にpと(1－p)の確率で結果⑨(サブゲームh)と結果⑩(サブゲームg)からなるサブゲームをプレイすることである．

**図5：{A→C} の場合のサブゲームによる表現**

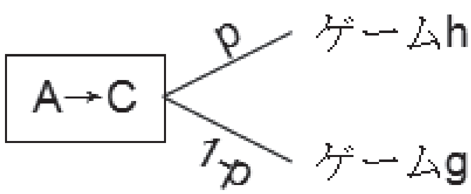



図5から分かるように，三者決闘ゲームにおいてAの意思決定問題は実質的にpと(1－p)の確率で結果⑨(サブゲームh)と結果⑩(サブゲームg)からなるサブゲームをプレイすることである．しかし，結果⑨(サブゲームh)におけるAの生存確率Ph(A)と結果⑩(サブゲームg)におけるAの生存確率Pg(A)の大小関係については，$Ph(A) > Pg(A)$の場合と$Ph(A) \leq Pg(A)$の場合がある．

$Ph(A) \leq Pg(A)$の場合，Dixit and Nalebuff (1991, p.292)と王・江(2017a)の分析と同じ結論になる．つまりAにとっては，pと(1－p)の確率で結果⑨(サブゲームh)と結果⑩(サブゲームg)からなるサブゲームをプレイすることは最適戦略ではない．それよりもAが{わざと外す}を選び，図3のようにサブゲームgを1の確率でプレイしたほうが合理的である．

$Ph(A) \leq Pg(A)$の条件は$pq \geq (1-p)(1-q)(1-2q)$であり，pとqが極めて小さな数値でない限りこの条件は満たされる．一方，$Ph(A) > Pg(A)$の条件は$pq < (1-p)(1-q)(1-2q)$であり，pとqが極めて小さな数値ならこの条件は満たされる．

$Ph(A) > Pg(A)$の場合，これはDixit and Nalebuff(1991, p.292)と王・江(2017a)の分析になかったケースであり，本研究の条件付き一般化による成果である．このケースではAにとっては，pと(1−p)の確率で結果⑨(サブゲームh)と結果⑩(サブゲームg)からなるサブゲームをプレイすることは最適戦略である．Aが{わざと外す}を選び，図３のようにサブゲームgを１の確率でプレイすることは合理的ではない．

Aの意思決定における最適戦略は以下の２つのケースによってまとめられる．$Ph(A) \leq Pg(A)$なら，つまり条件$pq \geq (1-p)(1-q)(1-2q)$が成立する場合，Aの最適戦略は結果⑩(サブゲームg)を１の確率でプレイする．$Ph(A) > Pg(A)$なら，つまり条件$pq < (1-p)(1-q)(1-2q)$が成立する場合，Aの最適戦略はpと(1−p)の確率で結果⑨(サブゲームh)と結果⑩(サブゲームg)からなるサブゲームをプレイすることである．

## ５．ケース分けと数値例

エクセルによるシミュレーションの結果，プレイヤー(A・B)の命中率(p, q)の範囲によって４つのケースに分けることができる．

１つ目は$1/2 \leq q < 1$のケースであり，$Pg(A) > Ph(A)$である．
２つ目は$0.353 < p < q < 1/2$のケースであり，$Pg(A) > Ph(A)$である．
３つ目は$0 < p < 0.353 < q < 1/2$のケースであり，$Pg(A) \geq Ph(A)$と$Pg(A) < Ph(A)$の両方である．
４つ目は$0 < p < q < 0.353$のケースであり，$Pg(A) < Ph(A)$である．

### 5.1. $1/2 \leq q < 1$のケース，Dixit and Nalebuff（1991）の数値例：{A : B : C = 0.3 : 0.8 : 1}

{A : B : C = 0.3 : 0.8 : 1}に基づいて計算すると，$Pg(A) = 0.412 > Ph(A) = 0.088$なので，Aの最適戦略はサブゲームgを１の確率でプレイする(空砲を撃つ)ことである．また，このケースでは$0 < p < q$かつ$1 > q \geq 1/2$である限り，すべてのpとqについて成立する．$q \geq 1/2$が高い命中率のため，AはBとCを同一視し，BとCの両方に協力できず，空砲を選んだのである．

### 5.2. $0.353 < p < q < 1/2$のケース：{A : B : C = 0.4 : 0.45 : 1}

{A : B : C = 0.4 : 0.45 : 1}に基づいて計算すると，$Pg(A) = 0.5485 > Ph(A) = 0.4015$なので，Aの最適戦略は空砲を撃つことである．pとqは(0.353, 0.5)の狭い範囲の中にあるという意味では相対的な距離が近い．pは0.353を超える高い命中率であることにより，AとBの緊張関係をもたらした結果として，Aが空砲を選んだのである．5.1節に近い特徴を持つ．

### 5.3. $p < 0.353 < q < 1/2$のケース：{ A : B : C ＝ 0.3 : 0.4 : 1 }，{ A : B : C ＝ 0.2: 0.4 : 1 }

{A : B : C = 0.3 : 0.4 : 1}に基づいて計算すると，Pg(A) = 0.468 > Ph(A) = 0.432なので，A の最適戦略は空砲を撃つことである．p と q は(0.353, 0.5)の範囲内にはないものの，ある意味では相対的な距離が近いこと，p は0.353を超えなくても5.2節に近い性質，A と B の緊張関係を保存していると考えられる．そのため A が空砲を選んだのである．

一方，{A : B : C = 0.2: 0.4 : 1}に基づいて計算すると，Pg(A) = 0.392 < Ph(A) = 0.408なので，A の最適戦略は空砲を撃つことではなく，B と協力して C を撃つことである．p と q は(0.353, 0.5)の範囲内にはないので，ある意味では相対的な距離が遠い．しかし，q は0.353を超えても5.4節に近い性質，A の命中率が低いと考えられる．そのため A は将来(第２段階のゲームで)B と対決する心配よりも，C と対決した際に A 自身の命中率の低さの方をはるかに心配なので，今のうち(第１段階のゲームで)A が B と協力して C を撃つことにしたのである．

### 5.4. $p < q \leq 0.353$のケース：{ A : B : C ＝ 0.3 : 0.35 : 1 }

{A : B : C = 0.3: 0.35 : 1}に基づいて計算すると，Pg(A) = 0.45925 < Ph(A) = 0.49075なので，A の最適戦略は空砲を撃つことではなく，B と協力して C を撃つことである．p と q は(0, 0.353] の範囲内にあるので，相対的な距離が近いだけでなく，p と q はともに低い命中率である．そのため A は将来(第２段階のゲームで)B と対決する心配よりも，C と対決した際に A 自身の命中率の低さの方をはるかに心配なので，今のうち(第１段階のゲームで)A が B と協力して C を撃つことにしたのである．

## ６．まとめ

本研究は Dixit and Nalebuff(1991)の三者決闘ゲームについて考察するものである．本研究の主な貢献は，王・江(2017b)の条件付き一般化についてエクセルによるシミュレーションより，プレイヤー(A・B)の命中率(p，q)に基づき４つのケース分けにしたこと，そして４つのケースに対応する数値例を与え，その意味を考察したことである．

## 参考文献

Avinash Dixit and Barry Nalebuff（1991）, Thinking Strategically: Competitive Edge in Business, Politics and Everyday Life, WW Norton & Co.（菅野隆，嶋津祐一　訳［1991］,「戦略的思考とは何か―エール大学式『ゲーム理論』の発想法」，TBS ブリタニカ）

王鏡凱・江駿(2017a)，「Dixit and Nalebuff（1991）の三者決闘ゲームに関する考察：数値例を中心に」鹿児島大学法文学部『経済学論集』88，21-29.

王鏡凱・江駿(2017b)，「Dixit and Nalebuff（1991）の三者決闘ゲームに関する考察：条件付き一般化」『九州地区国立大学教育系・文系研究論文集』，第5巻第1号，No.23，pp.1-11.