一定熱流で加熱される土壌の過渡的温度変化

二 ノ 方 兼 武

Transient Temperature Variation of Soil heated by Constant Thermal Current

Kanetake NINOKATA

(*Laboratory of Agricultural Electricity*)

緒 言

物理的状態を一定にした土壌に一定電力を供給し熱流を一定にして加熱したときの熱伝導の計算は，熱と電気との相似性を利用して集中4定数回路を用いれば簡単にすることができるが，従来あまり関心をもたれていなかつた．

この計算は電熱温床，育苗器，土壌殺菌等における熱経済等を検討するための基礎を得るために行つたものである．

熱流並びに温度の過渡特性

被熱物の土壌中に熱線を入れ，これを保温壁で囲んで一定熱流を供給するときは，Fig. 1 のような集中定数回路に直流電流を流した場合と全く同様になる．

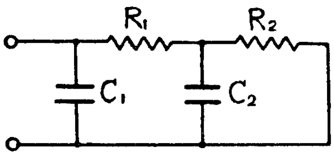

Fig. 1 Equivalent concentrated constant circuit

今土壌の熱容量を $C_1[J/^\circ C]$，熱抵抗を $R_1[^\circ C/W]$，保温壁の熱容量を $C_2[J/^\circ C]$，熱抵抗を $R_2[^\circ C/W]$，土壌を温めるための熱流を $i_1[W]$，保温壁を温めるための熱流を $i_2[W]$，外部に逃げる熱流を $i_3[W]$，土壌の温度を $\theta_1[^\circ C]$，土壌中に蓄えられる熱量を $q_1[J]$，保温壁の温度を $\theta_2[^\circ C]$，保温壁中に蓄えられる熱量を $q_2[J]$，時間を $t[s]$ とすれば

$$\theta_1=\frac{\int i_1dt}{C_1} \cdots\cdots (1) \qquad \theta_2=\frac{\int i_2dt}{C_2}\cdots\cdots(2)$$

$$\theta_1=R_1(i_2+i_3)+R_2i_3\cdots\cdots(3) \qquad \theta_2=i_3R_2 \cdots\cdots(4)$$

$$I=i_1+i_2+i_3\cdots\cdots (5)$$

保温壁が2重以上のときは，それぞれの保温壁が直列に連つたことになるが，これらは等価的に一つの熱容量 C_2，熱抵抗 R_2 で表わすことができる．又表面熱抵抗を考慮に入れる必要があるときは，これを R_2 の中に含ませて考えることができる．

以上の5式より

$$R_1\frac{d^2q_1}{dt^2}+\left(\frac{R_1+R_2}{C_2R_2}+\frac{1}{C_1}\right)\frac{dq_1}{dt}+\frac{1}{C_1C_2R_2}q_1=\frac{R_1+R_2}{C_2R_2}I\cdots\cdots(6)$$

のような t を変数とする関数 q_1 についての定数係数線形微分方程式が得られる．但し $q_1=\int i_1dt$ である．簡単のために

$$a_2=R_1,\ a_1=\frac{R_1+R_2}{C_2R_2}+\frac{1}{C_1},\ a_0=\frac{1}{C_1C_2R_2},\ b=\frac{R_1+R_2}{C_2R_2}$$

とすれば式 (6) は次のようになる.

$$a_2\frac{d^2q_1}{dt^2}+a_1\frac{dq_1}{dt}+a_0q_1=bI \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6')$$

今 $q_1(t)$ に対応する p 関数を $Q(p)$ とすれば

$$Q_1(p)\cdot\mathbf{1}=q_1(t)\mathbf{1}$$

$$\{-pq_1(0)+pQ_1(p)\}\cdot\mathbf{1}=\frac{dq_1}{dt}\mathbf{1}$$

$$\{-pq_1'(0)-p^2q_1(0)+p^2Q_1(p)\}\cdot\mathbf{1}=\frac{d^2q_1}{dt^2}\mathbf{1}$$

ここに $q_1'(0)=\left(\dfrac{dq_1}{dt}\right)_{t=0}$

これらの値を式 (6′) に用いて

$$a_2\{-pq_1'(0)-p^2q_1(0)+p^2Q_1(p)\}+a_1\{-pq_1(0)+pQ_1(p)\}+a_0\{Q_1(p)\}=bI$$

書きかえると

$$(a_2p^2+a_1p+a_0)Q_1(p)=(a_2p^2+a_1p)q_1(0)+a_2pq_1'(0)+bI$$

初期条件 $q_1(0)=0,\ q_1'(0)=\left(\dfrac{dq_1}{dt}\right)_{t=0}=(i_1)_{t=0}=I$ を入れると

$$Q_1(p)=\frac{p+\dfrac{b}{a_2}}{p^2+\dfrac{a_1}{a_2}p+\dfrac{a_0}{a_2}}I$$

$i_1(t)$ に対応する p 関数を $I_1(p)$ とすれば, $I_1(p)\cdot\mathbf{1}=i_1(t)\mathbf{1}$ であり, かつ $i_1(t)=\dfrac{dq_1}{dt}$ であるから

$$I_1(p)=p\{Q_1(p)-q_1(0)\}$$

しかるに $q_1(0)=0$ であるから

$$I_1(p)=pQ_1(p)$$

Heaviside の展開定理を用いるため

$$\left.\begin{aligned}
&I_1(p)=\frac{p^2+\dfrac{b}{a_2}p}{(p-p_1)(p-p_2)}I=\frac{M(p)}{N(p)}I \text{ とおけば}\\
&M(p)=p^2+\frac{b}{a_2}p,\quad N(p)=(p-p_1)(p-p_2)\\
&p_1=-\frac{a_1}{2a_2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a_1^2}{a_2^2}-4\frac{a_0}{a_2}}=-\alpha+\gamma\\
&p_2=-\frac{a_1}{2a_2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a_1^2}{a_2^2}-4\frac{a_0}{a_2}}=-\alpha-\gamma
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

Heaviside の展開定理により

$$i_1(t)\mathbf{1}=I_1(p)\cdot\mathbf{1}=\left\{\frac{IM(0)}{N(0)}+\sum_{n=1}^{2}\frac{IM(p_n)}{p_nN'(p_n)}\varepsilon^{p_nt}\right\}\mathbf{1} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

(7) 式より (8) 式の各項を計算すれば

$$\frac{M(0)}{N(0)}=0,\ N'(p)=\frac{\partial}{\partial p}\{p^2-(p_1+p_2)p+p_1p_2\}=2p-(p_1+p_2)$$

$$N'(p_1)=\left[\frac{\partial N}{\partial p}\right]_{p=p_1}=p_1-p_2,\quad N'(p_2)=\left[\frac{\partial N}{\partial p}\right]_{p=p_2}=p_2-p_1$$

故に $i_1(t)=\dfrac{IM(p_1)}{p_1N'(p_1)}\varepsilon^{p_1t}+\dfrac{IM(p_2)}{p_2N'(p_2)}\varepsilon^{p_2t}=\dfrac{I}{p_1-p_2}\left\{\left(p_1+\dfrac{b}{a_2}\right)\varepsilon^{p_1t}\right.$

$$\left.-\left(p_2+\frac{b}{a_2}\right)\varepsilon^{p_2t}\right\}=\frac{I}{2\gamma}\left\{\left(-\alpha+\gamma+\frac{b}{a_2}\right)\varepsilon^{(-\alpha+\gamma)t}-\left(-\alpha-\gamma+\frac{b}{a_2}\right)\varepsilon^{(-\alpha-\gamma)t}\right\}$$

$$=I\varepsilon^{-\alpha t}\left\{\frac{-\alpha+\dfrac{b}{a_2}}{\gamma}\sinh\gamma t+\cosh\gamma t\right\}\quad\cdots\cdots(a_1)$$

$\gamma=j\beta$ となるときは

$$i_1(t)=I\varepsilon^{-\alpha t}\left\{\frac{-\alpha+\dfrac{b}{a_2}}{\beta}\sin\beta t+\cos\beta t\right\}\quad\cdots\cdots(a_2)$$

$\gamma=0$ となるときは，$p=-\alpha$ が $N(p)=0$ の重根となり $I_1(p)$ の2位の極となるから

$$I_1(p)=\frac{p^2+\dfrac{b}{a_2}p}{(p+\alpha)^2}I=\frac{M(p)}{N(p)}I\quad\cdots\cdots(9)$$

$$M(p)=p^2+\frac{b}{a_2}p,\qquad N(p)=(p+\alpha)^2$$

Heaviside の展開定理により

$$i_1(t)\mathbf{1}=I_1(p)\cdot\mathbf{1}=I\left[\frac{\partial}{\partial p}\left\{\frac{1}{p}M(p)\varepsilon^{pt}\right\}\right]_{p=-\alpha}\mathbf{1}\quad\cdots\cdots(10)$$

$$=I\varepsilon^{-\alpha t}\left\{1+\left(-\alpha+\frac{b}{a_2}\right)t\right\}\mathbf{1}$$

故に $i_1(t)=I\varepsilon^{-\alpha t}\left\{1+\left(-\alpha+\dfrac{b}{a_2}\right)t\right\}\quad\cdots\cdots(a_3)$

次に (1), (2), (3), (4), (5) 式より θ_1, θ_2, i_1, i_3 を消去して

$$R_1\frac{d^2q_2}{dt^2}+\left(\frac{R_1+R_2}{C_2R_2}+\frac{1}{C_1}\right)\frac{dq_2}{dt}+\frac{1}{C_1C_2R_2}q_2=\frac{1}{C_1}I\quad\cdots\cdots(11)$$

$$a_2\frac{d^2q_2}{dt^2}+a_1\frac{dq_2}{dt}+a_0q_2=cI,\qquad 但し\ q_2=\int i_2dt,\ c=\frac{1}{C_1}\quad\cdots\cdots(11')$$

前と同様にして

$$(a_2p^2+a_1p+a_0)Q_2(p)=(a_2p^2+a_1p)q_2(0)+a_2pq_2'(0)+cI$$

初期条件 $q_2(0)=0$, $q_2'(0)=\left(\dfrac{dq_2}{dt}\right)_{t=0}=(i_2)_{t=0}=0$ を入れると

$$Q_2(p)=\frac{c}{a_2p^2+a_1p+a_0}I=\frac{\dfrac{c}{a_2}}{p^2+\dfrac{a_1}{a_2}p+\dfrac{a_0}{a_2}}I$$

$$I_2(p)=p\{Q_2(p)-q_2(0)\}=pQ_2(p)$$

$$\left.\begin{aligned}&I_2(p)=\frac{\dfrac{c}{a_2}p}{(p-p_1)(p-p_2)}I=\frac{M(p)}{N(p)}I\quad とおけば\\&M(p)=\frac{c}{a_2}p,\qquad N(p)=(p-p_1)(p-p_2)\\&p_1=-\alpha+\gamma,\qquad p_2=-\alpha-\gamma\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(12)$$

$$i_2(t)\mathbf{1}=I_2(p)\cdot\mathbf{1}=\left\{\frac{IM(0)}{N(0)}+\sum_{n=1}^{2}\frac{IM(p_n)}{p_nN'(p_n)}\varepsilon^{p_nt}\right\}\mathbf{1}\cdots\cdots(13)$$

$$\frac{M(0)}{N(0)}=0,\ \ N'(p)=2p-(p_1+p_2),\ \ N'(p_1)=p_1-p_2,\ \ N'(p_2)=p_2-p_1$$

$$i_2(t)=I\varepsilon^{-\alpha t}\frac{\frac{c}{a_2}}{\gamma}\sinh\gamma t\cdots\cdots(b_1)$$

もし $\gamma=j\beta$ となれば

$$i_2(t)=I\varepsilon^{-\alpha t}\frac{\frac{c}{a_2}}{\beta}\sin\beta t\cdots\cdots(b_2)$$

$\gamma=0$ となるときは

$$I_2(p)=\frac{\frac{c}{a_2}p}{(p+\alpha)^2}I=\frac{M(p)}{N(p)}I$$

$$i_2(t)\mathbf{1}=I_2(p)\cdot\mathbf{1}=I\left[\frac{\partial}{\partial p}\left\{\frac{1}{p}M(p)\varepsilon^{pt}\right\}\right]_{p=-\alpha}\mathbf{1}=I\varepsilon^{-\alpha t}\left\{\frac{c}{a_2}t\right\}\mathbf{1}$$

$$i_2(t)=I\varepsilon^{-\alpha t}\frac{c}{a_2}t\cdots\cdots(b_3)$$

式 (5) に式 (a_1), (b_1) を入れて

$$i_3(t)=I\left[1-\varepsilon^{-\alpha t}\left\{\frac{-\alpha+\frac{b}{a_2}+\frac{c}{a_2}}{\gamma}\sinh\gamma t+\cosh\gamma t\right\}\right]\cdots\cdots(c_1)$$

$\gamma=j\beta$ のときは，式 (5) に式 (a_2), (b_2) を入れて

$$i_3(t)=I\left[1-\varepsilon^{-\alpha t}\left\{\frac{-\alpha+\frac{b}{a_2}+\frac{c}{a_2}}{\beta}\sin\beta t+\cos\beta t\right\}\right]\cdots\cdots(c_2)$$

$\gamma=0$ のときは，式 (5) に式 (a_3), (b_3) を入れて

$$i_3(t)=I\left[1-\varepsilon^{-\alpha t}\left\{1+\left(-\alpha+\frac{b}{a_2}+\frac{c}{a_2}\right)t\right\}\right]\cdots\cdots(c_3)$$

以上において

$$\gamma=\sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2-\frac{a_0}{a_2}}=\frac{\sqrt{C_1^2(R_1+R_2)^2+C_2^2R_2^2+2C_1C_2R_2(R_2-R_1)}}{2C_1C_2R_1R_2}\cdots\cdots(14)$$

の $\sqrt{\ }$ の中の値が正，零，負の 3 つのばあいを考えたが，実際はこれが正のばあいだけである．すなわち式 (14) を書きかえると

$$\gamma=\frac{\sqrt{\left\{\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)+\frac{C_2}{C_1}\frac{R_2}{R_1}\right\}^2-4\frac{C_2}{C_1}\frac{R_2}{R_1}}}{2C_2R_2}$$

R_1, R_2, C_1, C_2 は正の実数であり，$\frac{C_2}{C_1}=x$, $\frac{R_2}{R_1}=y$ とすれば $x>0$, $y>0$ でこの $\sqrt{\ }$ の中は

$$\{(1+y)+xy\}^2-4xy>(1+xy)^2-4xy=(1-xy)^2>0$$

従つて γ は常に正の値で，このばあいの式をまとめると

$$i_1(t)=I\varepsilon^{-\alpha t}\left\{\cosh\gamma t+\frac{\alpha-\dfrac{1}{C_1R_1}}{\gamma}\sinh\gamma t\right\} \cdots\cdots (a)$$

$$i_2(t)=I\varepsilon^{-\alpha t}\frac{\dfrac{1}{C_1R_1}}{\gamma}\sinh\gamma t \cdots\cdots (b)$$

$$i_3(t)=I\left[1-\varepsilon^{-\alpha t}\left\{\cosh\gamma t+\frac{\alpha}{\gamma}\sinh\gamma t\right\}\right] \cdots\cdots (c)$$

但し $\alpha=\dfrac{C_1(R_1+R_2)+C_2R_2}{2C_1C_2R_1R_2}$, $\gamma=\dfrac{\sqrt{C_1^2(R_1+R_2)^2+C_2^2R_2^2+2C_1C_2R_2(R_2-R_1)}}{2C_1C_2R_1R_2}$

$$\cdots\cdots (d)$$

また $\theta_1=R_1(i_2+i_3)+R_2i_3$

$$=R_1I\left[1-\varepsilon^{-\alpha t}\left\{\cosh\gamma t+\frac{\alpha-\dfrac{1}{C_1R_1}}{\gamma}\sinh\gamma t\right\}\right]+R_2I\left[1-\varepsilon^{-\alpha t}\left\{\cosh\gamma t+\frac{\alpha}{\gamma}\sinh\gamma t\right\}\right]$$

$$=(R_1+R_2)I\left[1-\varepsilon^{-\alpha t}\left\{\cosh\gamma t+\frac{\alpha-\dfrac{1}{C_1(R_1+R_2)}}{\gamma}\sinh\gamma t\right\}\right] \cdots\cdots (e)$$

$\theta_2=R_2i_3$

$$=R_2I\left[1-\varepsilon^{-\alpha t}\left\{\cosh\gamma t+\frac{\alpha}{\gamma}\sinh\gamma t\right\}\right] \cdots\cdots (f)$$

曲 線 の 吟 味

$$\frac{di_1}{dt}=-\frac{1}{C_1R_1}I\varepsilon^{-\alpha t}\left\{\cosh\gamma t-\frac{\alpha-\dfrac{1}{C_2R_2}}{\gamma}\sinh\gamma t\right\}$$

$\left(\dfrac{di_1}{dt}\right)_{t=0}=-\dfrac{1}{C_1R_1}I$ であるから $t=0$ における i_1 の傾角 φ_1 は負で定熱流 I に比例し，土壌の熱容量 C_1，熱抵抗 R_1 の積に逆比例する．また $\dfrac{di_1}{dt}=0$ を満足する t の値は $\tanh\gamma t=\dfrac{\gamma}{\alpha-\dfrac{1}{C_2R_2}}$ か $\varepsilon^{-\alpha t}=0$ を満足する値でなければならない．しかるに初めの式は $\gamma>\alpha-\dfrac{1}{C_2R_2}$ であるから $\tanh\gamma t>1$ となりこのような t は存在しない．従つて $t\to\infty$ のときだけ $\dfrac{di_1}{dt}=0$ となりその他のばあいはすべて $\dfrac{di_1}{dt}<0$ となる．

$$\frac{d^2i_1}{dt^2}=\frac{1}{C_1R_1}I\varepsilon^{-\alpha t}\left\{\left(2\alpha-\frac{1}{C_2R_2}\right)\cosh\gamma t-\frac{(\gamma^2+\alpha^2)-\dfrac{\alpha}{C_2R_2}}{\gamma}\sinh\gamma t\right\}$$

しかるに $2\alpha-\dfrac{1}{C_2R_2}>\dfrac{(\gamma^2+\alpha^2)-\dfrac{\alpha}{C_2R_2}}{\gamma}$ であるので常に $\dfrac{d^2i_1}{dt^2}>0$ であつて $\dfrac{d^2i_1}{dt^2}=0$ となるのは $t\to\infty$ のときだけである．故に i_1 曲線は上に凹で彎曲点がなく単調に減少し t 軸に漸近する．

$$\frac{di_2}{dt}=I\frac{\frac{1}{C_1R_1}}{\gamma}\varepsilon^{-\alpha t}\{\gamma\cosh\gamma t-\alpha\sinh\gamma t\}$$

$\left(\frac{di_2}{dt}\right)_{t=0}=\frac{1}{C_1R_1}I$ すなわち傾角 φ_2 は正で大きさは φ_1 と同じである．$\frac{di_2}{dt}=0$ となる t を τ_1 とすれば $\alpha>\gamma$ であるから

$$\tanh\gamma\tau_1=\frac{\gamma}{\alpha},\quad \tau_1=\frac{1}{\gamma}\tanh^{-1}\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\phi_1}{\gamma}$$

$$\frac{di_2}{dt}=I\frac{1}{C_1R_1}\frac{\alpha}{\gamma}\varepsilon^{-\alpha t}\cosh\gamma t\left\{\frac{\gamma}{\alpha}-\tanh\gamma t\right\}$$

と書き直せば，$0\leqq t<\tau_1$ のとき $\tanh\gamma t<\tanh\gamma\tau_1=\frac{\gamma}{\alpha}$ であるから $\frac{di_2}{dt}>0$, また $t>\tau_1$ のとき $\tanh\gamma t>\tanh\gamma\tau_1=\frac{\gamma}{\alpha}$ であるから $\frac{di_2}{dt}<0$ となる．すなわち $t=\tau_1$ で極大値をとりその値は

$$i_{2max}=I\varepsilon^{-\alpha\tau_1}\frac{\frac{1}{C_1R_1}}{\gamma}\sinh\gamma\tau_1=\sqrt{\frac{C_2R_2}{C_1R_1}}I\varepsilon^{-\alpha\,\phi_1/\gamma}$$

また $\frac{d^2i_2}{dt^2}=I\frac{1}{C_1R_1}\varepsilon^{-\alpha t}\left\{-2\alpha\cosh\gamma t+\frac{\alpha^2+\gamma^2}{\gamma}\sinh\gamma t\right\}$

$2\alpha<\frac{\alpha^2+\gamma^2}{\gamma}$ であるから $\tanh\gamma\tau_2=\frac{2\alpha}{\frac{\alpha^2+\gamma^2}{\gamma}}$，$\tau_2=\frac{1}{\gamma}\tanh^{-1}\frac{2\alpha\gamma}{\alpha^2+\gamma^2}=\frac{\phi_2}{\gamma}$ のとき $\frac{d^2i_2}{dt^2}=0$ となり i_2 は彎曲点，$t<\tau_2$ のとき $\frac{d^2i_2}{dt^2}<0$ で上に凸，$t>\tau_2$ のとき $\frac{d^2i_2}{dt^2}>0$ で上に凹となる．また

$$i_1-i_2=I\varepsilon^{-\alpha t}\cosh\gamma t\frac{\alpha-\frac{2}{C_1R_1}}{\gamma}\left\{\frac{\gamma}{\alpha-\frac{2}{C_1R_1}}-\tanh\gamma t\right\}$$

$\gamma>\alpha-\frac{2}{C_1R_1}$ であるから $\alpha-\frac{2}{C_1R_1}=\frac{C_1(R_1+R_2)-3C_2R_2}{2C_1C_2R_1R_2}$ の正負に拘らず常に $i_1>i_2$ である．

$$\frac{di_3}{dt}=I\varepsilon^{-\alpha t}\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\gamma}\sinh\gamma t$$

$t=0$, $t\to\infty$ で $\frac{di_3}{dt}=0$ でありその他においては $\frac{di_3}{dt}>0$

$$\frac{d^2i_3}{dt^2}=I\varepsilon^{-\alpha t}(\alpha^2-\gamma^2)\frac{\alpha}{\gamma}\cosh\gamma t\left\{\frac{\gamma}{\alpha}-\tanh\gamma t\right\}$$

$\alpha>\gamma$ である故 $\tanh\gamma\tau_1=\frac{\gamma}{\alpha}$，$\tau_1=\frac{1}{\gamma}\tanh^{-1}\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\phi_1}{\gamma}$ のとき $\frac{d^2i_3}{dt^2}=0$, $t<\tau_1$ のとき $\frac{d^2i_3}{dt^2}>0$ で上に凹，$t>\tau_1$ のとき $\frac{d^2i_3}{dt^2}<0$ で上に凸，$t=\tau_1$ のとき彎曲点となる．

$$\frac{d\theta_1}{dt}=I\varepsilon^{-\alpha t}\left\{\frac{1}{C_1}\cosh\gamma t+\frac{(\alpha^2-\gamma^2)(R_1+R_2)-\frac{\alpha}{C_1}}{\gamma}\sinh\gamma t\right\}$$

従つて $\left(\frac{d\theta_1}{dt}\right)_{t=0}=\frac{1}{C_1}I$ となる．$\frac{d\theta_1}{dt}$ をかきかえて

$$\frac{d\theta_1}{dt}=I\varepsilon^{-\alpha t}\frac{1}{C_1}\cosh\gamma t\frac{\alpha-C_1(R_1+R_2)(\alpha^2-\gamma^2)}{\gamma}\left\{\frac{\gamma}{\alpha-C_1(R_1+R_2)(\alpha^2-\gamma^2)}-\tanh\gamma t\right\}$$

しかるに $\gamma=\frac{\sqrt{C_1^2(R_1+R_2)^2+C_2^2R_2^2+2C_1C_2R_2(R_2-R_1)}}{2C_1C_2R_1R_2}>$

$$\left|\frac{-C_1(R_1+R_2)+C_2R_2}{2C_1C_2R_1R_2}\right|=\left|\alpha-\frac{C_1(R_1+R_2)}{C_1C_2R_1R_2}\right|=\left|\alpha-C_1(R_1+R_2)(\alpha^2-\gamma^2)\right|$$

であるから $\alpha-C_1(R_1+R_2)(\alpha^2-\gamma^2)$ の正負，従つて $-C_1(R_1+R_2)+C_2R_2$ の正負にかかわらず常に $\frac{d\theta_1}{dt}=0$ である．ただ $t\to\infty$ のときだけ $\frac{d\theta_1}{dt}=0$ となる．

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2}=-\frac{1}{C_1}I\varepsilon^{-\alpha t}\frac{C_2^2R_2^2+C_1C_2R_2(R_2-R_1)}{2(C_1C_2R_1R_2)^2\gamma}\cosh\gamma t\left\{\frac{2(C_1C_2R_1R_2)^2\gamma}{C_2^2R_2^2+C_1C_2R_2(R_2-R_1)}\cdot\frac{1}{C_1R_1}-\tanh\gamma t\right\}$$

しかるに $\frac{2(C_1C_2R_1R_2)^2\gamma}{C_2^2R_2^2+C_1C_2R_2(R_2-R_1)}\cdot\frac{1}{C_1R_1}=\frac{\sqrt{C_1^2(R_1+R_2)^2+C_2^2R_2^2+2C_1C_2R_2(R_2-R_1)}}{C_1(R_2-R_1)+C_2R_2}>1$ であるから $\frac{d^2\theta_1}{dt^2}$ は $t\to\infty$ のとき零となる以外はすべて負となり曲線は上に凸である．

$$\frac{d\theta_2}{dt}=R_2I\varepsilon^{-\alpha t}\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\gamma}\sinh\gamma t$$

$t=0$, $t\to\infty$ のとき $\frac{d\theta_2}{dt}=0$ となりその他では $\frac{d\theta_2}{dt}>0$ である．

$$\frac{d^2\theta_2}{dt^2}=R_2I\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\gamma}\varepsilon^{-\alpha t}\alpha\cosh\gamma t\left(\frac{\gamma}{\alpha}-\tanh\gamma t\right)$$

$\alpha>\gamma$ であるから　$\tau_1=\frac{1}{\gamma}\tanh^{-1}\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\phi_1}{\gamma}$ のとき　$\frac{d^2\theta_2}{dt^2}=0$ で彎曲点となり，$t<\tau_1$ のとき $\frac{d^2\theta_2}{dt^2}>0$ で上に凹，$t>\tau_1$ のとき $\frac{d^2\theta_2}{dt^2}<0$ で上に凸となる．

定常状態におけるそれぞれの値を求むれば $[i_1]_{t\to\infty}=0$, $[i_2]_{t\to\infty}=0$, $[i_3]_{t\to\infty}=I$, $[\theta_1]_{t\to\infty}=(R_1+R_2)I$, $[\theta_2]_{t\to\infty}=R_2I$ となる．

以上によつて熱流，温度の定常状態に達するまでの時間に対する変化を描けば Fig. 2 のようになる．

これについて見るに，土壌の定常状態における最高温度は熱流を一定とすれば，土壌の熱抵抗と保温壁の熱抵抗との和に比例することになる．そしてこの温度曲線の立ち上りは C_1 だけに逆比例する．被熱物の熱抵抗が無視できるものであれば θ_1 は簡単に $R_2I\left\{1-\varepsilon^{-\frac{t}{R_2(C_1+C_2)}}\right\}$ となり，定常状態における最高温度は R_2I, 時定数は $R_2(C_1+C_2)$ となるが，土壌のばあい熱抵抗を無視することはできない．電気抵抗のばあいは導体の比抵抗は絶縁物の比抵抗に対する割合が極めて小さいが，熱抵抗のばあい土壌の熱比抵抗は最良の熱絶縁物の熱比抵抗に対してもその割合は極めて大きい．熱抵抗は形状により異るが，簡単のため幾何学的抵抗が同じである同形の土壌と保温壁とについて熱抵抗 R_1, R_2 を比べて見ると，各熱抵抗は各熱伝導率に逆比例する．土壌の熱伝導率をおよそ 1.6 $[W/m^\circ C]$ とし，保温壁のそれをコルク級の熱絶縁物（たとえば保温用合成樹脂板）を使つたとして $0.04[W/m^\circ C]$ としても $R_1/R_2=1/40$ になる．保温壁の厚さが減少すればこの値は更に大きくなることは当然考えられ実際の場合は $R_1>R_2$ の場合も普通に起り得る．

以上を綜合して土壌加熱の場合一般的に言えることは，土壌の加熱装置は単一発熱線当りの土壌

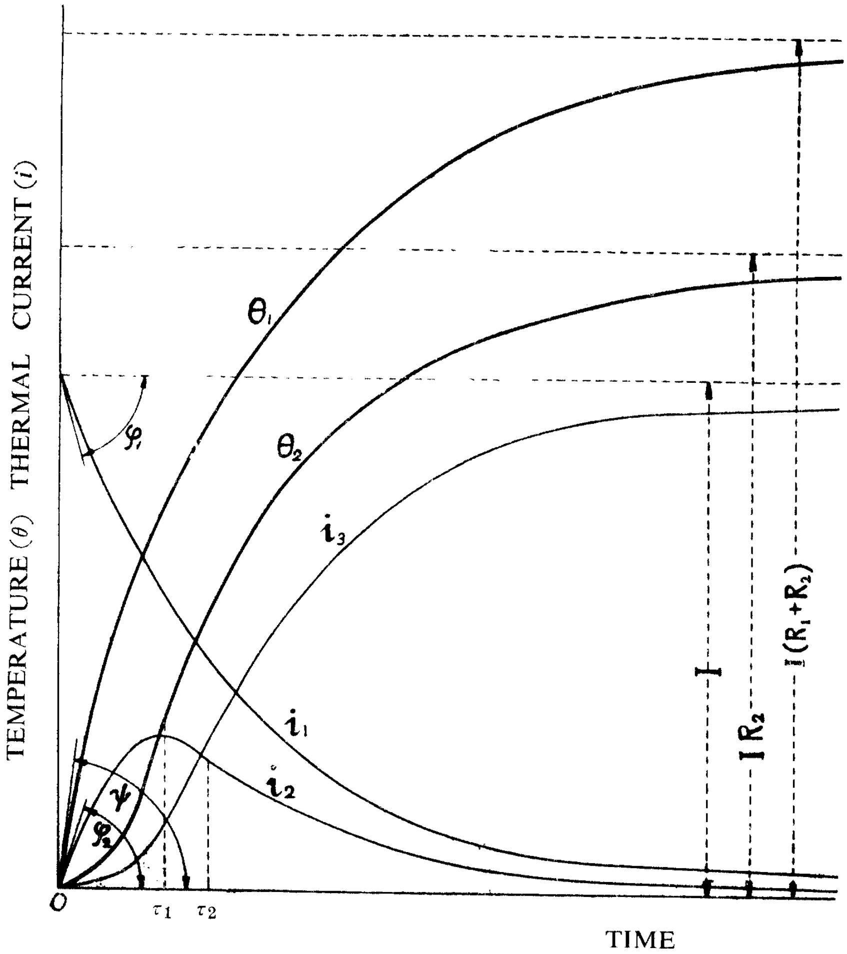

Fig. 2　Typical curves showing temperature and thermal current as time progresses

の熱容量，熱抵抗を小さくするよう設計しなければならないことである．また土壌の熱伝導率は保温壁のそれに比べてかけ離れて大きくはないから保温壁はできるだけ良質の材料を用い水分が浸透しないようにしなければその効果は目立たないことになる．

更に精確な式を得るためには分布定数回路による結果を用いなければならないが，全般的傾向を知るためや熱経済における保温材料との関係を知るためにはこの結果で充分であるということができるであろう．

摘　　要

土壌加熱の熱経済等を検討するために，一定熱流で土壌を加熱するときの過渡的熱流，温度変化を等価集中定数回路によつて等式を求めた．

これによれば一般的に言つて次のようなことが推論できる．すなわち，加熱装置は単一発熱体当りの土壌の熱容量および熱抵抗ができるだけ小さくなるように設計されなければならない．また保温壁はできるだけ上質の熱絶縁物を用いなければ保温の効果は上らない．

文　　献

1）中路幸謙：電学誌，69，412 (1949).

2) E. Grünwald: Elektrowärme., 8, 288 (1938).
3) 電気学会：電熱工学, 37 (1955).
4) 電気学会：過渡現象論, 235 (1953).

Résumé

The equation of thermal current and temperature in transient state, in case of heating of soil supplying constant thermal current, which is important for the investigation of heat economy and so on, is obtained by means of equivalent concentrated constant circuit.

According to this equation, generally speaking, the heating equipment in such a case should be designed so that heat capacity and thermal resistance of soil per unit heater may be as small as possible. The effect of keeping warmth will be unchainged unless the best insulator of heat is chosen.