

# 流体力学と数学

鹿児島大学 水産学部

2018 年 3 月 26 日

重廣 律男

## 目次

1	$v_r, v_\theta$ の速度ポテンシャル $\phi$ での記述	59
2	静水圧と物体に働く力	61
3	ガウスの定理	62
4	二重吹き出し	64
5	円柱まわりの流れ解析	66
6	吹き出しの複素速度ポテンシャル	71
7	組み合わせ流れ	75
8	テーラー展開	77
9	オイラーの運動方程式	78
10	ベルヌーイの定理	82
11	運動量理論	86
	Appendix-1 極座標変換	92
	Appendix-2 渦まわりの流場と速度ポテンシャル	97
	Appendix-3 波の速度ポテンシャル	106
	Appendix-4 スカラー場とベクトル場	116
	Appendix-5 ナビエ・ストークスの運動方程式	126

## 流体力学と数学

数学は一種の言語である。この言語を使わずに流体力学を書くことはほとんど不可能である。数学の文法は、大変厳密であるので文法のみにも頼っても理論を誤りなく展開できる。つまり、「式が考えてくれ」さらに、その解は「流体力学の現象」を表わしているのである。

2018年3月26日

重廣 律男

上述は恩師の教えである。講義では、このことを念頭に置いて、数式の持つ物理的な意味の解説に力点を置いている。これには、物理的な現象を解き明かす面白さと教科書を読み解く力を付ける期待が込められている。しかし、多くの学生は、数式の展開で立ち止まることが多いようである。そこで、蛍雪の導灯になればと思い「数式の展開」ノートを作成することにした。思いつくままに書き留めて行くつもりである。

### 1 $v_r, v_\theta$ の速度ポテンシャル $\phi$ での記述

回転の座標変換は

(新しい座標系)  $= e^{-i\theta} \times$  (元の座標系)

で求められる。

ただし、 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  ( $i^2 = -1$ ) (a)

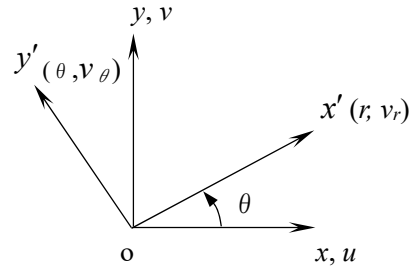


図1 座標系

例えば、図1の  $(x, y)$  から  $(x', y')$  への回転変換は

$$(x' + i y') = e^{-i\theta} (x + i y) \quad (1)$$

である。

直交関係にある  $(r, \theta)$  方向の速度  $v_r, v_\theta$  と  $(x, y)$  方向の速度  $u, v$  についても同様に

$$\begin{aligned} v_r + i v_\theta &= e^{-i\theta} (u + i v) \\ &= (\cos \theta - i \sin \theta)(u + i v) \quad (\because \sin(-\theta) = -\sin \theta) \\ &= u \cos \theta + v \sin \theta + i(-u \sin \theta + v \cos \theta) \end{aligned} \quad (2)$$

となる。

$v_r, v_\theta$  と  $u, v$  は、実数部と虚数部との比較から次の関係が得られる。

$$\left. \begin{aligned} v_r &= u \cos \theta + v \sin \theta \\ v_\theta &= -u \sin \theta + v \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

一方、直交座標  $(x, y)$  と極座標  $(r, \theta)$  の関係は(4)式である。また、(4)式から(5)式が得られる。

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (4)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (5)$$

また, 速度  $u, v$  は, 速度ポテンシャル  $\phi$  の方向微分から {Appendix-2} 参照

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \quad (6)$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} \quad (7)$$

が得られる。

(6), (7) 式を(3)式に代入すると

$$v_r = u \cos \theta + v \sin \theta$$

$$= \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \right) \cos \theta + \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} \right) \sin \theta$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (\because \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1) \quad (8)$$

$$v_\theta = -u \sin \theta + v \cos \theta$$

$$= -\left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \right) \sin \theta + \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} \right) \cos \theta$$

$$= \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} \quad (9)$$

が得られる。以上より速度ポテンシャルの方向微分と速度の関係は, 次式である。

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x}, & v &= \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ v_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r}, & v_\theta &= \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

つまり,  $rd\theta$  は半径  $r$  での  $\theta$  方向の微小長さを意味する。

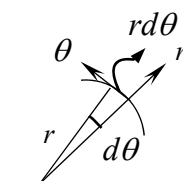


図2  $r, \theta$  座標系

## 2 静水圧と物体に働く力

検査体積に微小立方体  $dv = dxdydz$  を取ると、この上面に働く力は、静水圧を  $p(z)$  (関数形は未定) とすると

$$F(z) = p(z)dxdy \quad (11) \quad \text{【力=圧力×面積】}$$

である。一方、微小深さ  $dz$  での下面に働く力は

$$F(z+dz) = p(z+dz)dxdy \quad (12)$$

と表すことができる。また、検査体積に作用する重力は流体の密度を  $\rho[\text{kg}/\text{m}^3]$ 、重力加速度を  $g[\text{m}/\text{s}^2]$  とすると(13)式である。

$$F_G(z) = mg = \rho g dv = \rho g dxdydz \quad (13)$$

これらの力の和は、釣り合っている(静止している=0)。よって、座標系の向きを正として

$$F(z) - F(z+dz) + F_G(z) = p(z)dxdy - p(z+dz)dxdy + \rho g dxdydz = 0 \quad (14)$$

が成り立つ。これから

$$\frac{p(z+dz) - p(z)}{dz} = \rho g \quad (15)$$

を得る。ここで、 $dz \rightarrow 0$  の極限をとると、微分の定理から  $f(x)' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$

$$\lim_{dz \rightarrow 0} \frac{p(z+dz) - p(z)}{dz} = \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g \quad (16)$$

が得られる。圧力  $p$  は、これを  $z$  方向に積分して

$$p = \rho g z + c \quad (17) \quad \text{ただし、} c \text{ は積分定数である。}$$

の関数形が得られる。

積分定数  $c$  は、 $z=0$  (水面) での圧力が大気圧  $p_o$  (ゲージ圧では  $p_o = 0$ ) より  $c=0$  となる。

以上より、静水圧は(18)式となる。

$$p = \rho g z \quad (18)$$

### 【圧力による力】

圧力に方向余弦を掛けることにより、その方向成分に変換される。これらを物体まわりに積分するとその方向の力【圧力×面積=力】が得られる。

$$\left. \begin{aligned} X &= - \iint_S p \cos(nx) ds \\ Y &= - \iint_S p \cos(ny) ds \\ Z &= - \iint_S p \cos(nz) ds \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

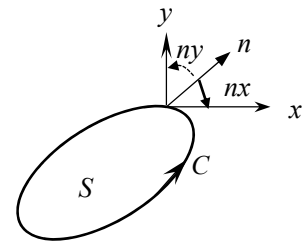


図4 法線ベクトルと方向余弦

ただし、 $n$  は物体の外向きに立てた法線ベクトルである。 $(nx)$  は  $n$  と  $x$  軸のなす角である。 $\cos(nx), \cos(ny), \cos(nz)$  は、それぞれ  $x, y, z$  方向の方向余弦という。

### 3 ガウスの定理

ガウスの定理(Gauss's theorem)は、面積分から体積積分への変換公式 {発散定理(divergence theorem)ともいう} である。

$$\iint_S f \mathbf{n} ds = \iiint_V \text{grad} f dv = \iiint_V \nabla f dv \quad (a) \quad f: \text{スカラー場}$$

$$\iint_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} ds = \iiint_V \text{div} \mathbf{V} dv = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{V} dv \quad (b) \quad \mathbf{V}: \text{ベクトル場}$$

ただし、 $\mathbf{n}$  は物体表面に垂直、外向き (+) に立てた法線ベクトルである。

$\mathbf{n} = in_x + jn_y + kn_z = i \cos(nx) + j \cos(ny) + k \cos(nz)$ , ( $i, j, k$  は  $x, y, z$  軸の単位ベクトル)

また、 $\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$  (ナブラ(nabla)と呼ばれるベクトル微分演算子)

{Appendix-4} 参照

#### 3.1 スカラー場 (圧力 $p$ ) の例

(a)式から  $f=p$  として

$$\iint_S p \mathbf{n} ds = \iiint_V \text{grad} p dv = \iiint_V \nabla p dv = \iiint_V \left( i \frac{\partial p}{\partial x} + j \frac{\partial p}{\partial y} + k \frac{\partial p}{\partial z} \right) dv \quad (20)$$

この  $x, y, z$  軸の各成分は、それぞれの力 ( $X, Y, Z$ ) { (19)式参照 } を意味する。

ただし、圧力  $p$  は、物体表面に垂直、内向きに働くので(a)式の定義とは逆の(-)をとる。

$$X = - \iint_S p \cos(nx) ds = - \iiint_V \frac{\partial p}{\partial x} dv \quad (21)$$

$$Y = - \iint_S p \cos(ny) ds = - \iiint_V \frac{\partial p}{\partial y} dv \quad (22)$$

$$Z = - \iint_S p \cos(nz) ds = - \iiint_V \frac{\partial p}{\partial z} dv \quad (23)$$

ここで、圧力  $p$  を静水圧 ( $p = \rho g z$ ) とすると(21), (22)式から

$$X = 0, \quad Y = 0 \quad (24)$$

と水平方向の力が零となる (釣り合っている)。

また、(23)式から

$$Z = - \rho g \iiint_V dv = - \rho g V \quad (\because V = \iiint_V dv = \iiint_V dx dy dz) \quad (25)$$

が得られる。これは、 $z$  軸とは逆向き(上向き)の力、つまり、浮力と呼ばれる力である。

静止時には、これは物体に働く重力( $mg$ )と釣り合っている。有名なアルキメデスの原理 (Archimedes' Law,  $m = \rho V$ ) である。ただし、 $V$  は物体没水部の体積である。

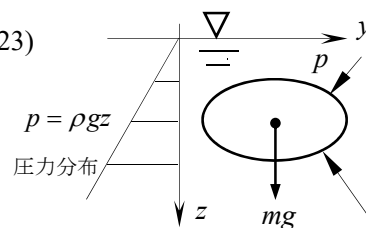
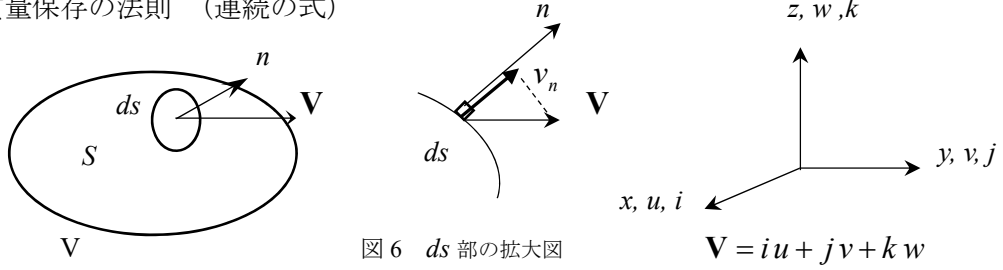


図5 静水圧

3.2 ベクトル場（速度  $\mathbf{V}(x, y, z, t)$ ）の例

流体の質量保存の法則（連続の式）

図6  $ds$  部の拡大図

【考え方】

「面積要素  $ds$  を通って単位時間に  $S$  の外側に流れ出す流体の質量は  $\rho v_n ds$  である。ただし、 $v_n = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$  で法線方向の流速を意味する。{  $v_n = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$  の  $(\cdot)$  }は、ベクトルの内積を意味する。結果は、スカラーとなる。} 流れ出す流体の質量を全表面  $S$  について積分したものは、 $S$  の中に含まれる質量が単位時間内に減少する量（－）と等しい。」これを定式化すると

$$\iint_S \rho v_n ds = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dv = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv \quad (26)$$

である。(b)式を用いて面積分から体積積分へと変換すると

$$\iint_S \rho v_n ds = \iiint_V \text{div}(\rho \mathbf{V}) dv \quad (27)$$

が得られ、これを(26)式に代入して

$$\iiint_V \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{V}) \right\} dv = 0 \quad (28)$$

となる。これが常に成り立つためには

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (29)$$

すなわち

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad (30)$$

である。これは、流体が検査体積を通過する収支（出入り）が零であることから質量の保存を意味している。また、縮まない流体では密度  $\rho$  が一定であるので簡単な次式となる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (31)$$

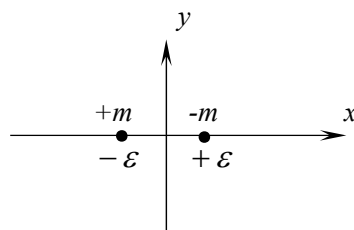
また、渦なし流れでは速度ポテンシャル  $\phi(x, y, z)$  を用いてラプラスの方程式と呼ばれる

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (\because u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, w = \frac{\partial \phi}{\partial z}) \quad (32)$$

が得られる。

## 4 二重吹き出し

$x$  軸上  $x = -\varepsilon$  の所に強さ  $m$  の吹き出しと  $x = \varepsilon$  の所に強さ  $-m$  の吸い込みがある流れ場を考える。  
複素速度ポテンシャルは



$$w(z) = m \log(z + \varepsilon) - m \log(z - \varepsilon)$$

図7 吹き出し(+ $m$ )と吸い込み(- $m$ )の位置

$$= m \log \frac{z + \varepsilon}{z - \varepsilon} = m \log \frac{1 + \varepsilon/z}{1 - \varepsilon/z} \quad (33)$$

である。

ここで、吹き出し (+ $m$ ) と吸い込み (- $m$ ) が接近した極限 ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) を考えてみる。

(33)式の  $\varepsilon/z$  でのマクローリン(Maclaurin) 展開は、 $[\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots]$

$$\begin{aligned} w(z) &= m \left[ \left\{ \frac{\varepsilon}{z} - \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon}{z} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{\varepsilon}{z} \right)^3 - \dots \right\} - \left\{ \left( -\frac{\varepsilon}{z} \right) - \frac{1}{2} \left( -\frac{\varepsilon}{z} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( -\frac{\varepsilon}{z} \right)^3 - \dots \right\} \right] \\ &= m \left\{ 2 \frac{\varepsilon}{z} + \frac{2}{3} \left( \frac{\varepsilon}{z} \right)^3 + \dots \right\} \end{aligned} \quad (34)$$

となる。ここで高次の項を微小量として省略する。また、 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\varepsilon m$  が一定 ( $\mu$ ) となる強さ ( $m$ ) をとると

$$w(z) = \frac{\mu}{z} \quad (35)$$

が得られる。これは、原点上に吹き出しと吸い込みが存在する二重吹き出し(doublet)と呼ばれる複素速度ポテンシャルである。

直交座標 ( $x, y$ ) と極座標 ( $r, \theta$ ) の関係は(36)式である。

$$z = x + iy = r e^{i\theta} = r \{ \cos \theta + i \sin \theta \} \quad (36)$$

また、次の関係もある。

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

よって、(36)式を(35)式に代入すると

$$\begin{aligned} w(z) &= \phi + i\psi = \frac{\mu}{r} e^{-i\theta} = \frac{\mu}{r} \{ \cos \theta - i \sin \theta \} \quad (\because \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}) \\ &= \mu \left( \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \end{aligned} \quad (38)$$

となる。



実数部が速度ポテンシャル $\phi$ を表し、虚数部が流線関数 $\psi$ を表す。二重吹き出しの流れの様子は、流線関数から求まる。直交座標での流線関数は

$$\psi(x, y) = \mu \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (39)$$

である。

流線が一定となる等流線は、流れの様子を表す。ここで、(39)式が一定となる等流線を求める。つまり

$$\mu \frac{y}{x^2 + y^2} = c \quad (40)$$

の $c$ をパラメータとした曲線群を求めることになる。(40)式から

$$x^2 + y^2 - y \frac{\mu}{c} = x^2 + \left(y - \frac{\mu}{2c}\right)^2 - \left(\frac{\mu}{2c}\right)^2 = 0 \quad (41)$$

が得られる。よって、(41)式は

$$x^2 + \left(y - \frac{\mu}{2c}\right)^2 = \left(\frac{\mu}{2c}\right)^2 \quad (42)$$

となる。

これは、 $y$  軸に中心を持ち、原点からその中心位置までの距離が半径となる円を表しており、 $c$  の値が変化すると図 8 に示すように  $x$  軸に接する円群となる。また、流れの方向は、左側( $x < 0$ )に吹き出し、右側( $x > 0$ )に吸い込みがあることから原点から  $x$  軸の負の方向に流れ、無限遠方( $x$  軸の正)から原点へ戻る流れである。つまり、上面( $y > 0$ )では時計回り、下面( $y < 0$ )では反時計回りの流れである。

一方、等ポテンシャル線は、(38)式から(40)式の分子の変数 $y$ が $x$ に換わるだけであるので等流線と直交関係である。また、速度ポテンシャル $\phi$ と流線関数 $\psi$ がコーシー・リーマン (Cauchy-Riemann) の関係から直交の関係にあることを示す実例でもある。

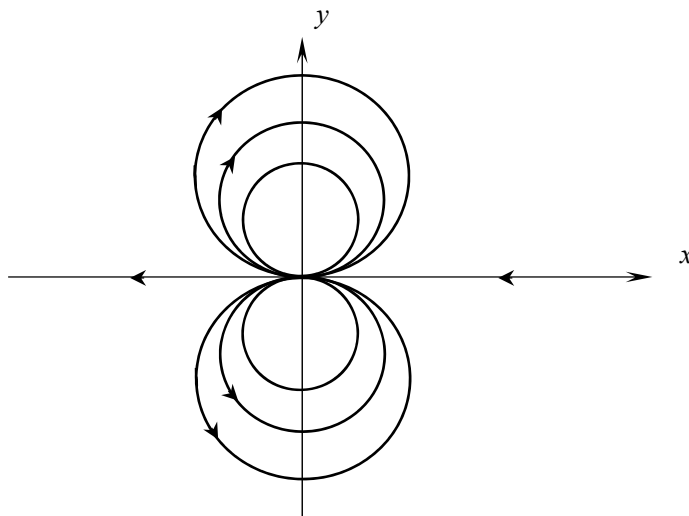


図 8 二重吹き出しの等流線群

## 5 円柱まわりの流れ解析

複素平面上での円柱まわりの複素速度ポテンシャル  $w(z)$  を一様流と原点に置いた二重吹き出しと時計回りの循環  $(-\Gamma)$  で表す。また、円柱まわりの流れの様子を図 9 に示す。

$$w(z) = Uz + \frac{Ua^2}{z} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \log z \quad (43)$$

ただし、 $U$  : 一様流速,  $a$  : 円柱の半径

$\Gamma$  : 循環の強さ 【Note 2】 参照

複素平面  $z$  は、極座標と次の関係がある。

$$z = x + iy = re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (44)$$

極座標形式の複素速度ポテンシャルは、

(44)式を(43)式に代入して次式となる。

$$\begin{aligned} w(r, \theta) &= Ure^{i\theta} + \frac{Ua^2}{r}e^{-i\theta} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \log re^{i\theta} \\ &= Ur(\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{Ua^2}{r}(\cos \theta - i \sin \theta) + \frac{i\Gamma}{2\pi}(\log r + i\theta) \end{aligned} \quad (45)$$

複素速度ポテンシャルは、速度ポテンシャル  $\phi(x, y)$  および流線関数  $\psi(x, y)$  と次の関係がある。

$$w(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (46)$$

従って、(45)式の実数部が速度ポテンシャルを表す。

$$\phi(r, \theta) = \left(r + \frac{a^2}{r}\right)U \cos \theta - \frac{\Gamma \theta}{2\pi} \quad (47)$$

半径方向の速度  $v_r(r, \theta)$  と円周方向の速度  $v_\theta(r, \theta)$  は、速度ポテンシャルの方向微分から

$$\left. \begin{aligned} v_r(r, \theta) &= \frac{\partial \phi}{\partial r} = \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)U \cos \theta \\ v_\theta(r, \theta) &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \left\{ \left(r + \frac{a^2}{r}\right)U (-\sin \theta) - \frac{\Gamma}{2\pi} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

である。 $r = a$  の位置でのそれぞれの速度は

$$v_r(a, \theta) = 0 \quad (49)$$

$$v_\theta(a, \theta) = -2U \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi a} \quad (50)$$

となる。

(49)式は円柱表面での半径方向（法線方向）速度が零であることから円境界を意味している。(50)式は円柱表面での円周方向（接線方向）の流速分布を表している。この速度分布からベルヌーイ (Bernoulli) の定理を利用して円柱表面の圧力分布を求めることができる。

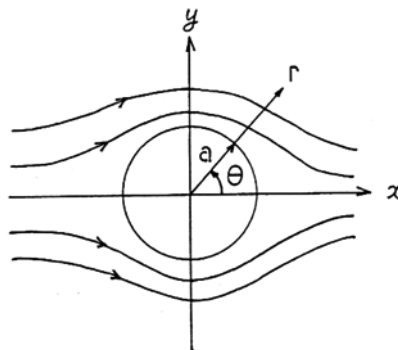


図 9 円柱まわりの流れ

無限遠方の圧力  $P_\infty$  と円柱表面上の圧力  $P_a$  の関係は、ベルヌーイの式 {(128)式参照} から

$$P_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2 = P_a + \frac{1}{2}\rho v_\theta^2 \quad (51)$$

である。

無限遠方と円柱表面との圧力差の無次元値  $C_p$  は、(51)式に(50)式を代入して次式となる。

$$\begin{aligned} C_p &= \frac{P_a - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{\frac{1}{2}\rho(U^2 - v_\theta^2)}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 1 - \left(\frac{v_\theta}{U}\right)^2 \\ &= 1 - 4\left(\sin\theta + \frac{\Gamma}{4\pi a U}\right)^2 \\ &= 1 - 4(\sin\theta + \Gamma')^2 \quad \left(\because \Gamma' = \frac{\Gamma}{4\pi a U}\right) \end{aligned} \quad (52)$$

$C_p=1.0$  または、流速が零となる点をよどみ点(Stagnation Point)という。循環の強さ  $\Gamma$  の無次元値  $\Gamma'$  が変化した場合の円柱表面の圧力分布と流れ場の代表例を図 10 に示す。ただし、角度  $\theta$  の零点位置と方向は感覚的に分かり易いように流れの方向に合わせて計算時の座標系と反対側に取ってある。なお、 $C_p$  の値は  $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$  から原点と方向を変更しても変わらない。

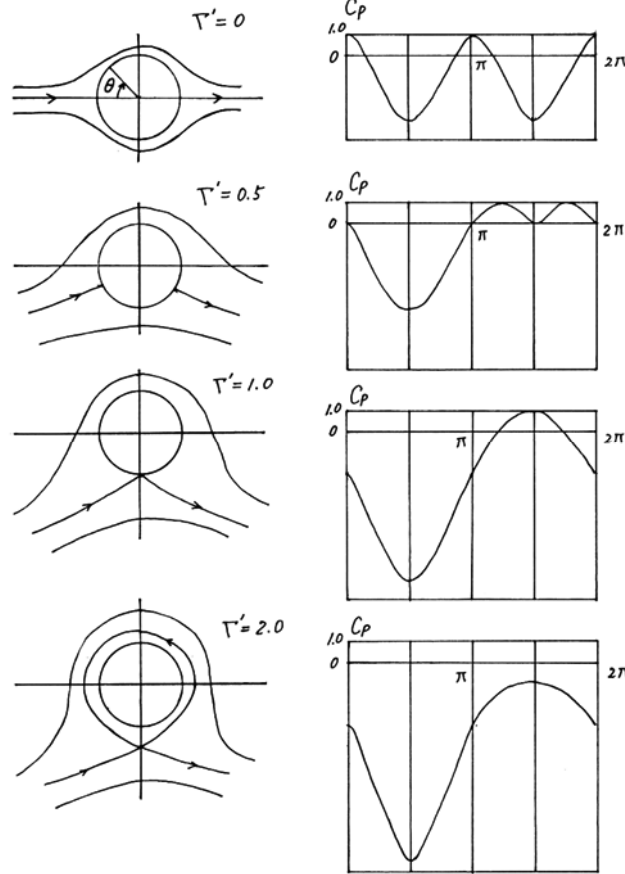


図 10 循環が変化した場合の円柱まわりの流れと圧力分布

さらに、円柱表面の圧力積分から円柱に作用する力を求めることができる。円柱表面の外向きに立てた法線ベクトルを  $n$  とすると、図 11 に示す座標系の  $X$ ,  $Y$  の力は以下である。

$$\left. \begin{aligned} X &= -\oint p \cos(nx) ds \\ Y &= -\oint p \cos(ny) ds \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

(53)式の  $(nx)$  は法線  $n$  と  $x$  軸のなす角を意味する。また、 $ds$  は積分経路の微小部分を意味する。円柱の場合、図 11 の座標系から次の関係が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \cos(nx) &= \cos \theta \\ \cos(ny) &= \sin \theta \\ ds &= a d\theta \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

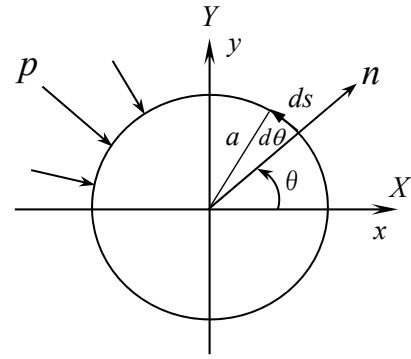


図 11 座標系

(53)式に(54)式を代入し、さらに(52)式の関係( $p = p_a - p_\infty$ )から積分を実行して円柱に作用する  $X$ ,  $Y$  の力を求めることができる。

$$\begin{aligned} X &= -\frac{1}{2} \rho U^2 a \int_0^{2\pi} \{1 - 4(\sin \theta + \Gamma')^2\} \cos \theta d\theta \\ &= -\frac{1}{2} \rho U^2 a \int_0^{2\pi} \{\cos \theta - 2(1 - \cos 2\theta) \cos \theta - 4\Gamma' \sin 2\theta - 4\Gamma'^2 \cos \theta\} d\theta \\ &= 0 \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} Y &= -\frac{1}{2} \rho U^2 a \int_0^{2\pi} \{1 - 4(\sin \theta + \Gamma')^2\} \sin \theta d\theta \\ &= -\frac{1}{2} \rho U^2 a \int_0^{2\pi} \{\sin \theta - 4 \sin^3 \theta - 8\Gamma' \sin^2 \theta - 4\Gamma'^2 \sin \theta\} d\theta \end{aligned} \quad (56)$$

結局、 $\sin^2 \theta$  以外の項は  $(0, 2\pi)$  の積分範囲により零となることから(56)式は次式となる。

$$\begin{aligned} Y &= 4\rho U^2 a \Gamma' \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = 2\rho U^2 a \Gamma' \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2\theta) d\theta \\ &= 2\rho U^2 a \Gamma' \left[ \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{2\pi} = 4\pi \rho U^2 a \Gamma' = \rho U \Gamma \quad \left( \because \Gamma' = \frac{\Gamma}{4\pi a U} \right) \end{aligned} \quad (57)$$

流れに平行な力  $X$  を抗力という。また、流れに垂直な力  $Y$  を揚力という。抗力と揚力の関係は、円柱に限らず全ての物体についても成り立つ。理想流体中では抗力が零となり、現実の粘性流体中の事実と異なる。これをダランベールの背理(d'Alembert's paradox)という。また、循環( $\Gamma$ )のある場合は、流れに垂直方向に揚力( $\rho U \Gamma$ )を受ける。これをクッター・ジューコフスキーの定理(Kutta - Joukowski's theorem)という。

## 【Note 1】二重吹き出しの強さ

一様流中での円柱(半径  $r = a$ )まわりの流れ解析では, (43)式に示すように二重吹き出しの強さを初めから  $\mu = Ua^2$  と置いている。これの解明には, 二重吹き出しの強さ  $\mu$  を未定定数として問題を解いてみるのが良い。ここでは, 循環  $\Gamma = 0$  の場合を取り上げる。この速度ポテンシャル  $\phi$  は, (45)式の実数部から

$$\phi(r, \theta) = (Ur + \frac{\mu}{r}) \cos \theta \quad (a)$$

となる。半径方向の速度  $v_r(r, \theta)$  は, 速度ポテンシャルの方向微分から

$$v_r(r, \theta) = \frac{\partial \phi}{\partial r} = (U - \frac{\mu}{r^2}) \cos \theta \quad (b)$$

である。ここで命題である「円柱まわりの流れ」を解くためには, 一様流中に円柱が置かれている状態を数学で表す条件 {境界条件(boundary condition)という} が必要となる。つまり, 「一様流中に円柱がある」→「流体が円柱表面を貫通しない」条件が必要となる。数学的には円柱表面上( $r = a$ )で法線方向の速度が零となる

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (c)$$

を満足することである。円柱の場合, 境界条件である(c)式は, 法線ベクトル  $\mathbf{n}$  と半径方向  $r$  が一致して {図 11 参照}

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial r} = v_r(a, \theta) = 0 \quad (d)$$

となる。よって, 未定定数である二重吹き出しの強さ  $\mu$  が

$$\mu = Ua^2 \quad (e)$$

であると円柱表面上( $r = a$ )で境界条件(c)式を満たしているのである。■

【Note 2】循環の回転方向 ( $\Gamma$ :反時計回り,  $-\Gamma$ : 時計回り)

渦糸の複素速度ポテンシャルは

$$w(z) = -i\kappa \log z \quad (a)$$

で表される。これの速度ポテンシャル  $\phi$  は

$$z = re^{i\theta} \text{ から}$$

$$\phi = \kappa\theta \quad (b)$$

である。渦糸の半径方向の速度  $v_r(r, \theta)$  と

円周方向の速度  $v_\theta(r, \theta)$  は, 速度ポテンシャル  $\phi$  の方向微分から(c)式となる。

$$\left. \begin{aligned} v_r(r, \theta) &= \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \\ v_\theta(r, \theta) &= \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} = \frac{\kappa}{r} \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

これは, 図 12 に示すように  $\kappa > 0$  であると  $\theta$  の向きに (反時計回り) 回転する流れを表す。

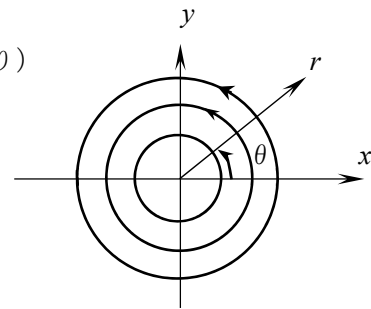


図 12 渦糸まわりの流れ

渦糸まわりの旋回流れの2次元流量 $Q[m^2/s]$ は、 $v_\theta$ を全周積分すると

$$Q = \int_0^{2\pi} v_\theta r d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\kappa}{r} r d\theta = 2\pi \kappa \quad (d)$$

である。ここで、単位時間当たりの流量を $\Gamma$  {「循環の強さ」と呼ぶ} とすると

$$\kappa = \frac{\Gamma}{2\pi} \quad (e)$$

となる。循環の強さ $\Gamma$ は、単位時間当たりの流量を表すスカラーであるが、符号(±)をつけて回転方向を表している。(c)式に示すように $\kappa > 0$ が $\theta$ の方向(反時計回り)であるので $\Gamma$ が反時計回り、 $-\Gamma$ が時計回りを表す。しかし、(43)式では時計回りの循環を意味する

$\kappa = -\frac{\Gamma}{2\pi}$ の(−)符号が $w(z) = -i\kappa \log z = \frac{i\Gamma}{2\pi} \log z$ と処理されて(+)表示となるので

注意が必要である。■

#### 【考察】抗力=0の意味するところ

抗力は流体の粘性に起因する「粘性抗力」と圧力に起因する「圧力抗力」に分けることができる。

理想流体中では、抗力が零となる。これは、流体の粘性を零としていることと、物体表面上の流れが常に物体に沿った流れとなり、流体の剥離が無いためである。この圧力分布は、頂点( $\theta=90^\circ$ )を境にして前後対称となる。このため、圧力によって加わる力は、前半部と後半部とで大きさが等しく、方向が反対である。つまり、「圧力抗力」が零となるのである。現実の流体では、図13に示すように円柱後半部で流体の剥離が生じる。剥離部では、圧力回復が十分に行われず、圧力分布が前後非対称になる(図14参照)。この前半部と後半部の圧力差が「圧力抗力」となるのである。

抗力を小さくする方法として、「粘性抗力」が物体の表面積と表面疎度(粘性係数 $\mu$ )に比例するので、表面積を小さくして、表面を「つるつる」にすることが良い。

一方、「圧力抗力」は理想流体の圧力分布に近づけることが抗力を小さくすることになる。つまり、流体の剥離位置を後方に遅らせることができる形状が良いことが分かる。この方法としては、図15に示すように物体後部を伸ばした形状にすることも一つの方法である。

理想流体の結果は「圧力抗力」の発生メカニズムとこれを最小にする解を示しているのである。

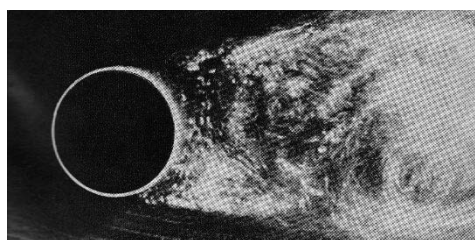


図13 円柱まわりの流れの可視化

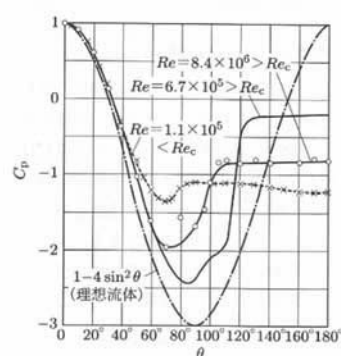


図14 円柱上半部の圧力分布

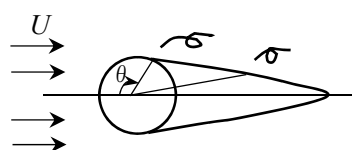


図15 剥離位置の遅れ

## 6 吹き出しの複素速度ポテンシャル

流体力学の教科書【基本を学ぶ流体力学，藤田勝久】には，原点での強さ  $m$  の吹き出しの複素速度ポテンシャルは

$$w(z) = m \log z \quad (58)$$

と書かれている。ただし，

$$z = x + iy = re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad (i^2 = -1) \quad (59)$$

である。

教科書の構成をみると「現象を捉える」ことに焦点があると思える。複素速度ポテンシャルは，速度ポテンシャル  $\phi$ ，流線関数  $\psi$  と次の関係がある。

$$w(z) = \phi + i\psi \quad (60)$$

まず，(59)式を(58)式に代入して

$$w(z) = m \log(re^{i\theta}) = m \log r + im\theta \quad (61)$$

を得る。次に，実数部が速度ポテンシャルであることから

$$\phi = m \log r \quad (62)$$

を得る。本法は，(58)式が分かると問題が解ける（速度ポテンシャルが求まる）巧いやり方である。

しかし，なぜ？「(58)式が吹き出しの複素速度ポテンシャルを表すのか？」と疑問に思うであろう。この解明には流体の本質を表わす連続の式（ラプラスの方程式）を考える必要がある。この手助けとなるのが偏微分方程式の解法である。ここでは，境界条件が設定し易いように  $\{x = r \cos \theta, y = r \sin \theta\}$  と変数変換を行った2次元の極座標  $(r, \theta)$  で取り扱う。

{Appendix-1} 参照

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (63)$$

吹き出し流れは，図 16 に示すように半径方向の速度  $v_r$  のみ存在し，円周方向の速度  $v_\theta$  が零の流場である。つまり，速度ポテンシャルは，半径  $r$  のみの関数  $\{\phi(r, \theta) \rightarrow \phi(r)\}$  であることが容易に想像される。従って，(63)式から半径  $r$  のみの関数で構成される

$$r^2 \frac{d^2 \phi}{dr^2} + r \frac{d\phi}{dr} = 0 \quad (64)$$

を満足する解を求める。

この微分方程式は，二階の偏導関数に2次の変数と一階の偏導関数に1次の変数が掛っているオイラー (Euler) 型と呼ばれるものである。これは，基本となる微分方程式の一つである。

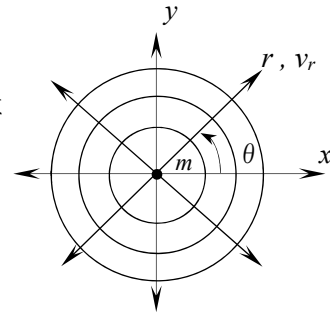


図 16 吹き出し流れ

## 【解法】

オイラー型であるので,  $r = e^t$  (65) とおく。

また, (65)式の変形  $t = \log r$  から  $\frac{dt}{dr} = \frac{1}{r} = e^{-t}$  である。

よって

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{dr} = \dot{\phi} e^{-t} = \frac{1}{r} \dot{\phi} \quad (66)$$

が得られる。

ただし,  $\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt}$  である。これから

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi}{dr^2} &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{d\phi}{dr} \right\} \frac{dt}{dr} = \frac{d}{dt} \{ \dot{\phi} e^{-t} \} \frac{dt}{dr} \\ &= \{ \ddot{\phi} e^{-t} - \dot{\phi} e^{-t} \} \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2} (\ddot{\phi} - \dot{\phi}) \end{aligned} \quad (67)$$

を得る。(66), (67)式を(64)式に代入して

$$\ddot{\phi} = 0 \quad (68)$$

となる。これを変数  $t$  で 2 回積分して次式を得る。

$$\phi(r) = at + b = a \log r + b \quad (69)$$

ただし,  $a, b$  は定数である。

## 【定数の決定】

境界条件は, 半径方向のみの流れである。よって, (64)式は, 境界条件を満足している。

$a, b$  は任意の定数であるので, ここでは,  $b = 0$  を採用する (結果に影響しない)。

定数  $a$  について物理的な意味を考える。半径方向の流速  $v_r$  は

$$v_r = \frac{d\phi}{dr} = \frac{a}{r} \quad (70)$$

である。2 次元吹き出し流量  $Q [m^2/s]$  は,  $v_r$  を全周積分することによって

$$Q = \int_0^{2\pi} v_r r d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{a}{r} r d\theta = 2\pi a \quad (71)$$

と求まる。



ここで、単位時間当たりの流量を  $m$  {「吹き出し強さ」と呼ぶ} とすると

$$a = \frac{m}{2\pi} \quad (72)$$

となる。よって、速度ポテンシャルは

$$\phi(r) = \frac{m}{2\pi} \log r \quad (73)$$

である。

一方、流線関数はラプラスの方程式を満足し、かつ、コーシー・リーマン(*Cauchy-Riemann*)の関係から速度ポテンシャルと直交する。また、 $r$  と  $\theta$  も直交関係にある。よって、流線関数での吹き出し流を満足する方程式は、ラプラスの方程式の  $\theta$  のみが寄与する

$$\frac{d^2\psi}{d\theta^2} = 0 \quad (74)$$

となる。この解は

$$\psi(\theta) = a\theta + b \quad (75)$$

である。速度ポテンシャルでの定数  $(a, b)$  の決定と同様に吹き出し強さ  $m$  を用いて

$$\psi(\theta) = \frac{m}{2\pi} \theta \quad \left( \because v_r = \frac{1}{r} \frac{d\psi}{d\theta} = \frac{a}{r} \right) \quad (76)$$

を得る。以上より、複素速度ポテンシャル  $w(z)$  は、(73), (76)式から

$$\begin{aligned} w(z) &= \phi(r) + i\psi(\theta) = \frac{m}{2\pi} (\log r + i\theta) \\ &= \frac{m}{2\pi} \log(re^{i\theta}) \quad (\because z = re^{i\theta}) \\ &= m' \log z \quad \left( m' = \frac{m}{2\pi} \right) \end{aligned} \quad (77)$$

である。これは、線形微分方程式が持つ、素解の重ね合わせによって解を組み立てる好例である。また、得られた結果(数式)の物理的な意味を思索する好例でもある。

【コーシー・リーマン(*Cauchy-Riemann*)の関係式】

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \\ v_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} \\ v_\theta &= \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

【おまけ】教科書 pp. 60

吹き出し流れの「等ポテンシャル線  $\phi = c$  は、 $r = c$  (一定) の原点を中心とする同心円の曲線を表し、流線を与える  $\psi = c$  は  $\theta = c$  (一定) で原点から放射状に引かれた直線を表す。」の解説

1)  $\phi = m \log r = c$  (一定) の曲線群の直交座標  $(x, y)$  での表し方

$\log r$  が一定となる条件は  $r$  が一定 ( $r = e^c = c$ ,  $e^c$  は定数なので  $c$  とおく), つまり,  $r = c$  を満足すれば良い。また,  $(x, y)$  と  $(r, \theta)$  の関係は

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

である。 $r = c$  は

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = c \quad (80)$$

となる。これは、原点を中心とする半径  $c$  の円である。よって、 $c$  の値が変化した曲線群は、原点を中心とする同心円となる (図 16 参照)。

2)  $\psi = m\theta = c$  (一定) の曲線群：流線関数が一定の曲線群は、流線 (流れ場) を表す。  
(79)式から

$$m\theta = m \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = c \quad (81)$$

となる。

$$\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{c}{m} = c \quad (82) \quad \left(\frac{c}{m} = \text{定数であるので, } c \text{ と置く}\right)$$

(82)式の両辺のタンジェント ( $\tan$ ) をとると

$$\begin{aligned} \tan\left\{\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right\} &= \tan c \\ \frac{y}{x} &= \tan c \end{aligned} \quad (83)$$

となる。これは、 $y = x \tan c$  の直線である。  
よって、 $c$  の値が変化した曲線群は、図 16 に示すように  
原点から放射状に引かれた傾きが  $\tan c$  の直線群となる。

【Note 3】 $\psi = c$  の意味

流線は、図 17 に示すように流速  $U$  の接線ベクトルである。

つまり、 $\tan \theta = \frac{v}{u} = \frac{dy}{dx} \rightarrow udy - vdx = 0$  (a) で表される。

一方、流線関数の全微分は、(78)式の *Cauchy-Riemann* の関係から

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -vdx + udy \quad (b)$$

となる。これは、(a)式から  $d\psi = 0$  (c)

を満足する。よって、 $\psi = c$  (d)

は、流線を表す。■

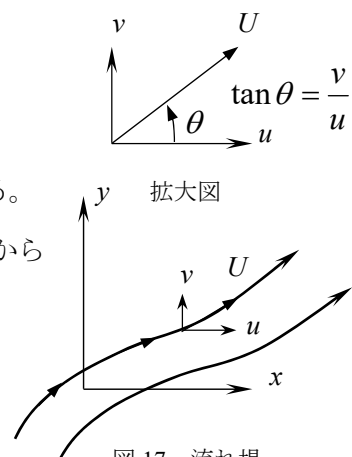


図 17 流れ場

## 7 組み合わせ流れ

### 7.1 二つの渦糸

同一強さ  $\Gamma$  で回転方向が正反対の二つの渦糸が  $2\ell$  の間隔で並んでいる場合（左側に時計回り  $-\Gamma$ ，右側に反時計回り  $\Gamma$ ）の流れ場を求める。この複素速度ポテンシャルは {符号に注意！【Note 2】参照}

(時計回り) (反時計回り)

$$w(z) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \log(z + \ell) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log(z - \ell) \quad (84)$$

である。ここで、 $z + \ell = r_2 e^{i\theta_2}$ ， $z - \ell = r_1 e^{i\theta_1}$  (85)

と置くと(84)式は

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{i\Gamma}{2\pi} \log(r_2 e^{i\theta_2}) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log(r_1 e^{i\theta_1}) \\ &= \frac{\Gamma}{2\pi} (\theta_1 - \theta_2) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \log \frac{r_2}{r_1} \end{aligned} \quad (86)$$

と変換される。流線関数  $\psi$  は、(86)式の虚数部から

$$\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \log \frac{r_2}{r_1} \quad (87)$$

である。流線は、 $\psi = c$  (一定) で求められる。これは、(87)式から  $\frac{r_2}{r_1} = c$  の曲線群を求めれば良いことが分かる。

【曲線群の求め方】

図 19 から  $r_1 = \sqrt{(x - \ell)^2 + y^2}$ ， $r_2 = \sqrt{(x + \ell)^2 + y^2}$  である。

$$\text{よって, } \frac{r_2}{r_1} = \frac{\sqrt{(x + \ell)^2 + y^2}}{\sqrt{(x - \ell)^2 + y^2}} = c \quad (88)$$

の  $c$  が変化した曲線群を求めることになる。(88)式より最終的に  $\left(\frac{1 - c^2}{1 + c^2} = c\right)$  と置くと)

$$(x \pm c\ell)^2 + y^2 = \ell^2 (c^2 - 1) \quad (89)$$

となる。これは、中心が  $(\mp c\ell, 0)$  にある二つの円を表す。また、半径は正であることから  $(|c| \geq 1)$  の条件が付く。これは、 $x$  軸上の中心位置が半径より大きいことを意味する。つまり、図 20 に示すように右側 ( $x \geq 0$ ) の円は、常に右側にある。これは、アポロニウスの円と呼ばれる。

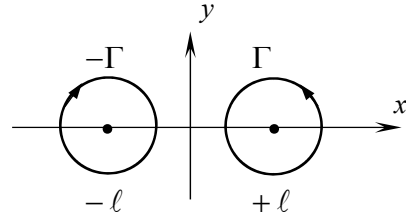


図 18 二つの渦糸

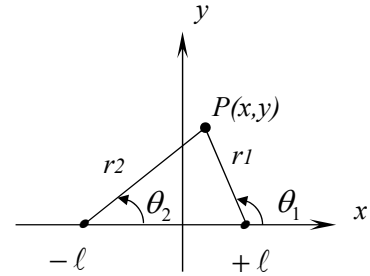


図 19 座標系

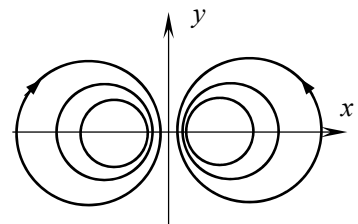


図 20 二つの渦糸の流れ

## 7.2 吹き出しと渦糸

強さ  $m$  の吹き出しと強さ  $\Gamma$  (反時計回り) の渦糸が原点にある場合 (図 21) の流れ場を求める。

この複素速度ポテンシャルは

$$w(z) = m \log z - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log z \quad (90)$$

である。  $z = re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  から

$$w(z) = m \log r + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta + i \left\{ m\theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \log r \right\} \quad (91)$$

と変換される。流線関数  $\psi$  は, (91)式の虚数部から

$$\psi = m\theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \log r \quad (92)$$

である。流線は  $\psi = c$  (一定) で求められる【Note 3】参照。

$$\log r = 2\pi \frac{m\theta - c}{\Gamma} = c\theta + d \quad \left( \because \frac{2\pi m}{\Gamma} = c, \frac{-2\pi c}{\Gamma} = d \right) \quad (93)$$

$c, d$  は任意の定数である。よって, (93)式は

$$r = e^{c\theta} \quad (94)$$

の曲線群を求めれば良い ( $d=0$  でも良い)。

### 【曲線群の求め方】

(94)式は  $(x, y)$  での関数表示よりも,  $\theta$  を媒介変数とした  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  での極座標表示が容易である。つまり, (94)式から

$$\left. \begin{aligned} x &= e^{c\theta} \cos \theta \\ y &= e^{c\theta} \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

が得られる。

(95)式は, 図 22 に示すように回転( $\theta$ の増加)と共に半径が指数関数的に大きくなることを表している。

因みに, 蚊取り線香の渦巻は, 図 22 とは異なり,

回転( $\theta$ )に比例して半径が大きくなる( $r = c\theta$ )。

$r = c\theta$  は, アルキメデスの渦巻き線と呼ばれる。

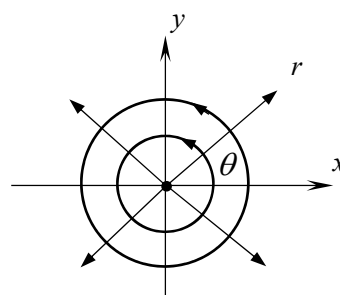


図 21 吹き出しと渦糸

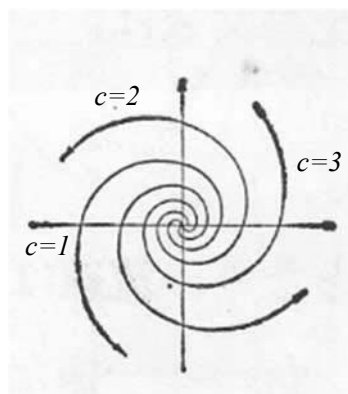


図 22 吹き出しと渦糸の流れ

## 8 テーラー展開

テーラー(Taylor)展開は、関数  $f(x)$  を多項式で近似して表すことができ、応用上有用である。図 23 に示す  $x$  から微小距離  $dx$  離れた位置での  $f(x+dx)$  は

$$f(x+dx) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{dx^2}{2} + \cdots + \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \frac{dx^n}{n!} \quad (96)$$

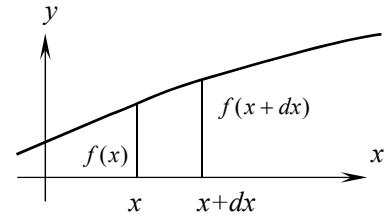


図 23 座標系

である。これは、 $f(x)$  を既知として  $\frac{\partial f}{\partial x}$  が傾きであり、 $dx$  が変化量を表す。つまり、 $\frac{\partial f}{\partial x} dx$  は、直線を表す。また、その他の項は、2 次以上の高次の項を表す。最終的には  $dx \rightarrow 0$  での極限を取り、微分の原理から 2 次以上の高次の項がすべて消えることになる。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{dx \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{dx}{2} - \cdots - \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \frac{dx^{n-1}}{n!} \right\} \quad (97)$$

工学（流体力学）では、最初から微小距離  $dx$  離れた位置での関数  $f(x+dx)$  を直線近似で表すことが多い。

$$f(x+dx) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x} dx \quad (98)$$

## 【例 1：静水圧】

図 24 に示す微小深さ  $dz$  での圧力  $p(z+dz)$ ：{(16)式参照}

$$p(z+dz) = p(z) + \frac{\partial p}{\partial z} dz \quad (99)$$

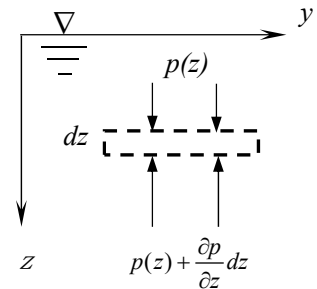


図 24 微小深さでの静水圧

## 【例 2：オイラーの運動方程式での圧力項】

微小体積  $dx dy dz$  において図 25 に示す検査面  $(x y)$  での  $A$  側に働く圧力を  $p(x)$  とする。一方、 $A$  から微小距離  $dx$  だけ離れた  $B$  側の圧力は、(98)式から

$$p(x+dx) = p(x) + \frac{\partial p}{\partial x} dx \quad (100)$$

となる。 $A$  側( $dy dz$  面)と  $B$  側( $dy dz$  面)に働く力の和が検査面に作用する  $x$  方向の力となる。座標系の向きを正 (+) として、(100)式から

$$p(x) dy dz - p(x+dx) dy dz = - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz \quad (101)$$

(-) の符号となる。

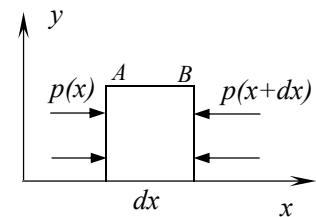


図 25 圧力が働く検査面

## 9 オイラーの運動方程式

ニュートン(Newton)の第二法則(力=質量×加速度)から出発してオイラー(Euler)の運動方程式を導く過程の解説を行う。つまり、オイラーの運動方程式における「質量」、「加速度」の定義および取り入れた「力」がどのような仮定で成り立っているかの解説である。

### 9.1 質量

流場の検査体積に微小体積(立方体)を取ると

$$dv = dx dy dz \quad (102)$$

である。検査体積での微小流体の質量  $m$  は

$$m = \rho dv = \rho dx dy dz \quad (103)$$

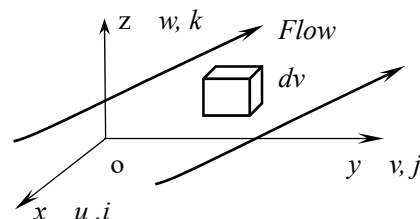


図 26 座標系

と定義される。ただし、 $\rho$  は流体の密度である。 $u, v, w$  はそれぞれ  $x, y, z$  軸方向の速度である。また、 $i, j, k$  はそれぞれ  $x, y, z$  軸方向の単位ベクトルである。

### 9.2 加速度

流体の場合、粒子の速度が時間、場所によって変化する。つまり、流体の変形による加速度を考慮する必要がある。図 26 に示す座標系の  $x$  軸方向( $u$  成分)の加速度について解説する。微小時間  $dt$  後の速度場は、テーラー展開での高次の項を省略して {(98)式参照}

$$u(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt) = u(x, y, z, t) + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz + \frac{\partial u}{\partial t} dt \quad (104)$$

となる。 $x$  軸方向の加速度  $a_x$  は、時間項を第一項、次に  $x, y, z$  項の順に

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{u(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt) - u(x, y, z, t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \quad (105)$$

となる。

$$(\because u = \frac{dx}{dt}, v = \frac{dy}{dt}, w = \frac{dz}{dt})$$

同様に  $y, z$  軸方向の加速度は

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \quad (106)$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \quad (107)$$

である。

右辺第 1 項は、時間的な変化で生じる加速度で局所加速度(local acceleration)という。残り

の項は、変形による加速度で対流加速度 (convective acceleration) という。両者の合計として流体の加速度が求められ、実質加速度(substantial acceleration)という。また、(108)式は微分演算子で実質微分 (substantial derivative) という。

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (108)$$

### 9.3 力

「9.1 質量」で定義した微小流体に作用する力を考える。周知のことであるがオイラーの運動方程式は、粘性の影響を無視した理想流体の流れを表す。この方程式の成り立ちを考えるうえで、粘性の影響 (せん断力) を取り入れたモデルから出発して、最終的にこれを省略した場合がオイラーの運動方程式であることを示す。これは後のナビエ・ストークスの運動方程式へと繋がるのが期待される。よって、ここで取り入れた力は

- 1) 慣性力 (加速度による力)
- 2) 体積力 (外部から加わる力, 例: 重力等)
- 3) 流体の伸縮変形に抗する力 (面と垂直に作用する力)
- 4) 流体のせん断変形に抗する力 (面と平行に作用する力)

である。流体の伸縮変形, せん断変形に抗する力には微小流体に作用する内部応力を考える。内部応力は, 図 27 に示すように  $x$  軸に垂直な面に作用する垂直応力を  $\sigma_x$ , この面内で  $y$  軸方向と  $z$  軸方向に作用するせん断応力を  $\tau_{xy}, \tau_{xz}$  と定義する。 $\tau$  の添え字は, 前が軸に垂直

な面, 後が方向を意味する。

例  $\tau_{xy}$   
( $x$  軸に垂直な面)の( $y$  方向)  
に働く, せん断応力。

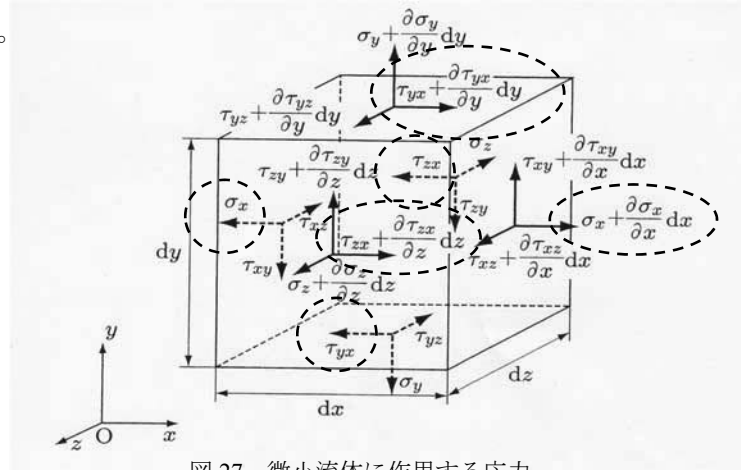


図 27 微小流体に作用する応力

微小流体の  $x$  軸方向の力は, それぞれの面に働く内部応力 (図 27 の破線部) による力 (= 応力 × 面積) の和から座標系の向きを正として

$$\begin{aligned} & (\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx) dy dz - \sigma_x dy dz + (\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy) dx dz - \tau_{yx} dx dz \\ & + (\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz) dx dy - \tau_{zx} dx dy = (\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}) dx dy dz \end{aligned} \quad (109)$$

である。

同様に  $y, z$  軸方向の力は、それぞれ

$$\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right) dx dy dz, \quad \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}\right) dx dy dz \quad (110)$$

である。ここで、垂直応力には圧力  $\{-p : (-)$ の意味は、8 テーラー展開の(101)式 参照}と軸の垂直面の軸方向の変形(伸縮変形という)に抗するせん断応力の二つを考える。

$x, y, z$  軸の垂直応力は、次式で与えられる。

$$\sigma_x = -p + \tau_{xx}, \quad \sigma_y = -p + \tau_{yy}, \quad \sigma_z = -p + \tau_{zz} \quad (111)$$

以上、微小流体の  $x$  軸方向の運動方程式は、ニュートンの第二法則に従い、慣性力、体積力と内部応力から

$$\rho dx dy dz \frac{Du}{Dt} = \rho dx dy dz F_x + \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) dx dy dz \quad (112)$$

となる。(111)式を(112)式に代入し、さらに両辺を  $\rho dx dy dz$  で除する。最終的に  $x, y, z$  軸方向の運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + F_x + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \\ \frac{Dv}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + F_y + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \\ \frac{Dw}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + F_z + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (113)$$

である。(113)式をコーシーの運動方程式(Cauchy's equation of motion)という。左辺が慣性項を意味し、右辺の第1項が圧力項、第2項が体積力項または質量項と第3項が応力による力をまとめて粘性力項という。オイラーの運動方程式は、理想流体の条件から粘性力項

( $\tau_{xx}, \tau_{yx}, \tau_{zx}$ ) を省略した

$$\left. \begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + F_x \\ \frac{Dv}{Dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + F_y \\ \frac{Dw}{Dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + F_z \end{aligned} \right\} \quad (114)$$

である。

【注意！】ここでは、便宜上、コーシーの運動方程式での粘性力項の省略形がオイラーの運動方程式と一致することを示したが、両者は、それぞれ独自に導かれたものである。



## 【考察】

粘性流場 {せん断応力 ( $\tau_{xx}, \tau_{yx}, \tau_{zx}$ ) のある流場} と理想流体の流場

## 【粘性流場】

物体を過ぎる流れは、物体表面で速度が零となり物体から離れると一様流に近づく。これは、図 28 に示すような速度勾配を持った流れでモデル化される。この場合、せん断応力  $\tau$  は速度勾配に比例すると仮定して(115)式で表わされる。

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (115)$$

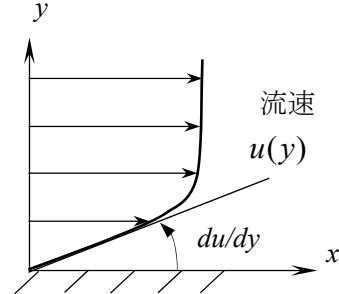


図 28 速度分布モデル

この式をニュートンの粘性法則(Newton's law of viscosity)という。ここでの比例定数  $\mu$  は粘度(viscosity)または粘性係数(coefficient of viscosity)という。単位は、 $[Pa \cdot s]$  である。また、流体の粘度  $\mu$  を密度  $\rho$  で割った値  $\nu$  を動粘度(kinematic viscosity), または、動粘性係数(coefficient of kinematic viscosity)という。単位は、 $[m^2 / s]$  である。

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (116) \quad \left( \because \nu = \frac{N \cdot s}{m^2} / \frac{kg}{m^3} = \frac{kg \cdot m \cdot s}{m^2 s^2} / \frac{kg}{m^3} = m^2 / s \right)$$

せん断応力は一様流に達するまでの速度分布の層(境界層厚さ)が薄い程、小さくなることが分かる。また、(113)式の粘性力項について「変形速度とせん断応力」の関係から「せん断応力」を速度で表したものをナビエ・ストークスの運動方程式という。{Appendix-5} 参照

## 【理想流体の流場】

オイラーの運動方程式では、粘性の影響を無視した流場、つまり、図 29 に示す速度勾配が零(境界層厚さが零)の流場を想定している。これは、現実的にはあり得ないが物体表面から一様流速(ただし、表面では零)が始まる流れである。加えて、物体の後方で観測される流体の剥離(渦等)が無いことを意味している。これは、図 30 に示す角のある物体でも物体表面上で常に物体に沿った流れとなる。理想流体での解析の利点は、剥離が無い流場では、物体から少し離れた所では一様流となり現実と近い流場の解析が行え、現象を定性的に捉えることができる。しかし、理想流体でも加速度の対流項が非線形となり、特別な場合を除いて解析解を得ることが難しい問題もある。

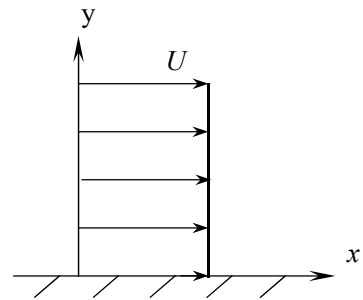


図 29 理想流体の速度分布

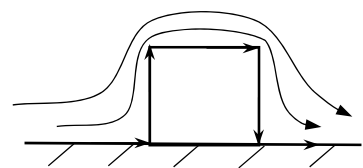


図 30 理想流体の流れ例

## 10 ベルヌーイの定理

『エネルギーとは、力を運動方向に積分したものである。』例えば、質量  $m$  の物体が地上から高さ  $h$  にある時のエネルギーは、働く力が保存力  $\{f = mg\}$  のみであるからこれを地面から高さ方向( $z$ )に積分して

$$U = \int_0^h f dz = mgh \quad (117)$$

を得る。これは、位置エネルギーと呼ばれる。また、運動中のエネルギーは、運動の方向を  $x$  とすると働く力が  $\{f = m\ddot{x}\}$  であることから（部分積分を実行して）

$$E = \int f dx = \int m\ddot{x} dx = m \int \ddot{x} \frac{dx}{dt} dt = m \int \ddot{x} \dot{x} dt = m \left\{ \frac{1}{2} \dot{x}^2 \right\} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m u^2 \quad (\because \dot{x} = \frac{dx}{dt} = u) \quad (118)$$

を得る。これは、運動エネルギーと呼ばれる。

ここでは、(114)式のオイラーの運動方程式を流線方向に変換したものを考える。運動の方向を図 31 に示す流線に沿って  $s$  とする。そして、流線方向の速度を  $V$  とする。また、作用する外力は、重力  $g$ （下向き）のみである。

従って、流線方向のオイラーの運動方程式は

$$\frac{DV}{Dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial s} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \cos \theta \quad (119)$$

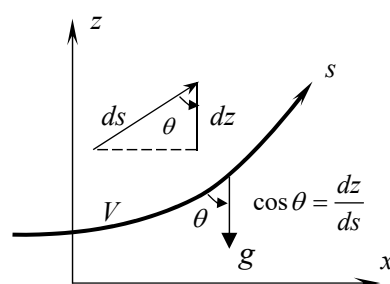


図 31 座標系

である。

【加速度項の変形と  $\cos \theta$  の関係】

まず、加速度の第 1 項は、非定常項（時間に依存する項）であるが、速度ポテンシャル  $\phi(s, t)$  を用いて

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \phi}{\partial s} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad (\because V = \frac{\partial \phi}{\partial s}) \quad (120)$$

と表される。次に第 2 項は

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{V^2}{2} \right) = V \frac{\partial V}{\partial s} \quad (121)$$

と変形される。また、図 31 に示すように

$$\cos \theta = \frac{dz}{ds} \quad (122)$$

の関係がある。これらを(119)式に代入して流線  $s$  に沿った運動方程式は

$$\frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right\} = 0 \quad (123)$$

と表される。これを流線  $s$  に沿って、密度  $\rho$  を一定として積分すると

$$\int \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right\} ds = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = c \quad (124)$$

非定常のベルヌーイの式が得られる。ただし、 $c$  は積分定数である。さらに、定常状態では

$$\frac{1}{2} \rho V^2 + p + \rho gz = c \quad (125)$$

である。

(125)式の第1項は、流体の単位質量当たりの運動エネルギー(kinematic energy)である。第2項は、圧力エネルギー(pressure energy)である。第3項は、位置エネルギー(potential energy)である。全項の和を全エネルギー(total energy)という。つまり、(125)式は、流線に沿った全エネルギーが一定であることを示している(エネルギー保存の法則)。これは、流速が速くなると圧力が下がることを意味している。

また、(125)式で流速が  $V=0$  となる静止状態での圧力を  $p_0$  とすると

$$p_0 + \rho gz = c \quad (126)$$

となる。これを(125)式代入すると

$$\frac{1}{2} \rho V^2 + p + \cancel{\rho gz} = p_0 + \cancel{\rho gz} \quad (127)$$

となる。すなわち

$$\frac{1}{2} \rho V^2 + p = p_0 \quad (128)$$

流れの中の任意点の圧力は、静止状態の圧力を基準(零点)にすることにより、高さの影響が無くなる。(128)式の第1項は動圧(dynamic pressure)、第2項は静圧(static pressure)と呼ばれる。右辺は全圧(total pressure)、または、よどみ圧(stagnation pressure)と呼ばれる。

飛行機の手速度  $V_1$  を測る装置としてピトー管がある。これは、図 32 に示す U 字管マノメータの液面差  $h$  から速度  $V_1$  を求めるものである。この装置の要点は、点 2 でせき止められた流れが点 3 (穴) では、流れが回復して速度、圧力が点 1 と同じになることである。ただし、U 字管マノメータ内の液体密度は  $\rho_L$  である。点 1 と点 2 間では、(128)式から

$$\frac{1}{2} \rho V_1^2 + p_1 = p_2 \quad (\because V_2 = 0) \quad (129)$$

である。また、U 字管マノメータ内の圧力差は

$$p_2 - p_1 = \rho_L gh \quad (\because p_3 = p_1) \quad (130)$$

である。よって、(129)式と(130)式から

$$V_1 = \sqrt{\frac{2\rho_L gh}{\rho}} \quad (131)$$

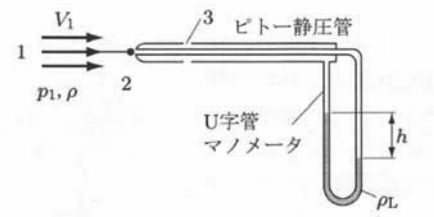


図 32 ピトー管

となる。(129)式の  $\rho V_1^2/2$  が動圧であり、 $p_1$  が静圧である。 $p_2$  は全圧(よどみ圧)である。

## 【練習問題】

図 33 に示す水槽の水が無くなる時刻  $t$  を求めよ。

ここでは、水槽の断面積を  $A$ 、流出口の断面積を  $a$  とする。ただし、 $A \gg a$  である。また、時刻  $t=0$  での水面高さを  $h$  とする。 $p_o$  は大気圧である。

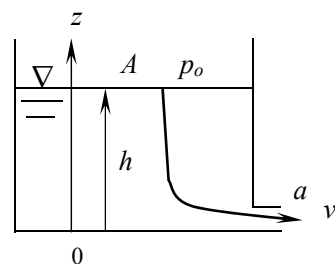


図 33 水槽からの流体の流出

## 【考え方】

まず、ベルヌーイの定理から出口の流出速度  $v$  を求める。

水槽水面の降下速度を  $w$  とし、出口の流出速度を  $v$  とする。ベルヌーイの定理(125)式から水面と出口の流線では

$$p_o + \frac{1}{2} \rho w^2 + \rho g z = p_o + \frac{1}{2} \rho v^2 \quad (132)$$

が成り立つ。また、連続の式から  $Aw = av$  である。 $w = av/A$  を(132)式に代入して

$$v = \sqrt{\frac{2gz}{1 - (a/A)^2}} = \sqrt{2gz} \quad (\because A \gg a) \quad (133)$$

が得られる。

次に、単位時間当たりの水槽体積  $V$  の減少量は、流出量と等しいことから問題を解く。

これを定式化すると

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -av \quad (134)$$

である。ただし、 $V = Az(t)$ 、 $v = \sqrt{2gz(t)}$  である。これらを(134)式に代入して

$$A \frac{dz}{dt} = -a\sqrt{2gz} \quad (135)$$

となる。係数を整理して

$$\frac{dz}{dt} = -\alpha\sqrt{z} \quad (136)$$

となる。ただし、 $\alpha = \frac{a}{A}\sqrt{2g}$  (137)

【解法】(136)式はベルヌーイ型の微分方程式である ( $u = z^{1-n}$ )。

$n = 1/2$  より  $u = \sqrt{z}$  と置く。さらに、これを両辺時間  $t$  で微分して

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{z}} \frac{dz}{dt} \quad (138)$$

が得られる。これに(136)式を代入して

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\alpha}{2} \quad (139)$$

となる。

両辺積分して

$$u = -\frac{\alpha}{2}t + c \quad (140)$$

を得る。ただし、 $c$  は初期条件で決まる定数である。

初期条件は  $t=0$  のとき  $u = \sqrt{z} = \sqrt{h}$  である。初期条件を満足した解は

$$u = -\frac{\alpha}{2}t + \sqrt{h} \quad (141)$$

である。よって、 $u=0$  となる時刻  $t_0$  は

$$t_0 = \frac{2}{\alpha}\sqrt{h} = \frac{A}{a}\sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (142)$$

【考察】水の勢い

出口流速  $v$  は、 $u = \sqrt{z}$  から(133)式に(141)式を代入して

$$v = \sqrt{2gh} - \frac{a}{A}gt \quad (\because \alpha = \frac{a}{A}\sqrt{2g}) \quad (143)$$

と時間  $t$  の一次関数として求まる。

ここでは、大胆な仮定を取り入れて出口での水の勢について考察する。これの評価値として高さ  $H$  から床に到達する水の水平到達距離  $L(t)$  を選ぶ。まずは、水流の落下時間を  $\Delta t$  として時刻  $t$  を離散値化 ( $t = t_n + \Delta t$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ) する。そして、 $\Delta t$  を微小として、この間の流出速度を一定とする (図 35 参照)。次に、 $\Delta t$  内の時刻を連続の  $t'$  として、初期水平速度  $v_o$  が与えられた質点の自由落下問題として解く。つまり、準定常的に時刻  $t_n$  を初期時間として、順次、一定の初期速度  $v_o(t_n)$  が与えられる質点の自由落下問題として解くのである。

流体に関する仮定は、以下である。

- (1) 空気、水の摩擦の影響を無視する。
- (2) 完全流体として出口部の縮流を無視する。
- (3) 流体の先端部を質量  $m$  の質点とする。

出口を原点にした座標系を図 34 に示す。

質点の運動は、自由落下運動より(144)式である。

$$\left. \begin{aligned} x &= v_o t' & (\because m\ddot{x} &= 0, \dot{x}(0) = v_o, x(0) = 0) \\ y &= \frac{1}{2}gt'^2 & (\because m\ddot{y} &= mg, \dot{y}(0) = 0, y(0) = 0) \end{aligned} \right\} \quad (144)$$

質点が床 ( $y = H$ ) に到達する時刻は  $t' = \sqrt{2H/g}$  である。

時刻  $t_n$  での水平到達距離  $L(t_n)$  は

$$L(t_n) = v_o t' = \left(\sqrt{2gh} - \frac{a}{A}gt_n\right)\sqrt{2H/g} \quad (145)$$

と求まる。初期 ( $t_n = 0$ ) の水平到達距離は  $2\sqrt{Hh}$  である。これは、理想状態での最大到達距離である。現実では、摩擦や出口部の縮流影響でこれより小さくなる。

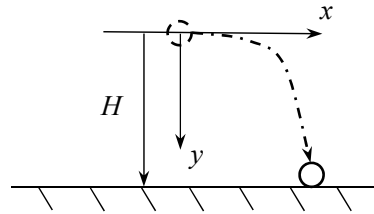


図 34 水流の落下

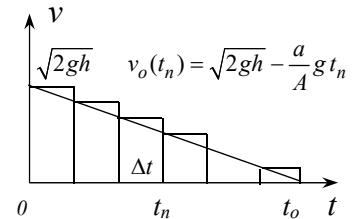


図 35 流出速度の離散化

## 11 運動量理論

運動量理論(momentum theory) は取り扱いが簡単であり, 理想状態での流体力を求めることができる。ここでは, いくつかの例題を挙げて, この応用法をを解説する。

力  $f$  は, ニュートンの第二法則から

$$f = \frac{d}{dt}(mu) \quad (146)$$

である。ただし,  $m$  は質量,  $u$  は速度である。

図 36 に示す増速流れ場で検査面 1 と 2 (それぞれの断面積を  $A_1$ ,  $A_2$  とする) を取る。検査面の位置は, 何処でも良い。検査面を通過する流体の質量は, 流速  $u$  に断面積  $A$  を掛けた流量  $Q [m^3/s]$  にさらに流体の密度  $\rho [kg/m^3]$  を掛けた量  $[kg/s]$  となる。これは, 次元解析から単位時間当たりの質量であることが分かる。また, 検査面を通過する単位時間当たりの流体の運動量は, 次元解析から

$$mu \rightarrow \rho Qu \left(\frac{kg}{m^3}\right)\left(\frac{m^3}{s}\right)\left(\frac{m}{s}\right) = kg\,m/s^2 = [N] \quad (147)$$

力  $[N]$  であることが分かる。従って, 検査面 2 と 1 の運動量の差 {増加量  $\Delta(mu)$ } は, 単位時間  $\Delta t$  当たりの運動量の変化として

$$(\rho A_2 u_2)u_2 - (\rho A_1 u_1)u_1 = \frac{\Delta(mu)}{\Delta t} = \frac{d}{dt}(mu) \quad (148)$$

となり, 検査面間に働く流体力を表す。つまり, 任意の検査面での運動量の差から流体力が得られるのである。これが運動量理論の根本原理である。

一方, 検査体積内の流体に作用する力  $f$  は, 検査面 1, 2 と物体から受ける圧力の総和であり, 摩擦力 (せん断応力) 等の無い理想状態では

$$f = \frac{d}{dt}(mu) = (\rho A_2 u_2)u_2 - (\rho A_1 u_1)u_1 = p_1 A_1 - p_2 A_2 + \iint_c p\,dA \quad (149)$$

となる。ここで, 物体に作用する流体力  $F$  は, 圧力が物体表面に垂直, 内向きに働くので {101 式参照}

$$F = -\iint p\,dA \quad (150)$$

である。以上から, 物体に作用する流体力  $F$  は, (149), (150)式から

$$F = (\rho Q_1)u_1 - (\rho Q_2)u_2 + (p_1 A_1 - p_2 A_2) \quad (151)$$

である。ただし,  $Q_1 = A_1 u_1$ ,  $Q_2 = A_2 u_2$  であり, 流量  $[m^3/s]$  を表す。

理想流体で循環の無い流れ場では, ダランベールの背理から  $F=0$  となる。これは, 上流側 (検査面 1) と下流側 (検査面 2) とで運動量および圧力の変化が無いことを意味している。また, 運動量理論は, 運動量の法則(momentum principle)とも呼ばれる。

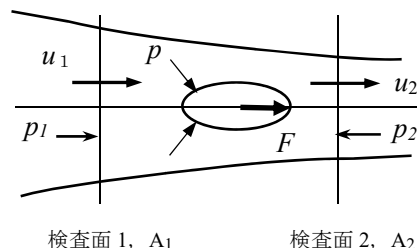


図 36 増速流れ場

【例題 1】空気中でのウォータージェットの推力  $F$ 

理想問題：壁がある場合（図 37 参照）

流速  $u$ ，流量  $Q$  の噴流が壁に当たる場合

## 【考え方】

壁に当たった噴流は壁に沿って流れ，軸方向の流速が零となる。

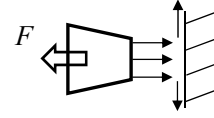
(151)式で  $u_1 = u$ ， $u_2 = 0$ ， $p_1 = p_2 = 0$ （大気圧）となり

図 37 壁にあたる噴流

$$F = \rho Qu \quad (152)$$

である。

現実問題：壁が無い場合（図 38 参照）

## 【考え方】

下流での軸方向の流速を  $u_2 = cu$  ( $0 < c < 1$ ) とする。

連続の式からどの断面でも流量が等しいので

$$F = \rho Qu(1-c) \quad (153)$$

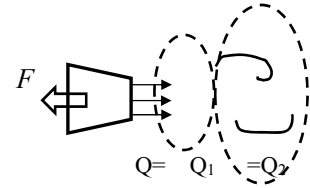


図 38 噴流による推力

が得られる。 $c$  は，減少係数で実験的に求められる。

## 【例題 2】水平曲がりパイプ内の流れ

図 39 に示す水平曲がり部に働く力  $F$  を求める。ただし，パイプの直径を  $d$ ，流量を  $Q$  とする。また，入口部と出口部の静圧を  $P_s$  とする。静圧は，パイプ内の内部抵抗（損失）を意味する。本例題は運動量理論の基礎的な手法が分かる良問である。

## 【考え方】

要点は，座標系に沿った運動量理論の適用である。

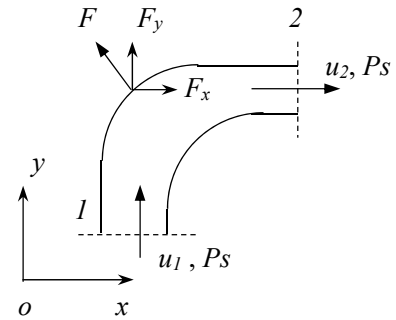
曲がり部に働く力を座標系に従って  $F_x, F_y$  とする。入口部と出口部で  $x, y$  方向に分けて(151)式を適用する。

図 39 水平曲がりパイプ

$$1) \ x \text{ 方向} \quad u_{x1} = 0, u_{x2} = u_2, p_{sx1} = 0, p_{sx2} = p_s \quad \text{ただし, } u = u_1 = u_2 = \frac{Q}{A}, A = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$F_x = \rho Q(u_{x2} - u_{x1}) + (p_{sx1} - p_{sx2})A = -(\rho Qu + p_s A) \quad (\because u_2 = u) \quad (154)$$

(一) となり座標系とは，逆向きに働く。

$$2) \ y \text{ 方向} \quad u_{y1} = u_1, u_{y2} = 0, p_{sy1} = p_s, p_{sy2} = 0$$

$$F_y = \rho Q(u_{y1} - u_{y2}) + (p_{sy1} - p_{sy2})A = \rho Qu + p_s A \quad (\because u_1 = u) \quad (155)$$

となる。求める力  $F$  は

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (156)$$

である。

### 【例題 3】プロペラの理想性能

運動量理論は、回転翼についても理想性能を求めることができる。本例題での主目的は、プロペラ位置での増速度  $u'$  と無限下流域での増速度  $u$  の関係を得ることである。加えて、プロペラの理想効率からプロペラ利用の根本原理を導くことである。

図 40 に示すように検査面を上流側、プロペラ位置と無限下流側に取り、上流側での断面積を  $A_o$ 、プロペラ位置の断面積を  $A_p$  と無限下流の断面積を  $A_\infty$  とする。また、上流側の圧力を  $p_\infty$  とし、流速を  $U$  とする。次に、プロペラ前面の圧力を  $p_F$  とし、プロペラ後面の圧力を  $p_B$  とする。そして、狙いであるプロペラ位置での流速をプロペラによって増速される流速を  $u'$  として  $U + u'$  で表す。一方、無限下流側の圧力は、十分に圧力回復が行われて上流側と等しい  $p_\infty$  とする。また、プロペラによって増速された流れが無限下流に達した時の流速を  $u$  として、ここでの流速を  $U + u$  とする。

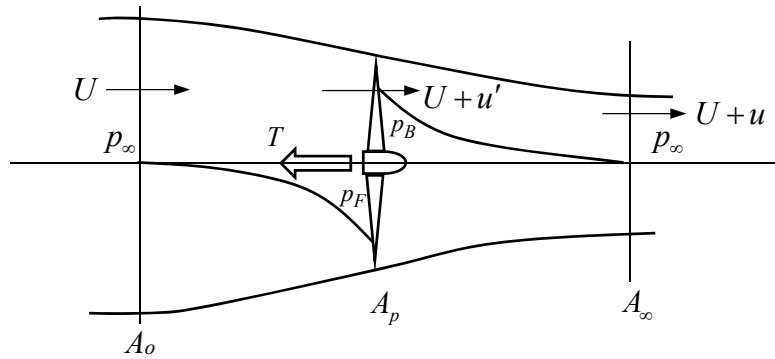


図 40 プロペラの流場モデル (増速流場)

検査面を通過する単位時間当たりの流体の質量を  $m$  とすると質量保存の法則 (連続の式) から各検査面 ( $A_o, A_p, A_\infty$ ) で

$$m = \rho A_o U = \rho A_p (U + u') = \rho A_\infty (U + u) \quad (157)$$

が成り立つ。ただし、 $\rho$  は流体の密度である。プロペラ推力  $T$  は、運動量理論から無限下流での運動量  $m(U + u)$  と上流側の運動量  $mU$  との差から

$$T = m(U + u) - mU = mu \quad (158)$$

となる。

一方、プロペラ推力  $T$  は、図 40 に示すプロペラ面での前後の圧力差からも得られる。

$$T = A_p (p_B - p_F) \quad (159)$$

当然、運動量の差から得られる推力(158)式とプロペラ面前後の圧力差から得られる推力(159)式が等しいことから

$$T = mu = \rho A_p (U + u') u = A_p (p_B - p_F) \quad (160)$$

が得られる。



(160)式から

$$p_B - p_F = \rho(U + u')u \quad (161)$$

の関係が得られる。

また、図 40 に示す上流側とプロペラ前面の流線、および、プロペラ後面と無限下流の流線についてベルヌーイの定理からそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2 &= p_F + \frac{1}{2}\rho(U + u')^2 \\ p_B + \frac{1}{2}\rho(U + u')^2 &= p_\infty + \frac{1}{2}\rho(U + u)^2 \end{aligned} \right\} \quad (162)$$

が得られる。

(162)式の両辺をそれぞれ加えて

$$p_B - p_F = \rho\left(U + \frac{u}{2}\right)u \quad (163)$$

となる。以上、(161)式と(163)式の ( ) 内の比較から

$$u' = \frac{u}{2} \quad (u = 2u') \quad (164)$$

が得られる。これは、流体の粘性等が無い理想状態では、無限下流での増速度  $u$  がプロペラ位置での増速度  $u'$  の 2 倍となる重要な関係式である。

次に、プロペラの理想効率  $\eta_i$  を求める。プロペラ効率は、流体の持つ全仕事量に対するプロペラ出力 ( $TU$ ) の割合として

$$\eta_i = \frac{TU}{TU + \frac{1}{2}mu^2} \quad (165)$$

で求められる。プロペラ推力  $T$  は、(158)式である。さらに、(164)の関係式を代入して

$$\begin{aligned} \eta_i &= \frac{muU}{muU + \frac{1}{2}mu^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\frac{u}{U}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{u'}{U}} \end{aligned} \quad (166)$$

が得られる。

これからプロペラ効率は、プロペラ位置での増速度  $u'$  が小さいほど良いことが分かる。これは、プロペラ回転数を下げることの意味している。また、回転数を下げて推力を維持するためには、プロペラ直径を大きくする必要がある。従って、プロペラ利用の根本原理は、『大きな直径でゆっくり回す』ことである。この根本原理は、運動量理論の特性から振動翼でも成り立つ。「クジラは、大きなヒレでゆっくりと動かして回遊する」のである。

## 【例題 4】風車の理想性能

風車の理想性能は、プロペラと同様に運動量理論から求めることができる。ただし、風車は流体からエネルギーを受け取るために、後流側で流体が減速することがプロペラと異なる。理論的な取り扱いでは、プロペラの増速度  $u$  を減速度  $(-u)$  として取り扱えば良いだけである。風車の流場モデルを図 41 に示す。記号の定義は、プロペラの場合と同じである。ただし、プロペラでは推力  $T$  を発生したが、風車では軸方向の抗力  $D$ （以後、軸抗力と呼ぶ）となる。また、 $\rho_a$  は空気の密度である。

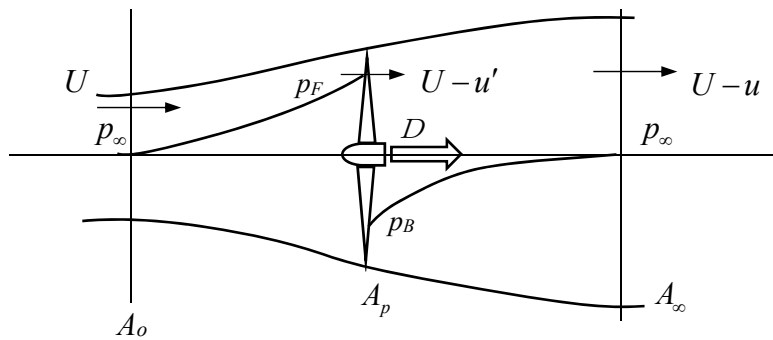


図 41 風車の流場モデル（減速流場）

風車の場合もプロペラと同様に各検査面での質量は、質量保存の法則（連続の式）から

$$m = \rho_a A_o U = \rho_a A_p (U - u') = \rho_a A_\infty (U - u) \quad (167)$$

である。運動量の差から得られる軸抗力  $D$  と風車面前後の圧力差から得られる軸抗力  $D$  が等しいことから{(160)式参照}

$$p_F - p_B = \rho_a (U - u')u \quad (168)$$

が得られる。一方、上流側と風車の前面、および、風車の後面と無限下流側との流線についてベルヌーイの定理からそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} p_\infty + \frac{1}{2} \rho_a U^2 &= p_F + \frac{1}{2} \rho_a (U - u')^2 \\ p_B + \frac{1}{2} \rho_a (U - u')^2 &= p_\infty + \frac{1}{2} \rho_a (U - u)^2 \end{aligned} \right\} \quad (169)$$

が得られる。(169)式の両辺をそれぞれ加えて

$$p_F - p_B = \rho_a \left( U - \frac{u}{2} \right) u \quad (170)$$

となる。(168)式と(170)式の ( ) 内の比較からプロペラの場合と同じ

$$u' = \frac{u}{2} \quad (171)$$

の関係式が得られる。

風車の軸抗力  $D$  は、風車面前後の圧力差から得られる。また、(171)の関係式から

$$\begin{aligned} D &= A_p(p_F - p_B) = \rho_a A_p \left(U - \frac{u}{2}\right)u \\ &= 2\rho_a A_p (U - u')u' = 2\rho_a A_p U^2 \left(1 - \frac{u'}{U}\right) \frac{u'}{U} \end{aligned} \quad (172)$$

となる。ここで、減速率  $w'$  を  $w' = \frac{u'}{U}$  とすると、風車の軸抗力  $D$  は

$$D = 2\rho_a A_p U^2 (1 - w')w' \quad (173)$$

となる。風車の出力  $L_w$  は、(173)式から

$$L_w = D(U - u') = 2\rho_a A_p U^3 (1 - w')^2 w' \quad (174)$$

である。即ち、風車の直径および風速が決まると風車の出力は、減速率  $w'$  のみの関数となる。(174)式から

$$\frac{\partial L_w}{\partial w'} = 2\rho_a A_p U^3 (1 - w')(1 - 3w') \quad (175)$$

を得る。従って、風車は減速率  $w' = 1/3$  の時に最大の出力を取り出せることができる。風車の最大出力は

$$L_{w\max} = \frac{8}{27} \rho_a A_p U^3 \quad (176)$$

である。風車の最高効率  $\eta_{\max}$  は

$$\eta_{\max} = \frac{L_{w\max}}{\frac{1}{2} \rho_a A_p U^3} = \frac{16}{27} \cong 0.593 \quad (177)$$

である。風車が自然風から取り出せる出力には限界があり、理想状態でもその 59.3% である。実際の風車では、流体の粘性等の影響で 40% に達しないこともある。風車利用の要点は、効率に理論上の上限があることと、(174)式に示すように出力が風速の 3 乗に比例するので風速変動が出力に大きく影響することである。また、風車を船舶のような運動体に利用する場合や風車の強度設計では、風車の軸抗力を把握しておく必要がある。

風車の軸抗力係数  $C_D$  は

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho_a A_p U^2} = 4(1 - w')w' \quad (178)$$

である。 $w' = 1/3$  の時には

$$C_D = \frac{8}{9} \cong 0.89 \quad (179)$$

となる。実際には、流体の粘性等の影響でさらに大きな値となる。風車は翼形状が細長く、隙間が大きく空いているように見えるが、軸抗力特性では平板 ( $C_D = 1.1 \sim 1.2$ ) が取り付けられているのと同じと変わらないことが分かる。

## Appendix-1 極座標変換

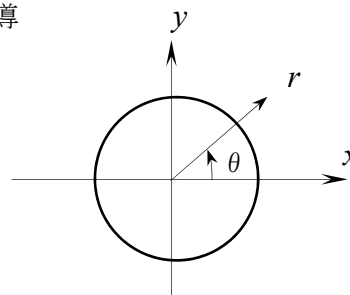
## 2次元の極座標変換

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (1.1) \text{ の誘導}$$

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (1.2)$$

から(1.3)式と変換される。

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (1.3)$$



(1.1)を導く際に(1.3)式からの変換が係数の整理が容易である。 図 1.1 2次元座標系  
ここでは、(1.3)式からの変換の解説を行う。

【計算準備】 (6), (7)式 参照

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ &= \cos \theta \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ &= \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (1.5)$$

(1.4)式をもう一回、 $x$  で偏微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\} &= \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \cos \theta \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right\} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \cos \theta \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right\} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ &= \left\{ \cos \theta \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} \right\} \cos \theta \\ &\quad + \left\{ -\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} - \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right\} \left( -\frac{\sin \theta}{r} \right) \end{aligned}$$

$$\left[ \begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \theta \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin \theta \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = -\frac{\sin \theta}{r} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{1/x}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{\cos \theta}{r} \\ \left\{ \tan^{-1} f(x) \right\}' &= \frac{f(x)'}{1 + f(x)^2} \end{aligned} \right]$$

$$= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + 2 \frac{\cos \theta \sin \theta}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - 2 \frac{\cos \theta \sin \theta}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \quad (1.6)$$

となる。また、(1.5)式をもう一回、 $y$  で偏微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\} &= \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\} \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right\} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right\} \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ &= \left\{ \sin \theta \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \frac{\cos \theta}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} \right\} \sin \theta \\ &\quad + \left\{ \cos \theta \frac{\partial \phi}{\partial r} + \sin \theta \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right\} \frac{\cos \theta}{r} \\ &= \sin^2 \theta \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - 2 \frac{\cos \theta \sin \theta}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + 2 \frac{\cos \theta \sin \theta}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \quad (1.7) \end{aligned}$$

となる。

以上 (1.6), (1.7)式の両辺を加えて

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \quad (\because \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (1.8) \end{aligned}$$

である。■

### 3次元の極座標変換（球座標への変換）

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (1.9) \quad \begin{aligned} (0 \leq \varphi \leq 2\pi) \\ (0 \leq \theta \leq \pi) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

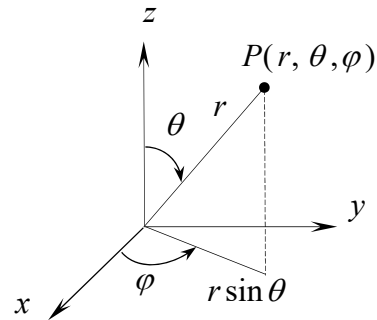


図 1.2 極座標系

$$= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \quad (1.10) \quad \text{の誘導}$$

## 【計算準備】

(1.9)式から(1.11)式と変換される。

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi &= \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \\ \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) \end{aligned} \right\} (1.11) \quad (\because r \sin \theta = \sqrt{x^2 + y^2})$$

係数の整理が容易な(1.11)式からの変換を解説する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ &= \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ &= \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \cos \theta \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad (1.14)$$

(1.12)式をもう1回,  $x$  で偏微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\} &= \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\} \sin \theta \cos \varphi + \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\} \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\} \left( -\frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \right) \end{aligned}$$

$$\left[ \begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \sin \theta \cos \varphi \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \sin \theta \sin \varphi \\ \frac{\partial r}{\partial z} &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \cos \theta \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{-(y/x^2)}{1 + (y/x)^2} = -\frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{1/x}{1 + (y/x)^2} = \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{x}{z\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{1}{1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}} \\ &= \frac{xz}{r^3 \sin \theta} = \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{yz}{r^3 \sin \theta} = \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r} \\ \frac{\partial \theta}{\partial z} &= -\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r} \end{aligned} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \sin \theta \cos \varphi \left\{ \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \cos \theta \cos \varphi \left( -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} \right) + \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \varphi} \right) \right\} \\
&\quad + \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r} \left\{ \cos \varphi \left( \cos \theta \frac{\partial \phi}{\partial r} + \sin \theta \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} \right) + \frac{\cos \varphi}{r} \left( -\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \cos \theta \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sin \varphi}{r} \left( \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial \varphi} \right) \right\} \\
&\quad + \frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \left\{ \sin \theta \left( \sin \varphi \frac{\partial \phi}{\partial r} - \cos \varphi \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \varphi} \right) + \frac{\cos \theta}{r} \left( \sin \varphi \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \cos \varphi \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial \varphi} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{r \sin \theta} \left( \cos \varphi \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} + \sin \varphi \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \right) \right\} \quad (1.15)
\end{aligned}$$

となる。(1.13)式をもう一回,  $y$  で偏微分すると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\} &= \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\
&= \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\} \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\} \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\} \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \\
&= \sin \theta \sin \varphi \left\{ \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \cos \theta \sin \varphi \left( -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} \right) + \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \left( -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \varphi} \right) \right\} \\
&\quad + \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r} \left\{ \sin \varphi \left( \cos \theta \frac{\partial \phi}{\partial r} + \sin \theta \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} \right) + \frac{\sin \varphi}{r} \left( -\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \cos \theta \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\cos \varphi}{r} \left( -\frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial \varphi} \right) \right\} \\
&\quad + \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \left\{ \sin \theta \left( \cos \varphi \frac{\partial \phi}{\partial r} + \sin \varphi \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \varphi} \right) + \frac{\cos \theta}{r} \left( \cos \varphi \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \sin \varphi \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial \varphi} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{r \sin \theta} \left( -\sin \varphi \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} + \cos \varphi \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \right) \right\} \quad (1.16)
\end{aligned}$$

となる。(1.14)式をもう一回,  $z$  で偏微分すると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial z} \right\} &= \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial z} \right\} \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial z} \right\} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial z} \right\} \cos \theta - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial z} \right\} \\
&= \cos \theta \left\{ \cos \theta \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} \right\} \\
&\quad + \frac{\sin \theta}{r} \left\{ \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial r} - \cos \theta \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right\} \quad (1.17)
\end{aligned}$$

となる。

(1.15), (1.16), (1.17)式の両辺を加えて, それぞれの項の係数を調べる。

$$1) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \rightarrow \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta = \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \cos^2 \theta = 1$$

$$2) \quad \frac{\partial \phi}{\partial r} \rightarrow \frac{1}{r} (\cos^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta) \\ = \frac{1}{r} \{ \cos^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \sin^2 \theta + (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \} = \frac{2}{r}$$

$$3) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \rightarrow \frac{1}{r^2} (\cos^2 \theta \cos^2 \varphi + \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + \sin^2 \theta) \\ = \frac{1}{r^2} \{ \cos^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \sin^2 \theta \} = \frac{1}{r^2}$$

$$4) \quad \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \rightarrow \frac{1}{r^2} \{ -2 \cos \theta \sin \theta \cos^2 \varphi + \frac{1}{\sin \theta} (\cos \theta \sin^2 \varphi + \cos \theta \cos^2 \varphi) \\ - 2 \cos \theta \sin \theta \sin^2 \varphi + 2 \cos \theta \sin \theta \} \\ = \frac{1}{r^2} \{ 2 \cos \theta \sin \theta \{ 1 - (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \} = \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta}$$

$$5) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \rightarrow \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}$$

$$6) \quad \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \rightarrow \frac{1}{r^2} \{ \cos \varphi \sin \varphi + \frac{\cos \varphi \sin \varphi (\cos^2 \theta - 1)}{\sin^2 \theta} \\ - \cos \varphi \sin \varphi - \frac{\cos \varphi \sin \varphi (\cos^2 \theta - 1)}{\sin^2 \theta} \} = 0$$

$$7) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} \rightarrow \frac{1}{r} \{ \cos \theta \sin \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) - \cos \theta \sin \theta \} = 0$$

$$8) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \varphi} \rightarrow \frac{1}{r} \{ -2 \cos \varphi \sin \varphi + 2 \cos \varphi \sin \varphi \} = 0$$

$$9) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial \varphi} \rightarrow \frac{1}{r^2 \sin \theta} \{ -\cos \theta \cos \varphi \sin \varphi - \cos \theta \cos \varphi \sin \varphi \\ + \cos \theta \cos \varphi \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi \sin \varphi \} = 0$$

以上より 3 次元の直交座標から球座標への変換は

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \quad (1.18)$$

である。■



## Appendix-2 渦まわりの流場と速度ポテンシャル

### 2.1 渦まわりの流場

渦まわりの流場を理解する方法の一つとして「竜巻」を思い浮かべると、その流場は大きく二つの部分から構成されることが想像される。一つは竜巻でいうなれば黒く見えるそれ自身であり、円周の接線速度が増す部分である。他方はその外側であり、その速度が減少する領域である。周知のように渦は、流体の粘性に起因するせん断力の限界を超えるような速度差があるとエネルギーの散逸として起こる現象であるが、これを解析的に表現することは困難である。ここでは、現実問題の特徴をモデル化して、さらに流体の粘性影響を無視したポテンシャル流れで渦まわりの流場を取り扱う方法の解説を行う。

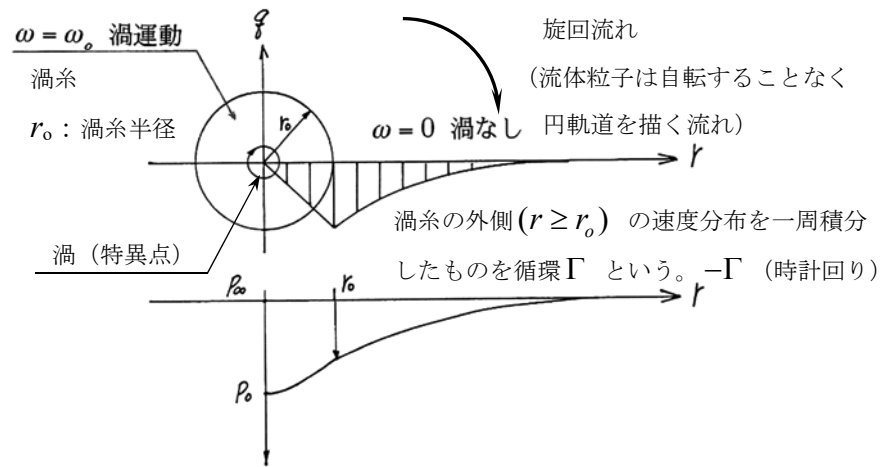


図 2.1 渦糸内とその外側の速度分布と圧力分布モデル

図 2.1 に示す流場は、円周の接線速度が増す渦運動の部分とこの外側にある無渦運動の領域をモデル化したものである。この中心を特異点として取り扱い、この特異点のことを渦という。そして、その強さを渦度という。また、円周の接線速度が増す微小半径  $r_0$  までの流れ部（管）を渦糸(vortex filament)という。その外側では無渦運動の旋回流（流体粒子は自転することなく円軌道を描く流れ）となり、この速度分布を円周方向に一周積分した量を循環  $\Gamma$  (circulation) という。この方法は、渦の影響を微小半径の渦糸内に閉じ込め、そのまわりの流場を渦無しのパテンシャル流場として取り扱う方法である。ここでの主眼は、渦糸の流体力学的性質の解説である。

以下に図 2.1 に示す流場について考察する。ある流線の圧力  $p$  とその速度  $q$  との間には流体の密度を  $\rho$ 、その総圧（全圧）を  $H$  として(128)式のベルヌーイの式から

$$p + \frac{1}{2} \rho q^2 = H \quad (2.1)$$

である。従って、半径方向  $r$  の総圧  $H$  の変化は

$$\frac{dH}{dr} = \frac{dp}{dr} + \rho q \frac{dq}{dr} \quad (2.2)$$

となる。

また、半径  $r$  での圧力変化は、その半径  $r$  での遠心力と釣り合うので

$$\frac{dp}{dr} = \rho \frac{q^2}{r} \quad (2.3)$$

(2.2)式は(2.3)式から

$$\frac{dH}{dr} = \rho q \left( \frac{q}{r} + \frac{dq}{dr} \right) \quad (2.4)$$

と表すことができる。ここで

$$\omega = \frac{q}{r} + \frac{dq}{dr} \quad (2.5)$$

のように定義した  $\omega$  を渦度という。この式が渦運動 ( $\omega = \omega_o$ ) と無渦運動 ( $\omega = 0$ ) を決める条件となる。つまり、渦運動では半径  $r$  により総圧  $H$  が変化するが、無渦運動では半径  $r$  に関係なく総圧  $H$  は一定となる。

まず、渦糸内の流場について考える。渦糸の断面が十分に小さいとすると、渦糸内で流体は渦運動を持続し、渦度は一定 ( $\omega = \omega_o$ ) と考えることができる。(2.5)式から速度  $q$  に関する微分方程式が得られる。

$$\omega_o = \frac{q}{r} + \frac{dq}{dr} \quad (2.6)$$

この解は、半径  $r$  に比例した

$$q = \frac{1}{2} \omega_o r \quad (2.7)$$

である。

#### [Note 4] 1 階の線形微分方程式の解法

まず、(2.6)式の基本解を求める。

$$\frac{dq}{dr} + \frac{q}{r} = 0 \quad \text{として変数分離を行う。}$$

この解は、容易に

$$q = \frac{c}{r} \quad (a) \quad \text{が得られる。ただし、} c \text{ は定数である。}$$

次に、この定数を  $c(r)$  とする定数変化法を用いて、(a)式を原式に代入して特解を得る。

$$q = \frac{1}{2} \omega_o r + \frac{c}{r} \quad (b) \quad \text{ただし、} c \text{ は定数である。}$$

境界条件として、 $r = 0$  で有限であることから  $c = 0$  となり、(2.7)式が得られる。■

一方、渦糸の外側では流体が無渦運動を持続するから、渦度は零( $\omega = 0$ )となる。  
この解は、基本解の(a)式となり

$$q = \frac{c}{r} \quad (2.8)$$

である。積分定数  $c$  は、渦糸の半径を  $r_o$  とすれば、 $r = r_o$  において渦糸の内外での速度が等しくなければならないので、(2.7)式と(2.8)式の  $r = r_o$  での接合（マッチング）から

$$c = \frac{1}{2} \omega_o r_o^2 \quad (2.9)$$

となる。従って、循環  $\Gamma$  {2次元の回転流量( $m^2/s$ )}は、(2.8)式を全周で積分して

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} q r d\theta = \pi r_o^2 \omega_o \quad (2.10)$$

である。循環  $\Gamma$  は、渦糸の断面積  $\pi r_o^2$  に渦度  $\omega_o$  を掛け合わせたものとなり、渦の中心からの距離  $r$  に無関係である。つまり、渦糸の外側では、循環  $\Gamma$  は渦糸のみの影響で決まり、その回転の角速度 ( $\zeta = 2\omega_o$ ) と渦の断面積 ( $\pi r_o^2$ ) との積が一定となる。流場の断面積の大きなところでは角速度が小さくなるのである。一般的な流場での渦度と循環の関係は、【Note 5】ストークスの定理を参照。

#### 【圧力分布】

まず、渦糸の外側 ( $r \geq r_o$ ) の半径  $r$  での圧力は、無限遠方 ( $u = 0$ ) での圧力を  $p_\infty$  とするとベルヌーイの式に(2.8)式を代入して

$$p + \frac{1}{2} \rho \left( \frac{c}{r} \right)^2 = p_\infty \quad (2.11)$$

である。次に、渦糸内 ( $r < r_o$ ) の圧力は、(2.3)式に(2.7)式を代入して

$$\frac{dp}{dr} = \rho \frac{1}{r} \left( \frac{1}{2} \omega_o r \right)^2 \quad (2.12)$$

となる。これを積分して

$$p = p_o + \frac{1}{8} \rho \omega_o^2 r^2 \quad (2.13)$$

を得る。ここで、 $p_o$  は未定定数（積分定数）であり、渦糸の中心  $r = 0$  での圧力を意味する。以下に、この決定方法を示す。渦糸の外側と内側の圧力が  $r = r_o$  で等しくなるためには(2.11)式と(2.13)式の  $r = r_o$  での接合（マッチング）から

$$p_o = p_\infty - \frac{1}{8} \rho \omega_o^2 r_o^2 - \frac{1}{2} \rho \left( \frac{c}{r_o} \right)^2 \quad (2.14)$$

となる。これに(2.9)式を代入して

$$p_o = p_\infty - \frac{1}{4} \rho \omega_o^2 r_o^2 \quad (2.15)$$

を得る。

(2.15)式は渦糸の中心の圧力が無限遠方の圧力  $p_{\infty}$  から  $\frac{1}{4}\rho\omega_o^2 r_o^2$  だけ低くなることを示している {図 2.1 参照}。竜巻であると黒く見える部分の半径  $r_o$  が大きく、回転角速度  $\omega_o$  が速いほど被害が大きくなることが分かる。以上が渦糸の内部および外側の速度分布と圧力分布を表す流体力学的な性質である。

【Note 5】 ストークスの定理(Stokes's theorem)

二次元流れ ( $V = iu + jv$ ) で図 2.2 に示す閉曲線  $C$  をとり、これに沿った線素を  $ds$  ( $ds = idx + jdy$ ) とすると循環  $\Gamma$  は

$$\begin{aligned}\Gamma &= \oint_C V \cdot ds = \oint_C (iu + jv)(idx + jdy) \\ &= \oint_C (udx + vdy) \quad (\because i \cdot i = 1, i \cdot j = 0) \quad (a)\end{aligned}$$

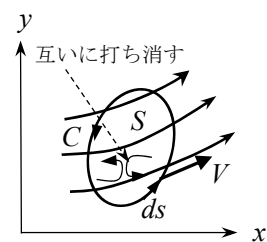


図 2.2 閉曲線に沿う循環

である。速度の線積分は、グリーンの定理(Green's theorem)から

$$\oint_C (udx + vdy) = \iint_S \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy \quad (b) \quad \text{渦度} \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

である。面積分の領域  $S$  の内部では、微小部分での速度の線積分の向きが隣接する線積分と反対であり互いに打ち消されて外側の閉曲線  $C$  に沿う線積分のみ残る。よって、『渦度の面積分は、これを取り巻く閉曲線  $C$  に沿う循環  $\Gamma$  と等しい。』これをストークスの定理という。■

## 2.2 速度ポテンシャル

渦度がいたる所で零の (流体粒子は自転しない) 流場を渦無し流れ(irrotational flow), または非回転流れという。図 2.3 の任意の点  $A, C$  を通る閉曲線  $ABCD$  に沿う速度  $V$  の線積分  $\{ABC + CDA\}$  は一周すると零となる {  $\because$  渦度  $\zeta = 0$  (b)式より }。

従って、 $CDA$  の逆の経路  $ADC$  でも

$$\int_{ABC} (udx + vdy) = -\int_{CDA} (udx + vdy) = \int_{ADC} (udx + vdy) \quad (\because \int_{ABC} + \int_{CDA} = 0) \quad (2.16)$$

となる。これより、点  $A$  から点  $C$  に至る経路は、 $ABC$  でも  $ADC$  でも良いことになる。閉曲線  $ABCD$  は、任意の曲線であるので、点  $A$  から点  $C$  までの線積分は、経路によらず 2 点  $A, C$  の位置で決まる関数であることが分かる。

以上より、 $A, C$  間の速度  $V$  の線積分は

$$\int_{\widehat{AC}} V \cdot ds = \int_{\widehat{AC}} (udx + vdy) = \int_a^c (udx + vdy) = F(c) - F(a) = \phi \quad (2.17)$$

と表すことができる。

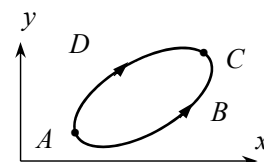


図 2.3 周積分の経路

ここで、 $\phi$  は点  $A$  と点  $C$  の位置で決まる値である。点  $A$  を基準にすると  $\phi$  は、点  $C$  の位置のみの関数になる。この関数  $\phi$  を速度ポテンシャル(velocity potential)という。また、ベクトル  $V$  に対して  $V = -\text{grad}\phi$  が成り立つようなスカラー  $\phi$  が存在するとき、 $\phi$  を  $V$  に対するスカラーポテンシャルという。 $V$  に対してスカラーポテンシャルが存在するための条件は、非回転  $\{\text{rot} V = 0\}$

$$\text{rot} V = i\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \quad (2.18)$$

である。つまり、渦無し流れであると速度  $V(u, v, w)$  は

$$V(u, v, w) = \text{grad}\phi = i\frac{\partial\phi}{\partial x} + j\frac{\partial\phi}{\partial y} + k\frac{\partial\phi}{\partial z} \quad (2.19)$$

すなわち

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial\phi}{\partial z} \quad (2.20)$$

速度ポテンシャル  $\phi$  の勾配(gradient) {方向微分:  $x$  方向の速度  $u$  は、 $\phi$  の  $x$  方向の微分} によって表される。また、「速度ポテンシャル」の名前の由来は、速度  $V$  に対するスカラーポテンシャルが存在する所以である。

#### 【速度ポテンシャルのイメージ】

速度ポテンシャル  $\phi$  は、位置  $(x, y, z)$  だけで決まる関数である。速度ポテンシャルのイメージを掴むために二次元流れ場  $(u, v)$  での  $\phi(x, y)$  の表示例を図 2.4 に示す。速度ポテンシャル  $\phi$  は、山のような形をしていることが分かる。

加えて、この斜面の傾き(勾配)がその方向の速度

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\phi}{\partial y} \quad \text{となるのである} \quad \{\text{方向微分という}\}.$$

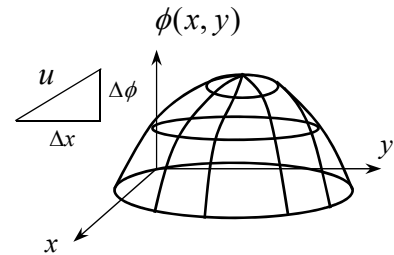


図 2.4 速度ポテンシャル

#### 【Note 6】スカラーポテンシャルの存在条件 {(2.19)式の証明}

必要条件:  $V = \text{grad}\phi$  となる  $\phi$  が存在するならば、

$$\text{rot} V = \text{rot}(\text{grad}\phi) = 0 \quad (\because \nabla \times \nabla \phi = 0) \quad (a)$$

である。

十分条件:  $\text{rot} V = 0$  のとき(2.18)式の  $(i, j, k)$  成分が零であることから

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \text{より} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} \quad \text{となり、同様に} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (b)$$

の関係が得られる。

ここで、点  $(a, b, c)$  から点  $(x, y, z)$  まで  $x, y, z$  軸に平行な経路での積分  $\int V ds$  を考える。

積分経路は、それぞれ  $\left\{ \int_a^x dx \rightarrow x = x, \int_b^y dy \rightarrow x = a, \int_c^z dz \rightarrow x = a, y = b \right\}$  である。

積分  $\int V ds$  を  $\phi(x, y, z)$  とおくと

$$\phi(x, y, z) = \int V(u, v, w) ds = \int_a^x u(x, y, z) dx + \int_b^y v(a, y, z) dy + \int_c^z w(a, b, z) dz \quad (c)$$

と定義される。これの方向微分は、それぞれ

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_a^x u(x, y, z) dx = u(x, y, z) \quad \left( \because \frac{\partial}{\partial x} \int_b^y v(a, y, z) dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_c^z w(a, b, z) dz = 0 \right) \quad (d)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int_a^x u(x, y, z) dx + \frac{\partial}{\partial y} \int_b^y v(a, y, z) dy = \int_a^x \frac{\partial u}{\partial y} dx + v(a, y, z) \quad \left( \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \text{ より} \right)$$

$$= \int_a^x \frac{\partial v}{\partial x} dx + v(a, y, z) = [v(x, y, z) - v(a, y, z)] + v(a, y, z) = v(x, y, z) \quad (e)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \int_a^x u(x, y, z) dx + \frac{\partial}{\partial z} \int_b^y v(a, y, z) dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_c^z w(a, b, z) dz$$

$$= \int_a^x \frac{\partial u}{\partial z} dx + \int_b^y \frac{\partial v}{\partial z} dy + w(a, b, z) = \int_a^x \frac{\partial w}{\partial x} dx + \int_b^y \frac{\partial w}{\partial y} dy + w(a, b, z) \quad \{(b) \text{式参照}\}$$

$$= [w(x, y, z) - w(a, y, z)] + [w(a, y, z) - w(a, b, z)] + w(a, b, z) = w(x, y, z) \quad (f)$$

である。

以上より、 $\text{rot } V = 0$  のとき

$$\text{grad } \phi = i \frac{\partial \phi}{\partial x} + j \frac{\partial \phi}{\partial y} + k \frac{\partial \phi}{\partial z} = i u(x, y, z) + j v(x, y, z) + k w(x, y, z) = V(u, v, w)$$

である。■

#### 【Note 7】 Green の定理

$xy$  平面の単一閉曲線（自分自身と再び交わらない閉曲線） $C$  で囲まれた領域を  $D$  とする。二つの関数  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  が  $C$  と  $D$  を含む領域で偏導関数を持っていて、 $C$  の向きは反時計まわりとする。このとき、次の等式が成り立つ。

$$\int_C (P dx + Q dy) = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (a)$$

これをグリーンンの定理 (Green's theorem) という。

## 【証明】

図 2.5 に示すように閉曲線  $C$  を 2 つの部分  $AEB$  と  $AFB$  に分けて考える。また、これらの曲線弧の方程式をそれぞれ

$$\begin{array}{ll} y = f(x) & , \quad y = g(x) \quad (a \leq x \leq b) \quad (b) \\ (AEB) & (AFB) \end{array}$$

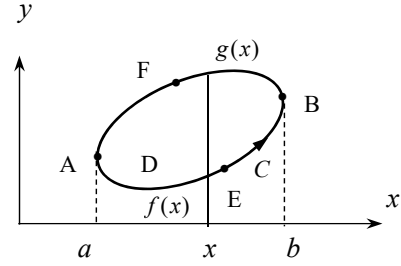


図 2.5 座標系

とする。

まず、次の重積分を計算する。  $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b [P(x, y)]_{y=f(x)}^{y=g(x)} dx \\ &= \int_a^b P(x, g(x)) dx - \int_a^b P(x, f(x)) dx \end{aligned} \quad (c)$$

また、これらの積分は図 2.5 に従い、それぞれ次の線積分となる。

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b P(x, f(x)) dx &= \int_{AEB} P(x, f(x)) dx \\ \int_a^b P(x, g(x)) dx &= - \int_b^a P(x, g(x)) dx = - \int_{BFA} P(x, g(x)) dx \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

(d)式のそれぞれを(c)式に代入して

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_{AEB} P(x, f(x)) dx - \int_{BFA} P(x, g(x)) dx \\ &= - \int_C P(x, y) dx \quad (\because \widehat{AEB} + \widehat{BFA} \rightarrow C) \end{aligned} \quad (e)$$

となる。次に関数  $Q$  について図 2.6 に示すように積分範囲と積分順序を変更して(c)式と同様に重積分を実行すると  $D = \{(x, y) | \alpha \leq y \leq \beta, \xi(y) \leq x \leq \eta(y)\}$

$$J = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_{y=\alpha}^{y=\beta} dy \int_{x=\xi(y)}^{x=\eta(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \int_C Q(x, y) dy \quad (f)$$

が得られる。

以上より  $(J - I)$  を求めると

$$\int_C (P dx + Q dy) = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (g)$$

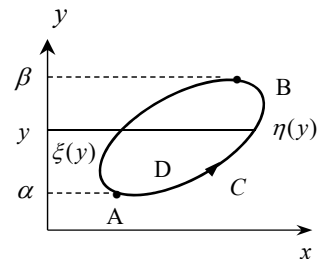


図 2.6 積分範囲の変更

である。■

## 【速度ポテンシャルの応用例】

$z$  軸方向のオイラーの運動方程式について、圧力式への変形を試みる。ただし、外力は、重力  $g$  のみで  $z$  軸とは逆の下向き (－) である。(114)式から

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (2.21)$$

である。速度  $u^2, v^2, w^2$  を  $z$  で微分すると、次の関係が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2} u^2 \right) = u \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) = v \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2} w^2 \right) = w \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.22)$$

これらの関係から(2.21)式は

$$\begin{aligned} & \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \\ &= \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} w^2 \right) + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} - u \frac{\partial u}{\partial z} - v \frac{\partial v}{\partial z} \\ &= \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} w^2 \right) + u \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) + v \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ & \quad \{ \text{渦度 (4.12)式参照} \} \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \end{aligned} \quad (2.23)$$

と変形される。ここで、断りなしに機械的に速度ポテンシャル  $\phi$  を導入すると

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} \\ & + \frac{\partial \phi}{\partial x} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right\} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right\} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \end{aligned} \quad (2.24)$$

が得られる。偏微分の原理から微分の順序を入れ換えても良いので  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right\}$

(2.24)式の左辺第3項と4項は、消えるのである。

これは、渦なしの条件から(2.23)式の渦度項が最初から消えるのであるが、断りなしに速度ポテンシャル  $\phi$  を導入しても数学の力で流体力学の現象を誤りなく導いているのである。

以上より、 $z$  軸方向のオイラーの運動方程式は、(2.25)式の圧力式に変換される。

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} + \frac{p}{\rho} + gz \right] = 0 \quad (2.25)$$

これを  $z$  方向に積分したものは、(2.26)式に示す非定常のベルヌーイの式である {(124)式}。



$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} + \frac{p}{\rho} + gz = c \quad (2.26)$$

【Green の定理の応用】 線積分による図形の面積  $S$

グリーンンの定理で  $\left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 1$  となる関数  $P(x, y), Q(x, y)$  が存在する場合

$$\int_C (Pdx + Qdy) = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D dxdy = S \quad (2.27)$$

閉曲線  $C$  を囲む面積  $S$  を表すことが分かる。面積  $S$  は(2.28)式で求められる。これは、証明ではないが、 $Q = x/2$ ,  $P = -y/2$  において簡単に確かめることができる。

$$S = \frac{1}{2} \int_C (xdy - ydx) \quad (2.28)$$

積分の実行に関しては、媒介変数  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) を介して  $x = f(\theta)$ ,  $y = g(\theta)$  と変数変換をして(2.29)式の周積分で計算されることが多い。

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{f(\theta)g'(\theta) - g(\theta)f'(\theta)\} d\theta \quad (2.29)$$

ただし、 $f(\theta), g(\theta)$  は等角写像やフーリエ級数等で求められる。

例として円の場合： $x = f(\theta) = r \cos \theta$ ,  $y = g(\theta) = r \sin \theta$

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 \{ \cos \theta \cos \theta - \sin \theta (-\sin \theta) \} d\theta = \frac{r^2}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \pi r^2 \quad (2.30)$$

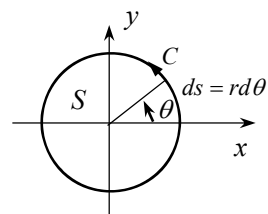


図 2.7 線積分での図形の面積

【Note 8】 (2.28)式の証明

グリーンンの定理のベクトル表示は  $\int_C A \cdot ds = \iint_D (\text{rot} A) \cdot dS$  (a) である。

$x, y$  平面上の法線ベクトル  $n$  は、 $z$  軸の単位ベクトル  $k$  と等しいので  $dS = n \cdot dxdy$  である。

$A = -iy + jx$  とすると、 $\text{rot} A = \text{rot}(-iy + jx) = 2k$  となる。

(a)式の面積分は

$$\iint_D (\text{rot} A) \cdot dS = \iint_D 2k \cdot n \cdot dxdy = 2k^2 \iint_D dxdy = 2S \quad (\because k \cdot n = k^2 = 1) \quad (b)$$

である。一方、(a)式の線積分は、線素  $ds = i dx + j dy$  より

$$\int_C A \cdot ds = \int_C (-iy + jx) \cdot (i dx + j dy) = \int_C (-y dx + x dy) \quad (\because i \cdot i = 1, i \cdot j = 0) \quad (c)$$

である。

$$\therefore S = \iint_D dxdy = \frac{1}{2} \int_C (xdy - ydx) \quad \blacksquare$$

## Appendix-3 波の速度ポテンシャル

『本例題での力点は、水面の境界条件である自由境界面と海底の条件である固定境界面の考え方とこれらの定式化である。』

重力が復原力の微小振幅進行波を考える。  
ただし、波の横方向には、変化がないとして  
図 3.1 に示す  $x$ - $z$  平面で取り扱う。また、 $x$  軸  
の正の方向に進む波とする。 $a$  は振幅である。  
 $\lambda$  は波長であり、 $c$  は位相速度である。 $h$  は  
静止水面からの水深である。水面（自由表面）  
形状を  $z = \eta(x, t)$  とする。ただし、 $\eta(x, t)$  の  
関数形は、未定である。

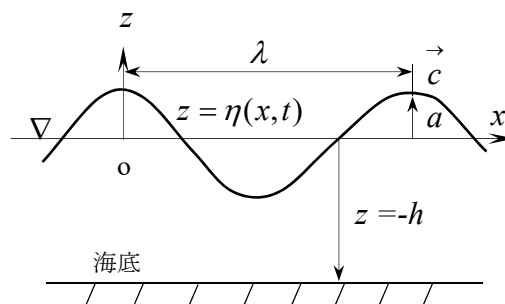


図 3.1 座標系

【境界条件】自由表面条件の考え方

『物体形状 (I 固定境界面, II 自由境界面どちらでも良い) を  $F(x, y, z, t) = 0$  で表わすと、  
これの実質微分が零である(3.1)式は、物体境界面上の境界条件となる。』【証明は(3.2)式】

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla F = \frac{\partial F}{\partial t} + \nabla \phi \cdot \nabla F = 0 \quad (3.1)$$

【Note 9】法線ベクトル

$$\mathbf{r} = ix + jy + kz \quad (a)$$

点  $P$  における  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}$  と  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}$  を含む平面を接平面という。

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right|} \quad (b)$$

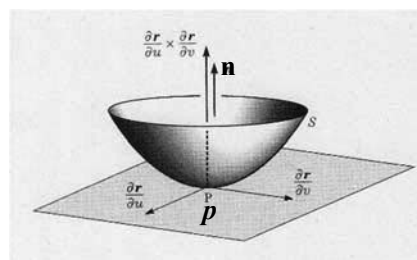


図 3.2 法線ベクトル

(b)式の  $\mathbf{n}$  を法線ベクトルという。これは、図 3.2 に示すように接平面に垂直であって、大きさが 1 である。物体の位置関係を  $z = f(x, y)$  とすると物体形状は、(c)式である。

$$F = f(x, y) - z = 0 \quad (c)$$

$$\mathbf{r} = ix + jy + kf(x, y) \rightarrow \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = i + k \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = j + k \frac{\partial f}{\partial y} \quad (d)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = -if_x - jf_y + k, \quad \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \quad (e)$$

$$(e) \text{式から} \quad \mathbf{n} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right|} = \frac{-if_x - jf_y + k}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \quad (f)$$

$$\text{一方, (c)式と(f)式から} \quad \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{if_x + jf_y - k}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} = -\mathbf{n} \quad (g) \quad \text{が得られる。} \blacksquare$$

(3.1)式に  $1/|\nabla F|$  を掛けると, (g)式から(3.2)式が得られる。

$$\frac{1}{|\nabla F|} \frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{\nabla F}{|\nabla F|} \cdot \nabla \phi = \mathbf{n} \cdot \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad (\because \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial n} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{n}^2 = 1) \quad (3.2)$$

これは, 物体境界面の変形速度  $\frac{\partial F}{\partial t}$  がその法線速度  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$  に対応することを意味する。

以上より, 物体形状の実質微分が零であると, 次の境界条件を満足する。

- I 固定境界面の場合, 流体が物体を貫通しない条件  $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$  を課すと物体境界面の変形速度が零となり, 固定境界面 (変形しない境界面) を表わす。
- II 自由境界面の場合, 物体境界面の法線速度  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$  が物体境界面の変形速度  $\frac{\partial F}{\partial t}$  を規定し, 自由境界面 (変形速度に応じて変形する境界面) を表わす。

以下に, 波面の自由表面形状を具体的に

$$F(x, z, t) = z - \eta(x, t) = 0 \quad (\because z = \eta(x, t)) \quad (3.3)$$

と設定して計算を進める。ただし, 図 3.1 の座標系の  $x$  方向の速度を  $u$  とし,  $z$  方向の速度を  $w$  とする。また, 境界条件を満足させる位置を波面上 ( $z = \eta(x, t)$ ) に取ると, 次数が上がり, 解法が複雑になるので微小振幅の条件から簡略化して静止水面の  $z = 0$  で満足させる。(3.3)式の実質微分の零を取ると

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial z}{\partial t} - \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} \right\} = 0 \quad (3.4)$$

となる。(3.4)式から

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = w \quad (\because \frac{\partial z}{\partial t} = w) \quad (3.5)$$

を得る。また, 微小振幅の条件から上下方向の速度  $\frac{\partial \eta}{\partial t}$  に比べ  $u \frac{\partial \eta}{\partial x}$  は, 二次の微小量で

ある。従って,  $\frac{\partial \eta}{\partial t} \gg u \frac{\partial \eta}{\partial x}$  から線形化された

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (3.6)$$

が得られる。

これは, 自由表面 (波面) の上下速度が流体の鉛直速度  $w$  と等しいことを意味する。この速度の規定から得られる条件を運動学的条件という。

次に波面上で大気圧 ( $p_a = 0$ ) になる条件を考える。非定常のベルヌーイの式で波面上と海底 ( $z = -h$ ) との流線を取る。海底では流速が零であり、また、境界条件を合わせる位置は、静止水面 ( $z = 0$ ) であるので海底の圧力  $p_b$  は静水圧となる。よって、右辺は零となる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p_a}{\rho} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} + g\eta = \frac{p_b}{\rho} - gh = 0 \quad (3.7)$$

ただし、速度の 2 乗項  $\left\{ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\}$  を高次の微小量として省略する。これらの条件から線形化された(3.8)式を得る。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -g\eta \quad (\because p_a = 0, \text{ on } z = 0) \quad (3.8)$$

この条件を力学的条件という。

一方、海底の境界条件は、固定境界面である。加えて、海底形状は、図 3.1 に示すように静止水面と平行とする。よって、この条件は、流体が貫通しないことを定式化した

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (3.9)$$

である。

以上、速度ポテンシャルを  $\phi(x, z, t)$  として、1)  $x$  軸の正の方向に進む波 2) 海底の条件 3) 力学的条件 4) 運動学的条件を満足した(3.10)式のラプラス方程式の解法を考える。他方、時間項については進行波(振動解)から  $\omega$  を未定定数とした  $e^{-i\omega t}$  の形式の解を想定する。

【解法】変数分離形

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.10)$$

(3.10)式の解の形式を変数分離形の

$$\phi(x, z, t) = X(x) \cdot Z(z) \cdot e^{-i\omega t} \quad (3.11)$$

と仮定する。これを(3.10)式に代入して

$$X''(x)Z(z)e^{-i\omega t} + X(x)Z''(z)e^{-i\omega t} = 0 \quad (3.12)$$

が得られる。両辺を  $X(x)Z(z)$  で除すると

$$\left\{ \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} \right\} e^{-i\omega t} = 0 \quad (3.13)$$

となる。これから

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Z''(z)}{Z(z)} = \pm k^2 \quad (3.14)$$

の関係が得られる。

$\pm k^2$  は分離定数である。本例題では、微小振幅進行波から  $X(x)$  の解が振動解になるように符号 (+) を採用する。(3.14)式からそれぞれ定係数二階の線形微分方程式が得られる。

$$X'' + k^2 X = 0 \quad (3.15)$$

$$Z'' - k^2 Z = 0 \quad (3.16)$$

これらの解は、容易に求まり

$$X = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (3.17)$$

$$Z = Ce^{kz} + De^{-kz} \quad (3.18)$$

である。ただし、 $A, B, C, D$  は定数である。よって、解の形式は、(3.11)式から

$$\begin{aligned} \phi &= (Ae^{ikx} + Be^{-ikx})(Ce^{kz} + De^{-kz})e^{-i\omega t} \\ &= (Ae^{i(kx-\omega t)} + Be^{-i(kx+\omega t)})(Ce^{kz} + De^{-kz}) \end{aligned} \quad (3.19)$$

となる。

【定数の決定】境界条件の導入

1)  $x$  軸の正の方向に進む波

(3.19)式の  $Ae^{i(kx-\omega t)} + Be^{-i(kx+\omega t)}$  の  $dt$  後の形状  $Ae^{i(kx-\omega(t+dt))} + Be^{-i(kx+\omega(t+dt))}$  を考える。

$dt$  後に  $A$  項は、 $x$  が正であると  $x$  が増加する位置で同じとなる。つまり、 $A$  項は  $x$  軸の正の方向に進む波を表わしている。逆に  $B$  項は、 $x$  軸の負の方向に進む波となる。従って、条件に適する解は、 $A$  項である。 $B$  項は不適 ( $B=0$ ) となり、次式を得る。

$$\phi = Ae^{i(kx-\omega t)}(Ce^{kz} + De^{-kz}) \quad (3.20)$$

2) 海底の条件

(3.20)式を(3.9)式に適用し、さらに  $z = -h$  を代入して

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = Ake^{i(kx-\omega t)}(Ce^{-kh} - De^{kh}) = 0 \quad (3.21)$$

となる。これより  $Ce^{-kh} = De^{kh}$  から  $D = Ce^{-2kh}$  の関係が得られる。これを(3.20)式に代入する。

$$\begin{aligned} \phi &= Ae^{i(kx-\omega t)}C\{e^{kz} + e^{-kz-2kh}\} \\ &= ACE^{-kh} \cdot e^{i(kx-\omega t)}\{e^{k(z+h)} + e^{-k(z+h)}\} \quad (\because e^{kh} \cdot e^{-kh} = 1) \end{aligned} \quad (3.22)$$

ここで、係数をまとめて  $ACE^{-kh} \rightarrow C$  とおくと

$$\phi = Ce^{i(kx-\omega t)}\{e^{k(z+h)} + e^{-k(z+h)}\} \quad (3.23)$$

となる。

さらに、係数  $C$  をオイラーの公式  $\{e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta\}$  から  $\cos$  項と  $\sin$  項に分けて

$$\phi = \{\alpha \cos(kx - \omega t) + \beta \sin(kx - \omega t)\} \{e^{k(z+h)} + e^{-k(z+h)}\} \quad (3.24)$$

となる。以後、係数  $\alpha$ ,  $\beta$  と未定定数  $\omega$  について考える。

### 3) 力学的条件 ( $z=0$ で大気圧)

(3.24)式を(3.8)式に適用して、この結果に  $z=0$  を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \omega \{\alpha \sin(kx - \omega t) - \beta \cos(kx - \omega t)\} (e^{k(z+h)} + e^{-k(z+h)}) \Big|_{z=0} \\ &= \omega \{\alpha \sin(kx - \omega t) - \beta \cos(kx - \omega t)\} (e^{kh} + e^{-kh}) = -g \cdot \eta(x, t) \end{aligned} \quad (3.25)$$

が得られる。ここで、波形  $\eta(x, t)$  の関数形は、係数  $\alpha$ ,  $\beta$  が決定でき、かつ、図 3.1 に示すように原点  $x=0$  で  $z=a$  となる

$$\eta(x, t) = a \cos(kx - \omega t) \quad (3.26)$$

を採用する。これから分離定数  $k$  は、一波長で一周期であるためには、 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  となる。

これを波数ともいう。従って、(3.26)式を(3.25)式に代入して

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{ag}{\omega} \frac{1}{e^{kh} + e^{-kh}} \quad (3.27)$$

を得る。他方、運動学的条件から係数  $\alpha$ ,  $\beta$  を決定しても良いはずである。

### 4) 運動学的条件 (自由表面の上下速度が流体の鉛直速度と等しい。)

(3.6)式に(3.24), (3.26)式を適用する。まず、(3.26)式から(3.28)が得られ、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = a\omega \sin(kx - \omega t) \quad (3.28)$$

次に、(3.24)式から

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial z} &= k \{\alpha \cos(kx - \omega t) + \beta \sin(kx - \omega t)\} (e^{k(z+h)} - e^{-k(z+h)}) \Big|_{z=0} \\ &= k \{\alpha \cos(kx - \omega t) + \beta \sin(kx - \omega t)\} (e^{kh} - e^{-kh}) \end{aligned} \quad (3.29)$$

となる。(3.28)式と(3.29)式から

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{a\omega}{k} \frac{1}{e^{kh} - e^{-kh}} \quad (3.30)$$

が得られる。

力学的条件から得られた係数  $\beta$  と運動学的条件から得られたものは、当然、等しくなければならない。

$$\beta = \frac{ag}{\omega} \frac{1}{e^{kh} + e^{-kh}} = \frac{a\omega}{k} \frac{1}{e^{kh} - e^{-kh}} \quad (3.31)$$

これは、未定定数である  $\omega$  (波の円周波数) を決定する条件でもある。(3.31)式から

$$\omega^2 = kg \frac{e^{kh} - e^{-kh}}{e^{kh} + e^{-kh}} = kg \tanh(kh) \quad (3.32)$$

の関係が得られる。これを分散関係という。ただし、 $x$  軸の正の方向に進む波の条件から  $\omega > 0$  を採用する。一方、波の位相速度  $c$  について、波長  $\lambda$  と波周期  $T$  ( $T = 2\pi/\omega$ ) から

$$c = \frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda\omega}{2\pi} = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{kg \tanh(kh)} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)} \quad (\because k = \frac{2\pi}{\lambda}) \quad (3.33)$$

が得られる。以上より、波の速度ポテンシャル  $\phi(x, z, t)$  は、(3.31)式の係数からそれぞれ

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{ag}{\omega} \frac{\cosh\{k(z+h)\}}{\cosh(kh)} \sin(kx - \omega t) \\ &= \frac{a\omega}{k} \frac{\cosh\{k(z+h)\}}{\sinh(kh)} \sin(kx - \omega t) \end{aligned} \quad (3.34)$$

である。また、波の圧力  $p$  は、図 3.1 から水深 ( $z < 0$ ) の符号に注意して、例：海底 ( $z = -h$ )

$$p = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \rho g z = \rho g \left\{ \frac{\cosh\{k(z+h)\}}{\cosh(kh)} a \cos(kx - \omega t) - z \right\} \quad (3.35)$$

である。また、 $h \gg \lambda$  となる深海波では、 $e^{-kh} \rightarrow 0$  から

$$p = \rho g \{ e^{kz} a \cos(kx - \omega t) - z \} \quad (3.36)$$

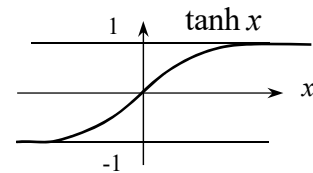
となる。

【Note 10】双曲線関数

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (a)$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (b)$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (c)$$



$$(\cosh x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x \quad (d)$$

$$(\sinh x)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x \quad (e) \blacksquare$$

## 【波の性質 1】 深海波と浅海波

## 1) 深海波

$h \gg \lambda$  (水深が波長に比べ非常に深い場合 → 普通の海洋波)

$$\tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right) \rightarrow \tanh(\infty) \cong 1 \quad \text{から波の位相速度 (3.33)式は, } c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \quad (3.37) \text{となる。}$$

$$\text{この波周期は, } \lambda = cT \quad \text{から } T = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}} \cong 0.8\sqrt{\lambda} \quad (3.38) \text{である。}$$

深海波は、普通に見られる海洋波であり、主に風によって発生して、この風速と吹送距離によって発達過程が決まる。この波は、波長が長くなると波周期も長くなる特性である。例えば、日本近海では波周期 6～8 秒が多く観測される。この波長は(3.38)式から 60～100 m 程度であることが分かる。また、台風のように猛烈な風が長時間吹き続けると波周期 16～20 秒が観測される。この波長は、約 400～600 m に達することが分かる。

## 2) 浅海波

$h \ll \lambda$  (水深が波長に比べ非常に浅い場合 → 海岸に到達する波または津波)

$$\tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right) \cong \frac{2\pi h}{\lambda} \quad \text{から波の位相速度 (3.33)式は, } c = \sqrt{gh} \quad (3.39) \text{となる。}$$

浅海波の位相速度は、波長に関係なく水深によって決まる特性である。つまり、深いと速くなるのである。例えば、小高い丘の上から海岸線を見ていると海岸線が湾曲していても図 3.3 に示すように「波が海岸線に沿って来る」ように見える所がある。これは、海岸付近の海底地形が海岸線の湾曲に比例して深くなっていると、遠方から平行に来た波が深い所では速くなり、平行に来た波に速度差が生じて海岸に沿って到達するように見えるのである。

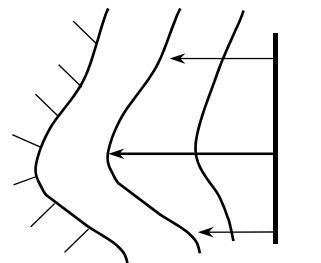


図 3.3 海岸に到達する波

一方、津波は地震で発生することが多く、その波長は、数十 km から数百 km に達する。外洋の平均的な深さは約 4 km であるので津波は浅海波である。この場合の位相速度は、(3.39)式から  $c = \sqrt{9.8 \times 4000} = 200 \text{ m/s}$  (時速 720 km/h) となり、ジェット機と略等しい速度である。しかし、津波が海岸に近づくとその位相速度は遅くなり、一方、数百 km と離れた沖合では速いまである。つまり、海岸に近い所では波の停滞が起こる。津波は、外洋中の波高が断層のずれによる 3～5m 程であっても、海岸付近では停滞している波に後続の大きなエネルギー (波長に比例する) を持った波が、次々と押し寄せて停滞している波と重なり、とてつもない大きな波高となるのである。

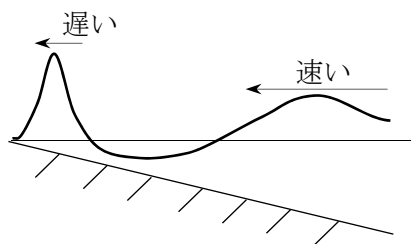


図 3.4 津波モデル



## 【波の性質 2】波粒子の運動と特徴的な波

## 1) 波粒子の運動

波の任意点  $(x, z)$  の速度  $(u, w)$  は,  
波の速度ポテンシャル  $\phi$  (3.34)式から

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = a\omega \frac{\cosh\{k(z+h)\}}{\sinh(kh)} \cos(kx - \omega t) \\ w &= \frac{\partial \phi}{\partial z} = a\omega \frac{\sinh\{k(z+h)\}}{\sinh(kh)} \sin(kx - \omega t) \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

である。速度  $(u, w)$  が周期関数であるので  
波粒子も周期運動であることが想像される。

波粒子運動の中心点  $(x_o, z_o)$  を一定とし,  
また、波粒子の移動量を  $(x', z')$  とする。  
そして、波粒子の時刻  $t$  の位置を

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= x_o + x'(t) \\ z(t) &= z_o + z'(t) \end{aligned} \right\} \quad (3.41)$$

と置くと

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= \frac{\partial(x_o + x')}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial t} = u(x, z) \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial(z_o + z')}{\partial t} = \frac{\partial z'}{\partial t} = w(x, z) \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

が得られる。

さらに、波粒子運動の中心点  $(x_o, y_o)$  まわりに速度  $u(x, z)$  と  $w(x, z)$  をテーラー展開する。

$$\left. \begin{aligned} u(x, z) &= u(x_o, z_o) + \frac{\partial}{\partial x} u(x_o, z_o) x' + \frac{\partial}{\partial z} u(x_o, z_o) z' + \cdots \quad (\because x' = x - x_o) \\ w(x, z) &= w(x_o, z_o) + \frac{\partial}{\partial x} w(x_o, z_o) x' + \frac{\partial}{\partial z} w(x_o, z_o) z' + \cdots \quad (\because z' = z - z_o) \end{aligned} \right\} \quad (3.43)$$

ここで大胆な仮定ではあるが、移動量  $(x', z')$  を微小量として変動分を省略すると

$$\left. \begin{aligned} u(x, z) &\approx u(x_o, z_o) \\ w(x, z) &\approx w(x_o, z_o) \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

と近似される。(3.44)式を(3.42)式に代入して、時刻  $t$  で積分すると(3.45)式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} x' &\approx \int u(x_o, z_o) dt = -a \frac{\cosh\{k(z_o + h)\}}{\sinh kh} \sin(kx_o - \omega t) \\ z' &\approx \int w(x_o, z_o) dt = a \frac{\sinh\{k(z_o + h)\}}{\sinh kh} \cos(kx_o - \omega t) \end{aligned} \right\} \quad (3.45)$$

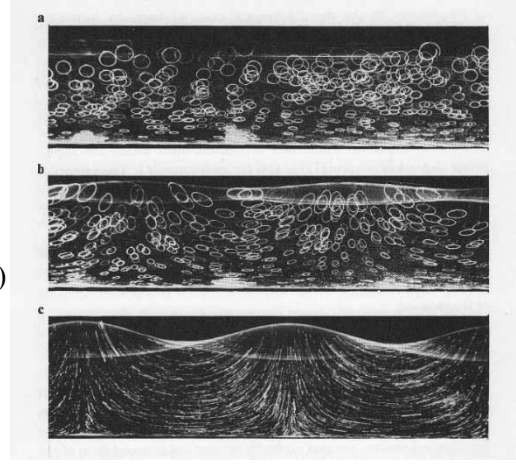


図 3.5 水槽での波粒子の可視化写真

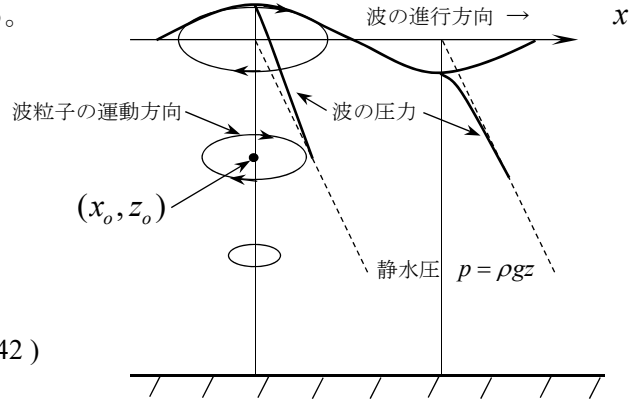


図 3.6 波粒子の運動と波の圧力分布

よって、波粒子の点  $(x', z')$  は、(3.41)式と(3.45)式から

$$\left. \begin{aligned} x' = x - x_o &= -a \frac{\cosh\{k(z_o + h)\}}{\sinh kh} \sin(kx_o - \omega t) \\ z' = z - z_o &= a \frac{\sinh\{k(z_o + h)\}}{\sinh kh} \cos(kx_o - \omega t) \end{aligned} \right\} \quad (3.46)$$

と求まる。これは、図 3.6 に示すように点  $(x_o, z_o)$  を中心とした楕円になる。

$$\frac{(x - x_o)^2}{\left\{ \frac{a \cosh\{k(z_o + h)\}}{\sinh kh} \right\}^2} + \frac{(z - z_o)^2}{\left\{ \frac{a \sinh\{k(z_o + h)\}}{\sinh kh} \right\}^2} = 1 \quad (3.47)$$

大胆な仮定を取り入れた結果ではあるが、図 3.5 に示す水槽での波粒子の可視化の様子を良く表している。この楕円軌道の振幅は、水深が深くなるにつれて指数関数的に小さくなり、水深が波長の  $1/2$  程度 ( $e^{-\pi} \rightarrow 0.043$ ) になると、ほとんど無くなる。また、波の圧力も図 3.6 に示すように水深が深くなるにつれて静水圧に漸近する。

## 2) 定在波(standing wave)

互いに反対方向に進む進行波 {(3.20)式参照}

で同波長、同振幅の波の合成を考える。

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= a \cos(kx - \omega t) + a \cos(kx + \omega t) \\ &= 2a \cos kx \cos \omega t \end{aligned} \quad (3.48)$$

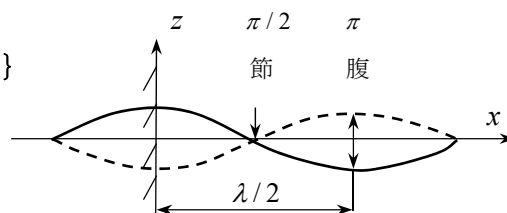


図 3.7 定在波

これは、どちらにも進まない波で定在波と呼ばれる(進行波の2倍の振幅)。定在波は、時刻によって振幅が変動するが  $kx = \pi/2 \pm n\pi$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) の位置では、常に振幅が零となることが分かる。この位置のことを節という。また、振幅が最大となる位置を腹という。腹から腹までの距離  $x$  は、進行波の波長の  $1/2$  となり、

$$x = \frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2} \quad (3.49)$$

の関係が得られる。

定在波とは、図 3.7 に示すように進行波に対して逆位相の進行波が重なった場合と同じ現象である。例えば、風の強い日に港湾内の岸壁に当たった反射波と進行波が存在する場合である。これは、定在波として現象を捉えることができる。また、池、湖等のような制限水域で起こる定在波を静振(seiche)という。地震等で大規模な静振が起こって対岸の町が冠水することもある。両端(両岸)が腹になる条件から両岸距離  $B$  (m) による固有振動数が存在する。 $B = \lambda/2$  の条件から固有の波数  $k$  は、(3.49)式から

$$k = n\pi / B \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (3.50)$$

である。自然の池や湖等では  $B$  がかなり大きく、非常に緩やかな(長周期の)波となる。また、岸壁の低い漁港では、大潮と港内の静振が重なって岸壁が冠水することもある。

## 3) 重畳波

同方向へ進行する同振幅の波で周波数の異なる波の合成を考える。

$$\eta(x, t) = a \cos(k_1 x - \omega_1 t) + a \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$= 2a \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2} x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2} x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \quad (3.51)$$

(3.51)式の前の項を位相波(phase wave), 後の項を包絡波(うなり : envelop)という。

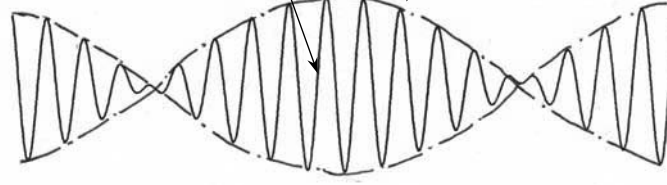


図 3.8 重畳波

位相波の進行速度を位相速度(phase velocity)という。  $C_o = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2}$

包絡波の進行速度を群速度(group velocity)という。  $C_g = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}$  通常 ( $C_o > C_g$ )

深海波の場合, 位相速度は, (3.37)式より  $C_o = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$  であるから

$$\frac{dC_o}{d\lambda} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{2\pi\lambda}} = \frac{1}{2\lambda} \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \frac{C_o}{2\lambda} \quad (3.52)$$

となる。

また, 近接波数の場合 ( $\omega_1 = \omega + \Delta\omega$ ,  $\omega_2 = \omega$ ,  $k_1 = k + \Delta k$ ,  $k_2 = k$  とおく)

$$C_o = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2} = \frac{2\omega + \Delta\omega}{2k + \Delta k} \simeq \frac{\omega}{k} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} C_g &= \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \simeq \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(kC_o) = k \frac{dC_o}{dk} + C_o = k \frac{d\lambda}{dk} \frac{dC_o}{d\lambda} + C_o \\ &= -\lambda \frac{dC_o}{d\lambda} + C_o \quad \left( \because \frac{d\lambda}{dk} = \frac{d}{dk}\left(\frac{2\pi}{k}\right) = -\frac{2\pi}{k^2} = -\frac{\lambda}{k} \right) \end{aligned} \quad (3.54)$$

の関係がある。よって, (3.52)式を(3.54)式に代入して

$$C_g = \frac{1}{2} C_o \quad (3.55)$$

の関係が得られる。

深海波の群速度は, 位相速度の半分である。しかし, 包絡波は, 各波を連ねた包絡線であるので, 目には見えない。

#### Appendix-4 スカラー場とベクトル場

ある領域にスカラー $\phi$ が分布しているとき、各点 $p(x,y,z)$ での $\phi$ の値は、点 $p$ の座標の関数 $\phi(x,y,z)$ である。この関数が定義されている領域と関数 $\phi(x,y,z)$ を合わせた概念をスカラー場という。

例えば、温度分布、質量分布を表す密度、電位等である。

これに対して重力場、電場、流場のように大きさと方向を持ったベクトル $V$ が分布していて、各点 $p(x,y,z)$ での $V$ の値が点 $p$ の座標の関数 $V(x,y,z)$ であるとき、この関数が定義されている領域と関数 $V(x,y,z)$ を合わせた概念をベクトル場という。

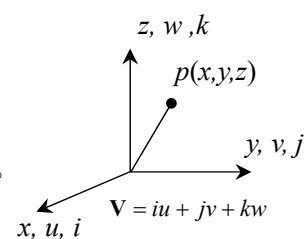


図 4.1 ベクトル場

$i, j, k$  は、 $x, y, z$  軸方向の単位ベクトルである。

#### 4.1 勾配(gradient)

スカラー場  $\phi(x,y,z)$  の空間的な変化率を表すものとして、次のベクトル場を

$$\text{grad}\phi = i \frac{\partial \phi}{\partial x} + j \frac{\partial \phi}{\partial y} + k \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (4.1)$$

勾配またはグラジエント (gradient) という。

この演算方法は、ベクトル微分演算子  $\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$  (a) を導入して記号的に

$$\nabla \phi = i \frac{\partial \phi}{\partial x} + j \frac{\partial \phi}{\partial y} + k \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (4.2)$$

と表す。 $\nabla \phi$  は、記号法として機械的に(a)式の分子の空白部に関数 $\phi$ を代入したものである。よって、 $\text{grad}\phi$  は  $\nabla \phi$  で求められる。{  $\text{grad}\phi = \nabla \phi$  }

【例題 1】スカラー場  $\phi = x^2y - \sin(yz)$  の勾配(gradient)を求めよ。

(a)式のベクトル微分演算子に $\phi$ を機械的に代入して

$$\begin{aligned} \nabla \phi &= i \frac{\partial \phi}{\partial x} + j \frac{\partial \phi}{\partial y} + k \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ &= i(2xy) + j(x^2 - z \cos(yz)) - k(y \cos(yz)) \end{aligned}$$

である。■

#### 4.2 発散(divergence)

ベクトル場、例えば、流速  $V = iu + jv + kw$  の空間的な変化量を表すものとして、次のスカラー場を

$$\text{div}V = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (4.3)$$

発散またはダイバージェンス (divergence) という。

この演算法は、前述の勾配に比べてやや複雑である。ここでは、(a)式のベクトル微分演算子を用いて、 $\nabla$ と $V$ の内積を形式的に作れば $\{(\cdot)$ は、内積を意味する $\}$ 、

$$\begin{aligned}\nabla \cdot V &= (i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}) \cdot (iu + jv + kw) \\ &= i^2 \frac{\partial u}{\partial x} + j^2 \frac{\partial v}{\partial y} + k^2 \frac{\partial w}{\partial z} + ij \frac{\partial v}{\partial x} + ik \frac{\partial w}{\partial x} + \dots\end{aligned}\quad (4.4)$$

となる。これは、単位ベクトル( $i^2 = j^2 = k^2 = 1$ )と直交条件( $ij = 0, ik = 0 \dots$ )から

$$\nabla \cdot V = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (4.5)$$

( $i, j, k$ )の付かないスカラー場となり、さらに、(4.3)式と等しい。

よって、 $\text{div}V$ は $\nabla$ と $V$ の内積 $\nabla \cdot V$ で求められる。 $\{\text{div}V = \nabla \cdot V\}$

【例題2】ベクトル場  $V = i3xyz^2 + j2xy^2 - kx^2yz$  の発散(divergence)を求めよ。

$$\begin{aligned}\nabla \cdot V &= \frac{\partial}{\partial x}(3xyz^2) + \frac{\partial}{\partial y}(2xy^2) + \frac{\partial}{\partial z}(-x^2yz) \\ &= 3yz^2 + 4xy - x^2y \quad \blacksquare\end{aligned}$$

【応用問題】スカラー場 $\phi$ の勾配 $\nabla\phi$ の発散、つまり、 $\nabla \cdot (\nabla\phi)$ について考える。

$\nabla \cdot (\nabla\phi)$ の演算法は、(4.2)と(4.5)式から機械的に実行して、さらに直交条件から次の

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla\phi) &= (i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}) \cdot (i \frac{\partial\phi}{\partial x} + j \frac{\partial\phi}{\partial y} + k \frac{\partial\phi}{\partial z}) \\ &= \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\end{aligned}\quad (4.6)$$

スカラー場が得られる。ここで(a)式の内積 $\nabla \cdot \nabla$ を記号 $\nabla^2$ で表せば、(4.7)式の新たな演算子

$$\begin{aligned}\nabla^2 &= (i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}) \cdot (i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\end{aligned}\quad (4.7)$$

が定義される。よって、 $\nabla \cdot (\nabla\phi)$ はスカラー場 $\phi$ に直接、演算子 $\nabla^2$ を作用したものであることが分かる。

$$\nabla^2\phi = \nabla \cdot (\nabla\phi) \quad (4.8)$$

$\nabla^2$ をラプラシアン(Laplacian)という。よって、 $\nabla \cdot (\nabla\phi)$ は、 $\nabla^2$ を用いて

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \quad (4.9)$$

となる。

偏微分方程式  $\nabla^2 \phi = 0$ , すなわち

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (4.10)$$

をラプラスの方程式という。また、その解を調和関数(harmonic function)という。

【Note 11】調和関数

物理現象を記述する関数をそれぞれ変数で 2 回偏微分して、これらを足し合わせて零(0)になる関数を調和関数という。例、速度ポテンシャルと流線関数 ■

### 4.3 回転(rotation)

ベクトル場, 例えば, 流速  $V = iu + jv + kw$  の各点  $p(x, y, z)$  における回転 (流体の場合: 渦度) を表すものとして, 次のベクトル場を

$$\text{rot } V = i\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad (4.11)$$

ベクトル場  $V$  の回転またはローテーション(rotation)という。

ここで,  $\nabla$  と  $V$  の外積は  $\{(\times)$  は外積を意味する}

$$\begin{aligned} \nabla \times V &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v & w \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & w \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ u & v \end{vmatrix} \\ &= i\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \end{aligned} \quad (4.12)$$

となり, (4.11)式と等しい。

よって,  $\text{rot } V$  は  $\nabla$  と  $V$  の外積  $\nabla \times V$  で求められる。  $\{\text{rot } V = \nabla \times V\}$

【例題 3】ベクトル  $V = ixy^2 - je^{yz} + k \log(y - 3z)$  の回転(rotation)を求めよ。

$$\begin{aligned} \nabla \times V &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2 & -e^{yz} & \log(y - 3z) \end{vmatrix} \\ &= i\left\{\frac{\partial}{\partial y} \log(y - 3z) - \frac{\partial}{\partial z} (-e^{yz})\right\} - j\left\{\frac{\partial}{\partial x} \log(y - 3z) - \frac{\partial}{\partial z} xy^2\right\} + k\left\{\frac{\partial}{\partial x} (-e^{yz}) - \frac{\partial}{\partial y} xy^2\right\} \\ &= i\left(\frac{1}{y - 3z} + ye^{yz}\right) - k(2xy) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## 【Note 12】ベクトルの外積の計算法

ベクトル  $A = ia_x + ja_y + ka_z$  と  $B = ib_x + jb_y + kb_z$  (a) の外積は、行列式の演算法を用いて、1行目に方向単位ベクトル  $(i, j, k)$ ，2行目に  $A$  ベクトル  $(a_x, a_y, a_z)$ ，3行目に  $B$  ベクトル  $(b_x, b_y, b_z)$  と機械的に置き換えて

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$= i(a_y b_z - a_z b_y) - j(a_x b_z - a_z b_x) + k(a_x b_y - a_y b_x) \quad (b)$$

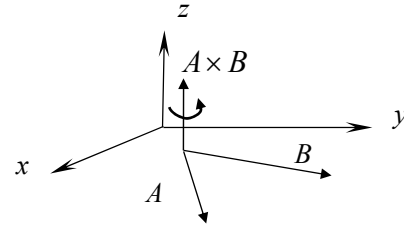


図 4.2 ベクトルの外積

である。

## 【証明】

$$\begin{aligned} A \times B &= (ia_x + ja_y + ka_z) \times (ib_x + jb_y + kb_z) \\ &= (a_x b_y - a_y b_x)i \times j + (a_x b_z - a_z b_x)i \times k + (a_y b_z - a_z b_y)j \times k \\ &= (a_x b_y - a_y b_x)k - (a_x b_z - a_z b_x)j + (a_y b_z - a_z b_y)i \\ &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (c)$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{ベクトル演算の基礎} \\ i \times j = -j \times i = k \\ k \times i = -i \times k = j \\ j \times k = -k \times j = i \\ i \times i = j \times j = k \times k = 0 \\ i \times j = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = k \end{array} \right]$$

## 【流体の渦流れ】

流体の回転 ( $rot V$ ) は(4.12)式である。この物理的な意味を理解するために  $x, y$  平面 ( $k$  成分)の流場を考えてみる。図 4.3 に示す微小検査面 ( $dx dy$ ) での回転変形の定義は、元の形を保って、反時計回りに回転することである。この条件を満足する速度分布  $u, v$  は、それぞれ  $x, y$  に比例した(d)式である。

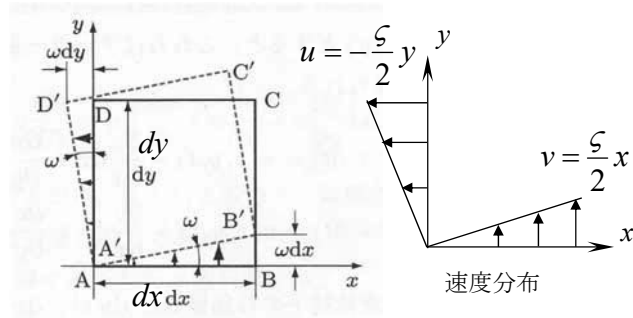


図 4.3 回転変形とその速度分布

$$u = -\frac{\zeta}{2}y, \quad v = \frac{\zeta}{2}x \quad (d)$$

ただし、 $\zeta$  は比例定数である。両式をそれぞれの変数で微分して、( $v$ の項) - ( $u$ の項)から

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (e)$$

が得られる。これを渦度 (vorticity) という。これは、 $\zeta/2$  の角速度 ( $\omega = \zeta/2$ ) で回転している流れ場を表している。このような流れを渦流れ (rotational flow) または、回転流れという。よって、(4.12)式の  $i, j, k$  項は、それぞれ  $x, y, z$  軸まわりの渦度を表している。■

【外積の応用1】 三角形の面積  $S$ 

三角形の頂点の座標  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  が与えられる三角形の面積  $S$  は, (4.13)式で求まる。本法は, コンピュータでの計算 (数値計算) に適している。

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 0 & x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ 0 & x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \{ (x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (y_1 - y_0)(x_2 - x_0) \} \quad (4.13)$$

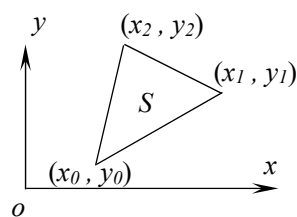


図 4.4 座標系

【証明】 ベクトル  $A = ia_x + ja_y + ka_z$  と  $B = ib_x + jb_y + kb_z$  の外積は, 【Note 12】の(b)式

である。これの絶対値の2乗を求めると

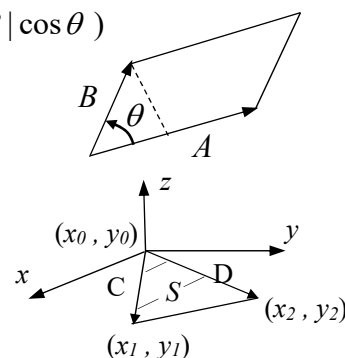
$$\begin{aligned} |A \times B|^2 &= (a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_x b_z - a_z b_x)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2 \quad \{ \because |A| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \} \\ &= (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)^2 \\ &= |A|^2 |B|^2 - (A \cdot B)^2 \\ &= |A|^2 |B|^2 - |A|^2 |B|^2 \cos^2 \theta \quad (\because (A \cdot B) = |A| \cdot |B| \cos \theta) \\ &= |A|^2 |B|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= |A|^2 |B|^2 \sin^2 \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \end{aligned} \quad (4.14)$$

となる。これより

$$|A \times B| = |A| \cdot |B| \sin \theta \quad (4.15)$$

が得られる。 $|A \times B|$  は  $|A|$  と  $|B|$  を2辺とする平行四辺形の面積に等しい。従って, 三角形の面積  $S$  は(4.16)式である。

$$S = \frac{1}{2} |A \times B| \quad (4.16)$$

図 4.5  $xy$  平面の三角形

一方, 図 4.4 の三角形は, 図 4.5 に示すように頂点の一つを原点  $(x_0, y_0)$  にして,  $k$  成分が零のベクトル  $C = i(x_1 - x_0) + j(y_1 - y_0) + k(0)$ ,  $D = i(x_2 - x_0) + j(y_2 - y_0) + k(0)$  で表すことができる。ベクトル  $C$  と  $D$  の外積は

$$C \times D = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & 0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & 0 \end{vmatrix} = k \{ (x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (y_1 - y_0)(x_2 - x_0) \} \quad (4.17)$$

である。これの絶対値の  $1/2$ , つまり面積  $S$  は

$$S = \frac{1}{2} |C \times D| = \frac{1}{2} \{ (x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (y_1 - y_0)(x_2 - x_0) \} \quad (4.18)$$

(4.13)式と等しい。■



【外積の応用 2】 モーメント  $\mathbf{M}$ 

力  $F$  は、運動量 ( $mv$ ) の時間的変化、つまり

$$F = \frac{d}{dt}(mv) = m \frac{dv}{dt} \quad (4.19)$$

である。同様に、モーメント  $\mathbf{M}$  は、重心回りの角運動量  $H_G$  の時間的変化で定義される。

$$\mathbf{M} = \frac{D}{Dt}(\mathbf{H}_G) = \frac{dH_G}{dt} + \vec{\omega} \times \mathbf{H}_G \quad (4.20)$$

ここで角運動量  $H_G$  { $\vec{r} \times$  運動量} は、角速度ベクトル  $\vec{\omega}$  と位置ベクトル  $\vec{r}$  を用いて

$$H_G = \iiint_V \rho \{ \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \} dv = i H_x + j H_y + k H_z \quad (4.21)$$

である。ただし、 $\rho$  は物体の密度である。また、図 4.6 の座標系で  $x$  軸回りの角速度を  $p = \dot{\phi}$ 、 $y$  軸回りの角速度を  $q = \dot{\theta}$ 、 $z$  軸回りの角速度を  $r = \dot{\psi}$  とする。角速度の回転方向は、右ネジが進むように取る。角速度ベクトル  $\vec{\omega}$  と位置ベクトル  $\vec{r}$  は、それぞれ(4.22)式である。

$$\left. \begin{aligned} \vec{\omega} &= i p + j q + k r \\ \vec{r} &= i x + j y + k z \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

まず、計算準備として

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times \vec{r} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = i(qz - ry) + j(xr - pz) + k(py - xq) \\ &\equiv i \alpha_1 + j \alpha_2 + k \alpha_3 \end{aligned}$$

を求める。次に

$$\begin{aligned} \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} = i(y\alpha_3 - z\alpha_2) + j(z\alpha_1 - x\alpha_3) + k(x\alpha_2 - y\alpha_1) \\ &= i(py^2 - qxy - rxz + pz^2) + j(qz^2 - ryz - pxy + qx^2) + k(rx^2 - pxz - qyz + ry^2) \end{aligned} \quad (4.23)$$

が得られる。従って、(4.21)式から  $x, y, z$  軸回りの角運動量は、それぞれ

$$\left. \begin{aligned} H_x &= p \iiint_V \rho(y^2 + z^2) dv - q \iiint_V \rho xy dv - r \iiint_V \rho xz dv \\ H_y &= q \iiint_V \rho(x^2 + z^2) dv - r \iiint_V \rho yz dv - p \iiint_V \rho xy dv \\ H_z &= r \iiint_V \rho(x^2 + y^2) dv - p \iiint_V \rho xz dv - q \iiint_V \rho yz dv \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

である。

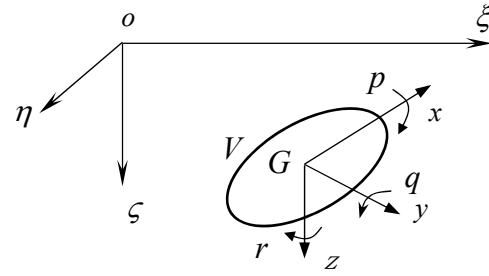


図 4.6 慣性座標 ( $o-\xi, \eta, \zeta$ ) と物体固定座標

右辺の積分は、質量分布、物体形状によって決まる量である。第 1 項を慣性モーメント (inertia moment) といい

$$\left. \begin{aligned} I_{xx} &= \iiint_V \rho(y^2 + z^2) dv \\ I_{yy} &= \iiint_V \rho(x^2 + z^2) dv \\ I_{zz} &= \iiint_V \rho(x^2 + y^2) dv \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

で表す。また、第 2 項以降  $I_{xy} = \iiint_V \rho xy dv \dots$  のことを productive moment inertia という。

慣性主軸と一致するように座標系を取ると  $I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$  となる。

#### 【角柱の慣性モーメント】

図 4.7 に示す長さ  $L$ 、幅  $B$ 、深さ  $d$  の角柱の重心回りの慣性モーメントを求める。ただし、密度  $\rho$  は一定である。角柱の  $x$  軸回りの慣性モーメント  $I_{xx}$  は

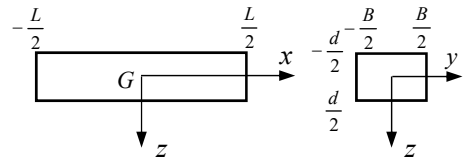


図 4.7 角柱の座標系

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \rho \iiint_V (y^2 + z^2) dv = \rho \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} dy \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} (y^2 + z^2) dz = 8\rho \int_0^{\frac{L}{2}} dx \int_0^{\frac{B}{2}} dy \int_0^{\frac{d}{2}} (y^2 + z^2) dz \\ &= 8\rho \int_0^{\frac{L}{2}} dx \int_0^{\frac{B}{2}} \left[ y^2 z + \frac{z^3}{3} \right]_0^{\frac{d}{2}} dy = 4\rho \int_0^{\frac{L}{2}} dx \int_0^{\frac{B}{2}} \left( y^2 d + \frac{d^3}{12} \right) dy = 4\rho \int_0^{\frac{L}{2}} \left[ \frac{y^3}{3} d + \frac{d^3}{12} y \right]_0^{\frac{B}{2}} dx \\ &= 2\rho \int_0^{\frac{L}{2}} \left( \frac{B^3 d}{12} + \frac{d^3 B}{12} \right) dx = 2\rho B d \left[ \left( \frac{B^2}{12} + \frac{d^2}{12} \right) x \right]_0^{\frac{L}{2}} = \rho L B d \frac{B^2 + d^2}{12} \\ &= m \frac{B^2 + d^2}{12} \quad (\because m = \rho L B d) \end{aligned} \quad (4.26)$$

である。同様に  $y, z$  軸回りの慣性モーメントは、それぞれ

$$I_{yy} = m \frac{L^2 + d^2}{12}, \quad I_{zz} = m \frac{L^2 + B^2}{12} \quad (4.27)$$

である。また、 $I_{xx} = m \kappa_{xx}^2$ ,  $I_{yy} = m \kappa_{yy}^2$ ,  $I_{zz} = m \kappa_{zz}^2$  と表す。 $\kappa_{xx}, \kappa_{yy}, \kappa_{zz}$  をそれぞれの軸回りの環動半径という。工学の場合、環動半径の大まかな値でも実験等の検証で役立つことが多い。これの大体の目安は、角柱の主要目比を  $L \gg B > d$  とすると(4.26), (4.27)式のマクローリン(Maclaurin) 展開から

$$\kappa_{xx} \cong \frac{B \{1 + \frac{1}{2}(d/B)^2\}}{\sqrt{12}} = (0.3 \sim 0.4)B, \quad \kappa_{yy} = \kappa_{zz} \cong \frac{L}{\sqrt{12}} = 0.3L \quad (4.28)$$

程度である。

## 【考察】

流体力学（オイラーの運動方程式）では、モーメントの項が運動方程式には表れない。これは、流体を流体粒子の連続体として取り扱い、元となる流体粒子を質点としているためである（ただし、流体変形の加速度が生じる）。運動方程式でモーメントの項が表れるのは、剛体の運動である。例えば、船舶、飛行機の運動である。運動方程式の記述で注意する点は、加速度の取り扱いである。流体力学の加速度は、地球に固定された慣性座標系で定義されている。もちろん、加速度は、ニュートン以来、慣性座標系で定義されるものである。しかし、船舶や飛行機のように人が操縦する乗り物の場合、北等の方位を主軸に取る慣性座標系よりも乗り物の前進方向を主軸にして、これに対して左右軸、上下軸とした方が操縦者には、運動と力の関係が分かり易い。よって、船舶等の運動方程式では、加速度の記述を慣性座標系から物体固定（重心位置）座標への角速度ベクトル  $\vec{\omega} = (p, q, r)$  の回転変換を行っている。【Note 13】 参照

要点は、流体力学では、流体変形の加速度を実質微分(108)式で考慮したように、剛体の物体固定座標では、回転による加速度を(4.29)式で考慮すれば良い。【Note 14】 参照

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\omega} \times \quad (4.29)$$

右辺第一項は、並進運動による加速度項であり、第二項が回転による加速度項である。 $V = iu + jv + kw$  ,  $\vec{\omega} = ip + jq + kr$  であると

$$\begin{aligned} \frac{DV}{Dt} &= \frac{\partial V}{\partial t} + \vec{\omega} \times V \\ &= i \frac{\partial u}{\partial t} + j \frac{\partial v}{\partial t} + k \frac{\partial w}{\partial t} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} \\ &= i(\dot{u} + wq - vr) + j(\dot{v} + ur - wp) + k(\dot{w} + vp - uq) \end{aligned} \quad (4.30)$$

となる。これは、慣性座標系では向心力として運動方程式の右辺に記述されるものが、剛体の物体固定座標系では、遠心力成分として回転による加速度が左辺に表れた記述である。

慣性主軸と一致するように物体固定座標系を取ると (productive moment inertia が零), 重心位置に固定した座標系での 6 自由度運動方程式の記述は、(4.20), (4.30)式から以下である。

$$\left. \begin{aligned} m(\dot{u} + wq - vr) &= X \\ m(\dot{v} + ur - wp) &= Y \\ m(\dot{w} + vp - uq) &= Z \end{aligned} \right\} \quad (4.31)$$

$$\left. \begin{aligned} I_{xx}\dot{p} + (I_{zz} - I_{yy})qr &= K \\ I_{yy}\dot{q} + (I_{xx} - I_{zz})rp &= L \\ I_{zz}\dot{r} + (I_{yy} - I_{xx})pq &= N \end{aligned} \right\} \quad (4.32)$$

## 【Note 13】剛体運動方程式の記述

物体の重心位置に固定された座標系を図 4.8 に示す。

前進方向を  $x$  として右手系で横方向を  $y$ , 下方向を  $z$  とする。 $x, y, z$  方向の力をそれぞれ  $X, Y, Z$  とし, また, 速度を  $u, v, w$  とする。一方,  $x, y, z$  軸回りのモーメントをそれぞれ  $K, L, N$  とし, また角速度を  $p = \dot{\phi}, q = \dot{\theta}, r = \dot{\psi}$  とする。また,  $i, j, k$  は, それぞれ  $x, y, z$  軸の単位ベクトルである。

力  $F$  は, 運動量 ( $mV$ ) の時間的な変化である。運動方程式は, 物体の回転による加速度を取り入れて(4.29)式から

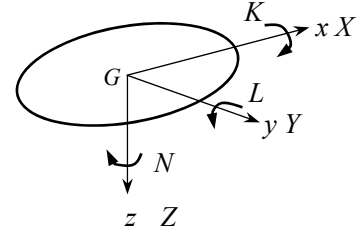


図 4.8 物体固定座標系

$$F = \frac{D}{Dt}(mV) = m \frac{\partial V}{\partial t} + m(\vec{\omega} \times V) = iX + jY + kZ \quad (a)$$

である。ただし,  $V$  は速度ベクトル  $V = iu + jv + kw$  であり,  $\vec{\omega}$  は角速度ベクトル  $\vec{\omega} = ip + jq + kr$  である。よって, (4.30)式を(a)式に代入して(4.31)式が得られる。

一方, モーメント  $M$  は, 重心まわりの角運動量 ( $H_G$ ) の時間的な変化である。物体の重心位置に固定された座標系でのモーメントの運動方程式は

$$M = \frac{D(H_G)}{Dt} = \frac{\partial H_G}{\partial t} + \vec{\omega} \times H_G = iK + jL + kN \quad (b)$$

である。ただし, 角運動量 ( $H_G$ ) は(4.24)式であるが, 物体の重心に固定された物体固定座標系を慣性主軸と一致するように取ると(4.25)式に示す慣性モーメントのみの項となる。

$\frac{\partial H_G}{\partial t}$  の項は(4.24), (4.25)式から

$$\frac{\partial H_G}{\partial t} = i(\dot{p}I_{xx}) + j(\dot{q}I_{yy}) + k(\dot{r}I_{zz}) \quad (c)$$

となる。また, 回転による項は

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times H_G &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ p & q & r \\ pI_{xx} & qI_{yy} & rI_{zz} \end{vmatrix} \\ &= i(qrI_{zz} - qrI_{yy}) - j(rpI_{zz} - rpI_{xx}) + k(pqI_{yy} - pqI_{xx}) \\ &= i(I_{zz} - I_{yy})qr + j(I_{xx} - I_{zz})rp + k(I_{yy} - I_{xx})pq \end{aligned} \quad (d)$$

である。

よって, (c), (d)式を(b)式に代入して(4.32)式が得られる。■

## 【Note 14】回転座標系での微分演算子

図 4.9 に示す固定座標系  $o-xyz$  に対して原点を共有して相対的に角速度  $\vec{\omega}$  で回転している回転座標系  $o-\xi\eta\zeta$  があって、ベクトル  $\vec{r}$  がこの座標系で取られている場合の微分演算子の解説を行う。

回転座標系  $o-\xi\eta\zeta$  の  $\xi, \eta, \zeta$  各軸方向の単位ベクトルを  $e_i, e_j, e_k$  とするとベクトル  $\vec{r}$  は

$$\vec{r} = e_i \xi + e_j \eta + e_k \zeta \quad (a)$$

である。単位ベクトル  $e_i, e_j, e_k$  は、回転により

時間とともに変化するので

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = e_i \dot{\xi} + e_j \dot{\eta} + e_k \dot{\zeta} + \dot{e}_i \xi + \dot{e}_j \eta + \dot{e}_k \zeta \quad (b)$$

となる。時間  $\Delta t$  間の  $e_i$  の変化 ( $\dot{e}_i$ ) は、図 4.10 より

$\vec{\omega}$  に垂直な面の半径  $r = 1 \cdot \sin \theta$  の円周上を  $r\omega\Delta t = \sin \theta \omega \Delta t$  だけ動く。従って、 $e_i$  の時間的変化量は

$$|\dot{e}_i| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin \theta \cdot \omega \Delta t}{\Delta t} = \omega \sin \theta \quad (c)$$

となる。これは、 $|\vec{\omega} \times e_i| = |\vec{\omega}| \cdot |e_i| \sin \theta = \omega \sin \theta$  ( $\because |\vec{\omega}| = \omega, |e_i| = 1$ ) と等しい{(4.15)式参照}。

かつ、その方向は、図 4.10 より  $\vec{\omega}$  と  $e_i$  に垂直である。従って、 $\dot{e}_i = \vec{\omega} \times e_i$  と表される。

同様にして  $\dot{e}_j = \vec{\omega} \times e_j$ ,  $\dot{e}_k = \vec{\omega} \times e_k$  となる。よって、(b)式の単位ベクトルの微分項は

$$\dot{e}_i \xi + \dot{e}_j \eta + \dot{e}_k \zeta = \vec{\omega} \times (e_i \xi + e_j \eta + e_k \zeta) = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (d)$$

となる。また、(b)式の前半部を

$$\left[ \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = e_i \dot{\xi} + e_j \dot{\eta} + e_k \dot{\zeta} \quad (e)$$

で表すと、これは、回転座標系を固定座標系  $\{e_i, e_j, e_k$  が変化しない} とみなしたときの

$\vec{r}$  の時間微分である。従って、(b)式は  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \left[ \frac{d\vec{r}}{dt} \right] + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (f)$  と書き換えられる。

以上から、固定座標系と角速度  $\vec{\omega}$  で回転する座標系では(g)式の微分演算子

$$\frac{D}{Dt} = \left[ \frac{d}{dt} \right] + \vec{\omega} \times \quad (g)$$

の関係が成り立つ。ただし、 $[ ]$  は固定座標系での演算である。■

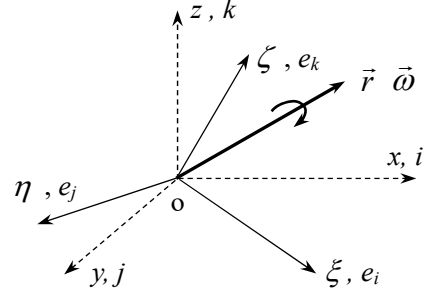


図 4.9 回転座標系における位置ベクトル

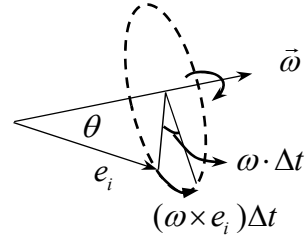


図 4.10  $e_i$  の時間的変化

## Appendix-5 ナビエ・ストークスの運動方程式

コーシーの運動方程式である(113)式の粘性力項について「変形速度とせん断応力」の関係から「せん断応力」を「速度」で表わしたものをナビエ・ストークスの運動方程式 (Navier-Stokes' equation of motion) という。以下に、これの解説を行う。

### 5.1 せん断応力

せん断力は、面と平行に作用する力であり、感覚的には手のひらで机をなぞる時の摩擦力に相当する。単位面積当たりのせん断力を「せん断応力」という。流体のせん断応力  $\tau [N/m^2 = Pa]$  は、ニュートンの粘性法則(Newton's law of viscosity)として(115)式で表される。現実の流場では、図 27(9 オイラーの運動方程式) に示すように  $x$  軸に垂直な面に対して面内に  $y$  と  $z$  軸方向の二成分が存在する。これらを  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  と表し、添え字の前が軸に垂直な面、後が方向を意味する。{例  $\tau_{xy}$  ( $x$  軸に垂直な面) の ( $y$  方向) に働くせん断応力}

### 5.2 変形速度とせん断応力

ニュートンの粘性法則に従い、図 5.1 に示すように点  $A$  の速度を  $u$ , 点  $D$  の速度を  $u+du$  とすると時間  $dt$  後に点  $A$  は、 $udt$  離れた点  $A'$  に点  $D$  は  $(u+du)dt$  離れた点  $D'$  に移動する。

ひずみ  $d\gamma$  の定義は、変形量  $dx$  を代表長さで除したものである (無次元となる)。ここでは、代表長さに  $dy$  を採用して

$$d\gamma = \frac{dx}{dy} = \frac{(u+du)dt - udt}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y} dt \quad (5.1)$$

となり、次式が成り立つ。

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (5.2)$$

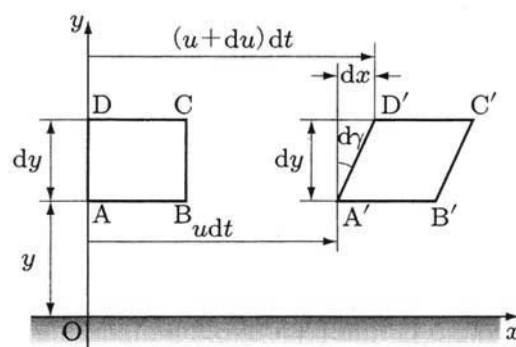


図 5.1 粘性によるせん断変形

(115)式のニュートンの粘性法則は、(5.2)式ひずみの時間変化 (以下、ひずみ速度と呼ぶ) を用いて

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{d\gamma}{dt} \quad (5.3)$$

と表わすことができる。ひずみは無次元であるので  $d\gamma/dt$  に微小距離  $dy$  を掛けたものが実速度となる。これは、せん断変形時の速度を表し、「せん断変形が進む速度」という。

#### 【Note 15 : 流体の変形速度の考察】

図 5.1 で点  $A$  の  $x$  軸方向の速度を  $u$ ,  $y$  軸方向の速度を  $v$  とすると点  $C$  での速度  $(u_c, v_c)$  は

$$\begin{aligned} u_c &= u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \\ &= u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy \end{aligned} \quad (a)$$

(伸縮変形)      (せん断変形)      (回転変形)

$$\begin{aligned}
 v_c &= v + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial x} dx \\
 &= v + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx
 \end{aligned} \tag{b}$$

(伸縮変形)      (せん断変形)      (回転変形)

である。(a), (b)式の第2項を「伸縮変形」、第3項を「せん断変形」、第4項を「回転変形」という。

1) 「伸縮変形」

第3, 4項が零であると図5.2に示すように軸方向のみに変形する伸縮変形となる。ただし、連続の式を満足する変形である(図の面積が等しい)。

2) 「せん断変形」

第2, 4項が零であると図5.3に示すように伸縮、回転もなく、ひし形に変形するせん断変形となる。

3) 「回転変形」

第2, 3項が零であると図5.4に示すように図形の形状を保ったままで反時計方向に回転する。また、 $rotV = \nabla \times V = 0$ は非回転を意味する。

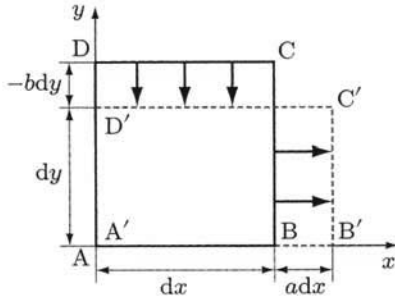


図 5.2 伸縮変形

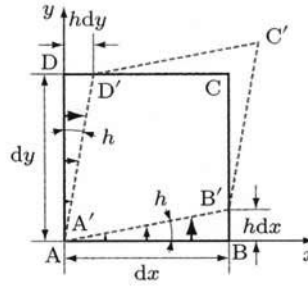


図 5.3 セン断変形

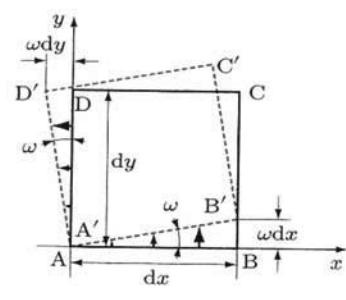


図 5.4 回転変形

図5.3の $h$ は、ひずみ速度 $d\gamma/dt$ に対応する。また、 $hdy$ は流速 $u$ によるせん断変形の進む速度、 $hdx$ は流速 $v$ によるせん断変形の進む速度である。(a)式と(b)式より $x, y$ 方向それぞれの

$$hdy = \frac{\partial \gamma_u}{\partial t} dy = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy, \quad hdx = \frac{\partial \gamma_v}{\partial t} dx = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx \tag{c}$$

が得られる。(c)式から $x, y$ 方向で大きさが等しいことが分かる。従って、ひずみ速度は

$$\frac{\partial \gamma_u}{\partial t} = \frac{\partial \gamma_v}{\partial t} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \tag{d}$$

となる。また、(5.3)式から $x, y$ 方向のせん断応力も等しいことが分かる。この性質を等方性という。等方性とは、方向によって物質的な性質が等しいことである。例えば、金属材料や流体である。一方、方向によって性質が異なるものを異方性という。例えば、木材である。■

一般的な流場では、図 5.3 に示すように  $x, y$  方向のひずみ速度の和となる。従って、2 次元流場では、(d) 式の  $x, y$  方向の両者を加えたものになる。また、これを図 27 の 3 次元流場でのせん断応力の表示で表すと

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial \gamma_u}{\partial t} + \frac{\partial \gamma_v}{\partial t} \right) = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (5.4)$$

である。同様に  $(w, v)$ ,  $(u, w)$  流場でも

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (5.5)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (5.6)$$

が成り立つ。

### 5.3 垂直応力

最後に残るのが粘性による垂直応力 ( $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{yy}$ ,  $\tau_{zz}$ ) と変形速度の関係である。この項の取り扱いには前述のせん断変形に比べて複雑である。 $\tau_{xx}$  は「5.1 せん断応力」の定義より  $x$  軸に垂直な面に作用する  $x$  軸方向のせん断応力であるから  $x$  軸方向の伸縮変形に抗する力を意味する。よって、 $\tau_{xx}$  は、前述のせん断応力と変形速度の関係から次式と推測される。

$$\tau_{xx} = a \frac{\partial u}{\partial x} + b \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (5.7)$$

ただし、 $a, b$  は比例定数である。また、連続の式の関係から  $a \geq 0$ , ならば  $b \leq 0$  となる。さらに、(5.7) 式は  $\lambda_1, \lambda_2$  を未定定数として  $x, y, z$  軸方向に拡張して垂直応力を

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xx} &= \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \tau_{yy} &= \lambda_1 \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda_2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \tau_{zz} &= \lambda_1 \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda_2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

と表わすこともできる。右辺第 2 項は非圧縮性流体であれば、連続の式により消える項であり、方程式の物理的な意味が明確になる。

ここでは、未定定数  $\lambda_1, \lambda_2$  を決めるのに図 5.5, 図 5.6 に示す 2 次元流場で考えてみる。

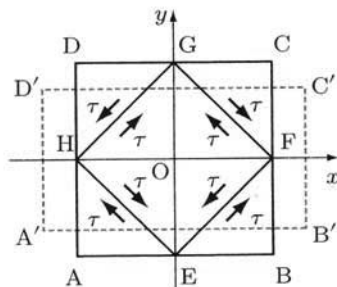


図 5.5 伸縮変形と応力の関係

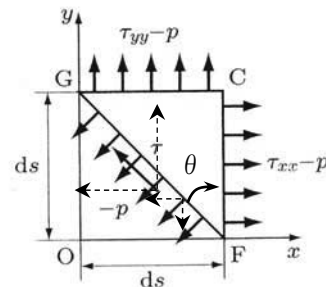


図 5.6 伸縮変形による応力の釣り合い



まず、「5.2 変形速度とせん断応力」で得た知見を活用して、伸縮変形の抗力を図 5.5 のひし形 ( $E, F, G, H$ ) の面に働くせん断応力  $\tau$  に置き換えて考える { $\tau$  の  $\cos$  成分が  $x$  軸方向,  $\sin$  成分が  $y$  軸方向と考える}。従って、図 5.5 の伸縮変形と応力の関係は、このひし形のせん断変形のひずみ速度と応力の関係と考えれば良い。伸縮変形は、図 5.5 に示す破線 ( $x, y$  軸方向) の変形であり、連続の式を満足する (面積が等しい)。つまり、 $x$  軸方向に引っぱられると  $y$  軸方向に縮む変形である。ここでは、せん断変形と同様に【Note 15】から伸縮変形のひずみ速度は、(a), (b) 式の「伸縮変形」の和と表現できる。ただし、連続の式の関係から (a) 式が (+) であれば、(b) 式が (-) となる。このひずみ速度は

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \quad (5.9)$$

と表すことができる。よって、図 5.5 に示すせん断応力  $\tau$  とひずみ速度の関係は

$$\tau = \mu \frac{d\gamma}{dt} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (5.10)$$

となる。

次に、ひし形面の応力  $\tau$  と垂直応力  $\tau_{xx}, \tau_{yy}$  の関係について考える。

図 5.6 に示す  $\triangle FCG$  は、一辺が  $ds$  の直角二等辺三角形であるので  $\angle GFC$  は、 $\theta = \pi/4$  である。 $\triangle FCG$  について各辺に作用する応力と圧力 { $FG$  面にも圧力 ( $-p$ ) が作用する} による  $x, y$  方向の力【応力(圧力)×面積=力】の釣り合は

$$(\tau_{xx} - p)ds = (\tau \sin \theta - p \cos \theta) \frac{ds}{\cos \theta} = (\tau - p)ds \quad (\because \theta = \frac{\pi}{4}) \quad (5.11)$$

$$(\tau_{yy} - p)ds = (-\tau \cos \theta - p \sin \theta) \frac{ds}{\cos \theta} = (-\tau - p)ds \quad (5.12)$$

である。(5.11), (5.12) 式それぞれから (5.13) 式が得られる。また、(5.11) 式と (5.12) 式を加えると (5.14) 式が得られる。

$$\tau_{xx} = -\tau_{yy} = \tau \quad (5.13)$$

$$\tau_{xx} + \tau_{yy} = 0 \quad (5.14)$$

一方、(5.10) 式に連続の式  $\partial u / \partial x + \partial v / \partial y = 0$  を適用すると

$$\tau = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = -2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (5.15)$$

となる。

よって, (5.13), (5.14)式と(5.15)式から垂直応力  $\tau_{xx}, \tau_{yy}$  は

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (5.16)$$

となる。(5.8)式で  $w=0$  とした2次元の式に(5.16)式を代入して

$$\lambda_1 = 2\mu \quad (5.17)$$

が得られる。

3次元流場でも2次元流場の(5.14)式と同様な

$$\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz} = 0 \quad (5.18)$$

が成り立つとして, これを(5.8)式に適用して各方向成分を足し合わせると

$$(\lambda_1 + 3\lambda_2)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0 \quad (5.19)$$

が得られる。これが非圧縮性, 圧縮性流体に関わらず成り立つためには

$$\lambda_1 = -3\lambda_2 \quad (5.20)$$

の関係が必要となる。(5.17)式から

$$\lambda_2 = -\frac{2}{3}\mu \quad (5.21)$$

となる。これは, 伸縮変形時に応力に偏りがなかったとしたストークスの仮説(Stokes' hypothesis)が成り立つときに成立するものである。

以上,  $\lambda_1, \lambda_2$  を(5.8)式に代入すると, 粘性による垂直応力は

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \quad (5.22)$$

$$\tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \quad (5.23)$$

$$\tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \quad (5.24)$$

となる。

#### 5.4 粘性力項の変換

コーシーの運動方程式である(113)式の粘性力項にせん断応力の(5.4), (5.5), (5.6)式と垂直応力の(5.22), (5.23), (5.24)式を代入する。ここでは,  $x$  軸方向の例を示す。

$$\begin{aligned}
\frac{Du}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + F_x + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \\
&= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + F_x + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\} \\
&\quad + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right\} \\
&= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + F_x + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (5.25)
\end{aligned}$$

同様に  $y, z$  軸方向は

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + F_y + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (5.26)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + F_z + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (5.27)$$

である。

以上がナビエ・ストークスの運動方程式である。

液体のような非圧縮性流体の場合には、連続の式  $\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z = 0$  から (5.25), (5.26), (5.27) 式の最終項が無くなり

$$\left. \begin{aligned}
\frac{Du}{Dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + F_x + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\
\frac{Dv}{Dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + F_y + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\
\frac{Dw}{Dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + F_z + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)
\end{aligned} \right\} \quad (5.28)$$

となる。また、ベクトル形式で

$$\begin{aligned}
&\text{(対流項)} \\
\frac{D\mathbf{V}}{Dt} &= \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \text{grad}) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{F} + \nu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (5.29)
\end{aligned}$$

でも表わされる。実質微分の加速度項全体を慣性項といい、加速度の第二項を対流項という。そして、右辺の第1項を圧力項、第2項を体積力項または質量項そして動粘性係数  $\nu$  の掛った項を粘性力項という。

### 【薄い層の定常2次元粘性流れ】

ナビエ・ストークスの運動方程式の応用例として図5.7に示す斜面上の薄い層の定常粘性流れの解析を試みる。 $x$ - $z$ 面の2次元流場で取り扱う。さらに、斜面の角度 $\theta$ を微小として、流れは $x$ 軸方向には変化しないとする。また、流体の層の厚さを $h$ とし、この表面上の圧力を大気圧（零）とする。つまり、流体層内速度 $u$ の $z$ 軸方向の分布を求める問題である。

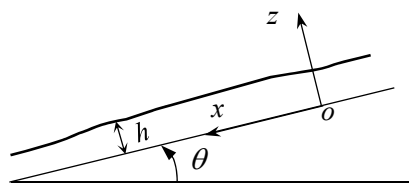


図5.7 薄い層の定常粘性流れ

### 【考え方（定式化）】

ここで大事なことは、数式の展開ではなく、定式化における境界条件の取り込み方である。運動方程式は、非圧縮性ナビエ・ストークスの方程式である。流速は $u$ のみで( $v=w=0$ )、かつ、定常流から $\partial u / \partial t = 0$ であり、加えて、 $x$ 軸方向には変化しないことから $\partial u / \partial x = 0$ である。また、圧力は $z$ 軸方向のみに変化して、 $x$ 軸方向には変化しない。体積力は重力加速度 $g$  ( $F_x = g \sin \theta$ ,  $F_z = -g \cos \theta$ )である。以上の条件を取り入れて(5.28)式は

$$g \sin \theta + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (x \text{ 軸方向}) \quad (5.30)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \cos \theta = 0 \quad (z \text{ 軸方向}) \quad (5.31)$$

となる。まず、(5.30)式を $z$ で2回積分すると

$$u = -\frac{g \sin \theta}{\nu} \frac{z^2}{2} + c_1 z + c_2 \quad (5.32)$$

が得られる。境界条件 $z=0$ で $u=0$ と $z=h$ で $\tau = \mu(\partial u / \partial z) = 0$ （自由表面でせん断応力が零）より

$$c_2 = 0, \quad c_1 = \frac{g \sin \theta}{\nu} h \quad (5.33)$$

が得られ、速度 $u$ の $z$ 軸方向の分布は

$$u = \frac{g \sin \theta}{2\nu} (2hz - z^2) \quad (5.34)$$

となる。また、圧力分布は、(5.31)式を $z$ で1回積分して

$$p = \rho g(h-z) \cos \theta \quad (\because z=h, p=0) \quad (5.35)$$

となる。

### 【考察】

水の動粘性係数は、 $\nu = 1.0 \times 10^{-6}$  ( $20^\circ\text{C}$ )であるから、斜面の傾斜角を3度とすると表面流速は(5.34)式から $h=1 \text{ mm}$ で $u=0.25 \text{ m/s}$ となる。しかし、 $h=10 \text{ mm}$ では $u=25 \text{ m/s}$ となり現実とかけ離れている。これは、非常に薄い層に粘性の影響を取り入れた問題であって、似ているが境界層を含む一般的な流場解析ではないことに注意すべきである。本例題では省略した流れ方向の速度変化や圧力変化の影響を取り入れることの重要性を示唆している。■

## 【流体力学的相似則】

非圧縮性ナビエ・ストークスの運動方程式を用いて流体力学的相似則（無次元化）を考えてみる。模型実験では、以下に示す相似則が必要である。

- 1) 幾何学的相似「実物と模型の間で相対応する2点間の長さの比が全て同一である。」
- 2) 動力的相似「実物と模型の間で相対応する力の比が全て同一である。」
- 3) 運動力学的相似「実物と模型の間で相対応する点の無次元速度成分が同一である。」

幾何学的相似と動力的相似が成り立っている時は、境界条件を相似にすれば、運動力学的相似は成り立つ。模型実験では、幾何学的相似模型で動力的相似条件を満足させれば良い。ここでは動力的相似則について解説する。(5.28)式で次元解析に必要な  $x$  と  $u$  成分の式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \cdots = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + F_x + \nu \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cdots \right\} \quad (5.36)$$

である。(5.36)式を代表流速  $U$  と代表長さ  $L$  を用いて無次元化する。長さ ( $L$ )、速度 ( $U$ )、時間 ( $L/U$ )、圧力 ( $\rho U^2$ ) および体積力 ( $g$ ) の無次元化は(5.37)式である。

$$x' = \frac{x}{L}, \quad u' = \frac{u}{U}, \quad t' = \frac{t}{L/U}, \quad p' = \frac{p}{\rho U^2}, \quad F' = \frac{F_x}{g} \quad (5.37)$$

(5.37)式を(5.36)式に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u'U)}{\partial(t'(L/U))} + u'U \frac{\partial(u'U)}{\partial(x'L)} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(p'\rho U^2)}{\partial(x'L)} + F'g + \nu \left\{ \frac{\partial}{\partial(x'L)} \frac{\partial(u'U)}{\partial(x'L)} \right\} \\ \frac{U^2}{L} \left( \frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} \right) &= -\frac{U^2}{L} \frac{\partial p'}{\partial x'} + F'g + \frac{U}{L^2} \nu \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} \end{aligned} \quad (5.38)$$

となる。両辺を  $U^2/L$  で除して

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + F' \frac{gL}{U^2} + \frac{\nu}{UL} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} \quad (5.39)$$

(体積力)      (粘性力)

となる。左辺の慣性力項と右辺の圧力項は無次元となるが、右辺の体積力項と粘性力項にはそれぞれ ( ' ) が付かない係数が残る。これら係数の逆数は、それぞれ次式である。

$$\text{Re} = \frac{UL}{\nu} = \text{慣性力} / \text{粘性力} \quad (\text{レイノルズ数}) \quad (5.40)$$

$$\text{Fn} = \frac{U}{\sqrt{L \cdot g}} = \text{慣性力} / \text{重力} \quad (\text{フルード数}) \quad (5.41)$$

## 【考察】

レイノルズ数が大きいと慣性力が粘性力に比べ支配的になる。また、フルード数が等しいと実物と模型で重力の影響が等しい。例えば、模型船の造る波と実船の波の影響が等しい。模型実験で動力的相似則を満たすためには、レイノルズ数とフルード数を共に等しくする必要はある。しかし、これは現実的には不可能である。流体力学現象の特徴的な力を選んでレイノルズ数かフルード数の一方を満たすようにする。これを緩和された相似則という。船の模型実験では、造波の影響を重視してフルード数を満たす方法を採用している。■

## 【フルード数】

William Froude (1810-1879)が生まれたのはロンドンから真西に約 300 km にある Dartington 村である。その当時、イギリス中流階級出身の知識層の多くがそうであったように牧神の子である。17 歳の時に Oxford の中でも Exeter について古い Oriel College に入学した。フルードはヨットに熱中して進学が危うかったが、兄の熱心な指導により数学の第一学級へ進学した。その後、造船技師として船の抵抗の解析法で実船と模型船の比較法則を導いたのである。フルードは当初、船の抵抗  $R$  は二つの成分からなり

$$R = k \cdot L^2 u^2 + f(L, u) \quad (5.42)$$

と考えていた。 $k$  は船型による係数、 $L$  は船の代表長さ、 $u$  は速度である。 $f(L, u)$  は、これから研究しようとする船体に働く力で  $L$  と  $u$  の関数である。右辺第一項は、船が無限流体中（自由表面なし）を移動する時の力である。第二項は、重力の作用下で船が水面を走ることによって発生する力である。フルードは、これまでの抵抗計測の経験から  $f(L, u)$  について速度  $u$  の二乗に比例するとして  $f(L, u) \propto k' L^2 u^2$  の形を想定していた。加えて、速度  $u$  が  $\sqrt{L}$  に比例すると仮説を立てて  $f(L, u)$  の代わりに  $k' L^3$  とした。また、第一項の  $u^2$  の代わりに  $L$  を入れて(5.42)式は

$$R = (k + k') L^3 \quad (5.43)$$

と書くことができる。模型船の縮尺が  $1/n$  の場合、模型船の速度を実船の  $\sqrt{1/n}$  にすると模型船が水面を走ることによって発生する力の影響が実船と同じになる比較法則を見出したのである。つまり、実船と模型船間の重力（造波）の影響が同じになるのである。しかし、ここでは、まだ摩擦抵抗については、あからさまに言及していない。

## 【例題】

実船では、長さ  $L=200$  m、速度  $V=20$  ノットである。模型船長さ  $L_m=4$  m の場合、模型船の対応速度  $u_m$  (m/s) を求めよ。

実船と模型船とでフルード数が等しい速度を選ぶ。

$$F_n = \frac{u}{\sqrt{Lg}} = \frac{u_m}{\sqrt{L_m g}} \quad \text{から}$$

$$u_m = u \sqrt{\frac{L_m}{L}} = 10.29 \sqrt{\frac{4}{200}} = 1.455 \text{ (m/s)} \quad (\because u = V \frac{1852}{3600})$$

である。

船の抵抗試験での剰余抵抗  $r_R$ （摩擦抵抗以外の抵抗成分、(5.43) 式  $k' L^3$  項）を図 5.9 に示す。 $F_n = 0.32$  を超えるあたりから急激に剰余抵抗が大きくなる。主要因は、造波抵抗の増加である。これから船の速度を速くするためには、主機出力の増加のみならず、船の長さ  $L$  も長くする（ $F_n$  を下げる）必要があることが分かる。



図 5.8 William Froude

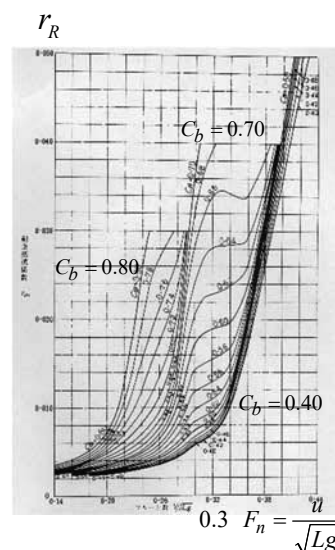


図 5.9 剰余抵抗係数

## 【レイノルズ数】

Osborne Reynolds (1842-1912)は、アイルランド北部のベルファストで生まれ、イングランド東部のエセックスに両親と共に移り住んだ。父は、学校長と牧師を兼務して数学に造詣の深い学者でもあった。レイノルズは、造船所の見習い工として働き始め、その後、ケンブリッジ大学のクイーンズ・カレッジに入学した。1868年にマンチェスターにあるオーウェン大学の工学教授になった。有名なのが図 5.11 に示す配管内の流れの層流から乱流へと遷移する条件について研究したことである。これらの実験から動的相似性について無次元のレイノルズ数(5.40)式への発見へとつながった。1877年に王立協会会員に選ばれ、1888年にロイヤル・メダルを授与された。流体力学へのレイノルズの寄稿は造船学に関するもの多く、造船協会論集(Transactions of the Institution of Naval Architects)に発表されている。



図 5.10 Osborne Reynolds

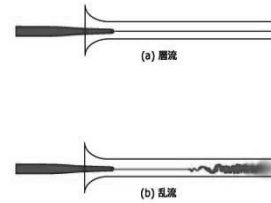


図 5.11 流れの性質についての観察

## 【流体抗力】

物体に流れが当たると、物体は流れから力を受ける。流れと平行の力を抗力  $D$  (drag), 流れと直角な力を揚力  $L$  (lift) {参考文献(10)を参照} という。他方、船舶や飛行機のような運動体では、物体の前進方向と逆向きの力を抵抗  $R$  (resistance) という。前進方向と流れが一致する場合は、抗力と抵抗は同じであるが、運動中では使い分けが必要になる場合もある。ここでは、抗力について解説する。抗力係数(drag coefficient)  $C_D$  は

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho U^2 A} \quad (5.44)$$

である。ただし、 $A$  は、物体の流れに垂直な面への投影面積である。一方、運動体では、図 5.12 に示す最大断面積を取ることが多い。抗力係数の代表例として図 5.13 に円柱の抗力係数と図 5.14 に球の抗力係数を示す。

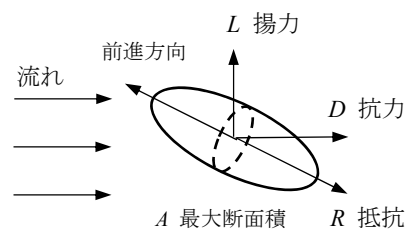


図 5.12 物体の抗力と抵抗の関係

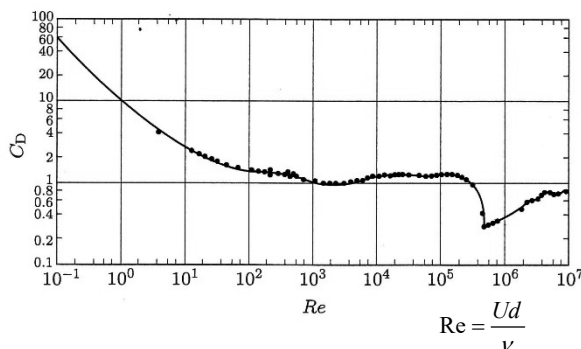
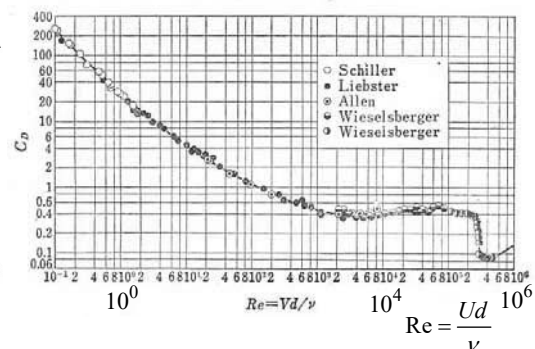
図 5.13 円柱 ( $l/d = \infty$ ) の抗力係数

図 5.14 球の抗力係数

両図とも横軸は(5.40)式のレイノルズ数  $Re$  である。レイノルズ数の代表長さ  $L$  は、流れ方向の物体の代表長さを取るのので図 5.13 では、円柱の長さ  $\ell$  ではなく、直径  $d$  である。また、 $\nu$  は動粘性係数である {表 4 参照}。円柱、球ともにレイノルズ数が小さい範囲 ( $Re=1$ ) では抗力係数が非常に大きく、 $Re=10^3 \sim 10^5$  の範囲では略一定となる。しかし、抗力係数の値は、 $\{Re=1: \text{円柱 } C_D=10, \text{球 } C_D=30\}$ ,  $\{Re=10^5: \text{円柱 } C_D=1.2, \text{球 } C_D=0.5\}$  それぞれ異なる。一方、 $Re=10^5 \sim 10^7$  の範囲で大きく減少して、再び増加する傾向は同じである。この現象は、物体表面の流れが層流(laminar flow)から乱流(turbulent flow)へと変化するからである。例として平板での摩擦抵抗係数を図 5.15 に示す。

摩擦抵抗係数  $C_f$  (skin frictional drag coefficient) は

$$C_f = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho U^2 S} \quad (5.45)$$

である。ただし、 $S$  は物体浸水部の表面積である。 $C_D$  とは代表面積の取り方が違うので要注意である。

平板では、レイノルズ数  $Re=10^5$  ぐらいまでは層流

となり、 $Re=10^7$  を超えると乱流へと移行する。その間を遷移域と呼ぶ。このメカニズムの解説は、複雑であるので専門書に譲るが、この現象が存在することを理解しておけば良い。つまり、層流から乱流へと遷移することで摩擦抵抗が減少する可能性がある。これの身近な例は、ゴルフボールのディンプル (えくぼ) である。平板の摩擦抵抗  $C_f$  の近似式は、以下である。

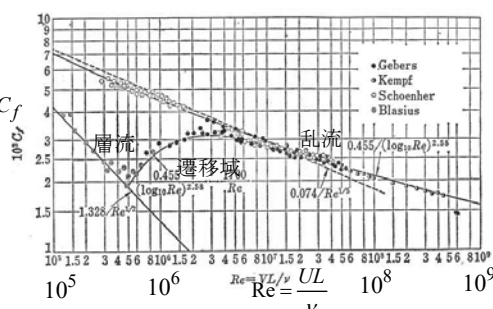


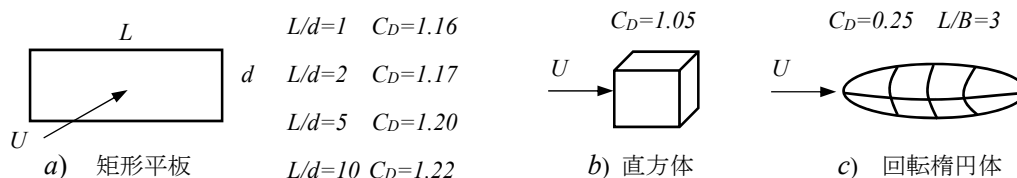
図 5.15 平板の摩擦抵抗係数

$$\text{層流: } C_f = \frac{1.328}{\sqrt{Re}} \quad (Re < 10^5) \quad (5.46) \text{ Blasius の式}$$

$$\text{遷移域: } C_f = \frac{0.074}{Re^{1/5}} - \frac{1700}{Re} \quad (Re = 5 \times 10^5 \sim 10^7) \quad (5.47) \text{ Prandtl の式}$$

$$\text{乱流: } C_f = 0.463(\log_{10} Re)^{-2.6} \quad (Re = 10^6 \sim 10^9) \quad (5.48) \text{ Schoenherr の式}$$

他方、代表的な抗力係数  $C_D$  を以下に示す。



#### 【例題】

図 5.16 に示す一様流中に置かれた円柱の抗力を求める。

円柱の長さ  $\ell = 2 \text{ m}$ 、直径  $d = 0.2 \text{ m}$  である。流速は、 $u = 0.5 \text{ m/s}$  である。また、水温が  $20^\circ\text{C}$  の清水である。ただし、円柱端部の影響は無視して良い。ここでの要点は、レイノルズ数  $Re$  の代表長さの取り方である。ここでは、流れ方向の代表長さ、直径  $d$  を採用して

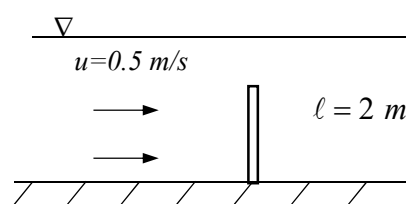


図 5.16 一様流中の円柱



$$\text{Re} = \frac{UL}{\nu} = \frac{u d}{\nu} = \frac{0.5 \times 0.2}{1.0 \times 10^{-6}} = 1 \times 10^5 \quad (5.49)$$

である。

$\text{Re} = 1 \times 10^5$  より図 5.13 から抗力係数を  $C_D = 1.2$  と読む。 $(\text{Re}$  の代表長さに  $L = \ell$  をとると、 $\text{Re} = u\ell/\nu = 10^6 \rightarrow C_D = 0.5$  となるので注意が必要である。) 投影面積は  $A = \ell \cdot d$  である。

求める抗力  $D$  は

$$D = \frac{1}{2} \rho u^2 A \cdot C_D = \frac{1}{2} 998.2 \times 0.5^2 \times (2 \times 0.2) \times 1.2 = 60 \text{ (N)} \quad (5.50)$$

である。

### 【考察】自転車の速度と脚力

流体抗力の応用例として、自転車走行中における風圧抵抗の影響について考察する。人と自転車を含めた質量を  $m$ ，推力を  $T$  とする。走行抵抗（タイヤの摩擦抵抗や軸，チェーンの摩擦力を含む）を  $R_T$ ，風圧抵抗を  $R_w$  とする。坂道の登り抵抗を  $R_g$  とする。

速度を  $u$  とすると運動方程式は

$$m \dot{u} = T - R_T - R_w - R_g \quad (5.51)$$

である。ただし、走行抵抗は、速度の 2 乗に比例するとして  $R_T = a u^2$  で表す。

風圧抵抗は、向かい風を想定して風速  $u_a$  と速度  $u$  を加えた相対風速を用いて(5.44)式から

$$\begin{aligned} R_w &= \frac{1}{2} \rho_a (u + u_a)^2 A \cdot C_D \\ &= \alpha (u + u_a)^2 \quad (\because \alpha = \frac{1}{2} \rho_a A \cdot C_D) \end{aligned} \quad (5.52)$$

である。ただし、 $\rho_a$  は空気の密度 ( $\rho_a = 1.20 \text{ kg/m}^3$ ,  $20^\circ\text{C}$ ) である。正面投影面積を普通車姿勢の  $A = 0.55 \text{ m}^2$  とする。また、抗力係数を円柱等から  $C_D = 1.0$  と推定する。 ( $\therefore \alpha = 0.33$ )

坂道の登り抵抗は、坂道の傾度を  $\theta$  とすると

$$R_g = mg \sin \theta \quad (5.53)$$

である。

推力  $T(t)$  は時間の関数であるが、これの定量的なモデル化が難しい。加えて、速度の項が非線形であるので解析法が煩雑になる。ここでは、速度と脚力の定性的な関係を得ることを主目的に定常走行中とする。これにより、定常走行中 ( $\dot{u} = 0$ ) では、推力と抵抗が釣り合い

$$\begin{aligned} T &= R_T + R_w + R_g \\ &= a u^2 + \alpha (u + u_a)^2 + mg \sin \theta \end{aligned} \quad (5.54)$$

である。この出力  $P_w(w)$  は

$$P_w = T \cdot u = Q \cdot \omega = Q \cdot 2\pi n_p \quad (\because \omega = 2\pi n_p) \quad (5.55)$$

である。ただし、 $Q \text{ (Nm)}$  はペダルトルク、 $n_p \text{ (rps)}$  はペダル回転数である。

また、ペダル回転数  $n_p$  は独立ではなく、速度  $u$  と次の関係がある。

$$n_p = \frac{u}{\pi D \cdot GR} \quad (5.56)$$

ただし、 $D$  はタイヤ直径、 $GR$  はギヤ比である。

自転車の漕ぎ方については、幾つかの仮定を設定してモデル化する。ペダルトルクは、脚の押し下げと引き上げ動作で一サイクルとなる。

仮定 1) 普通の漕ぎ方では、押し下げ力 > 引き上げ力であり、押し下げ力によるトルクが主である。

仮定 2) 脚の引き上げ動作は、主に、一サイクル中のトルクの平滑化に働くとして、引き上げ力のトルクへの寄与を次の係数  $k$  で表す。

$$k = \frac{\text{引き上げ力}}{\text{押し下げ力}} \quad (k: \text{引き上げ力係数})$$

仮定 3) 左右脚の押し下げ力は、等しいとする。加えて、一サイクルのペダルトルクは、図 5.17 に示すように平滑化されているとして(5.57)式で表す。

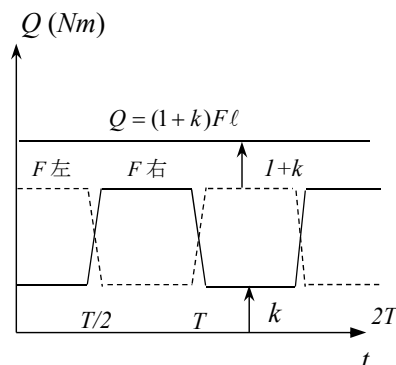


図 5.17 トルク変動モデル

$$Q = (1+k)F\ell \quad (5.57)$$

ただし、 $F$  は、押し下げ力を意味する。 $\ell$  は、ペダルクランク軸の長さである。

ここでは、走行抵抗係数  $a$ 、風圧抵抗係数  $\alpha$ 、引き上げ力係数  $k$  の三つを性能係数と呼ぶ。また、タイヤ直径  $D$ 、人と自転車の質量  $m$ 、ペダルクランク軸の長さ  $\ell$ 、ギヤ比  $GR$  の四つを性能主要目と呼ぶ。

以上より、自転車の定常走行時での速度に対応する脚力は、性能主要目が決まり性能係数が得られると(5.54)、(5.55)と(5.57)式を連立させた数値的な解法で得られる。

#### 【性能係数のチェック】

車種は、普通車の 26 インチ型である。走行抵抗 ( $R_T = au^2$ ) の係数  $a$  には、 $a = 1.0 \text{ (N(s/m)}^2\text{)}$  を採用する。計算条件は、速度が一般的な大人が普通車を漕いで得られる  $20 \text{ km/h (5.6 m/s)}$  である。ただし、 $u_a = 0$ 、 $\theta = 0$  である。性能係数と性能主要目のまとめを下表に示す。

性能係数	$a = 1.0 \text{ (N(s/m)}^2\text{)}, \quad \alpha = 0.33 \text{ (N(s/m)}^2\text{)}, \quad k = 0.10$		
性能主要目	$D = 0.66 \text{ (m)}, \quad m = 80 \text{ (kg)}, \quad \ell = 0.20 \text{ (m)}, \quad GR = 3.0$		

<結果>

- 1) ペダル回転数  $n_p$  は、 $n_p = 5.6 / (0.66\pi \times 3.0) = 0.90 \text{ (rps)}$  である。
- 2)  $R_T = 31.4 \text{ (N)}$ 、 $R_w = 10.3 \text{ (N)}$ 、 $P_w = 234 \text{ (w)}$ 、 $F = F_o = 188 \text{ (N)}$  である。

<判定評価>

一般的な大人の常用出力は、 $P_w = 250 \text{ (w)}$  前後であることと、脚力  $F$  とペダル回転数  $n_p$  の結果を経験的に判断して、性能係数と性能主要目の関係は、ほぼ良いようである。

以下に前述の性能係数と性能主要目を用いて、風速  $u_a$  と坂道の斜度  $\theta$  の影響について考察する。加えて、普通車、スポーツ車、競技車を想定して性能係数の比較検討を行う。

### 【風速 $u_a$ の影響】

計算条件は、 $P_w = 234$  (w) 一定である。風速  $u_a$  を変更して速度  $u$  を(5.55), (5.57)式から数値的に求める。ただし、 $\theta = 0$  である。結果を表 1 に示す。

$u_o = 5.6$ m/s			表 1 風速 $u_a$ の影響				$F_o = 188$ (N)		
$u_a$ (m/s)	$u$ (m/s)	(km/h)	$n_p$ (rps)	$R_T$ (N)	$R_w$ (N)	$R_g$ (N)	$F$ (N)	( $F/F_o$ )	$\gamma$ (%)
5.0	4.6	(16.6)	0.74	21.2	30.4	0	229	(1.22)	59
8.0	3.8	(13.7)	0.61	14.4	45.9	0	278	(1.48)	76
10.0	3.3	(11.9)	0.53	10.9	58.4	0	319	(1.70)	84

- 1) 風圧抵抗が全抵抗に占める割合を  $\gamma$  とすると、無風時( $u_a = 0$ )の  $\gamma$  は、速度とは無関係で走行抵抗係数  $a$  と風圧抵抗係数  $\alpha$  で決り、 $\gamma = 0.33/1.33 = 25\%$  を占める。
- 2)  $u_a = 5$  m/s の正面風を受けると  $\gamma$  が 59% を占める。速度は、17% 減の  $u = 16.6$  km/h となる。脚力  $F$  は、1.2 倍になる。風速 10 m/s では、ペダル回転数  $n_p$  がほぼ半分に落ち、脚力  $F$  も 1.7 倍となり、もはや定常走行が難しいことが分かる。

### 【坂道の斜度 $\theta$ の影響】

計算条件は、 $P_w = 234$  (w) 一定である。ただし、 $u_a = 0$  である。結果を表 2 に示す。

$u_o = 5.6$ m/s			表 2 坂道の斜度 $\theta$ の影響				$F_o = 188$ (N)		
$\theta$ ° (勾配)	$u$ (m/s)	(km/h)	$n_p$ (rps)	$R_T$ (N)	$R_w$ (N)	$R_g$ (N)	$F$ (N)	( $F/F_o$ )	$\gamma$ (%)
2 (3.5/100)	4.4	(15.8)	0.71	19.4	6.4	27.4	238	(1.27)	12
4 (7/100)	3.4	(12.2)	0.55	11.6	3.8	54.7	308	(1.63)	5
6 (10/100)	2.6	(9.4)	0.42	10.9	6.8	82.0	403	(2.14)	2

- 1) 斜度が  $\theta = 2^\circ$  と緩やかな斜面でも速度が約 21% 減の  $u = 15.8$  km/h となり、風速  $u_a = 5$  m/s を受けているのと変わらない状態である。
- 2) 斜度が  $\theta = 6^\circ$  となると速度が約 53% 減の  $u = 9.4$  km/h となり、脚力  $F$  は平地、無風状態の約 2 倍となる。もはや、パワーアップの立ち漕ぎを強いられる。この場合、変速機によるギヤ比  $GR$  の変更が有効である。例えば、速度がそのままの 2.6 m/s で  $GR = 3 \rightarrow 2$  にすると  $n_p = 0.63$ ,  $F = 269$  (1.43) に軽減される。
- 3) 変速機の無い自転車では、図 5.18 に示すように S 字に上ることが有効である。例えば、進行方向と  $\beta = 45^\circ$  の角度で上ると、斜度  $\theta$  が  $\cos \beta$  倍の  $1/\sqrt{2}$  倍となり、 $6^\circ$  の斜度が  $4.2^\circ$  に軽減される。しかし、走行距離は、逆に  $\sqrt{2}$  倍となる。また、方向転換ごとに加速の力が加わり、方向転換が多くなる狭くて長い坂には向かない。

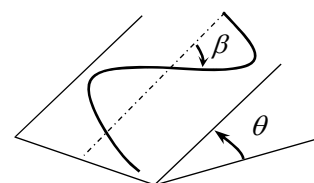


図 5.18 S 字走行

## 【普通車, スポーツ車, 競技車の性能係数比較】

普通車, スポーツ車, 競技車を想定して性能係数( $a, \alpha, k$ )の比較検討を行う。ただし, 平坦で無風状態である。また, タイヤ直径 $D=0.66\text{ m}$  (26インチ型), ペダルクランク軸の長さ $\ell=0.20\text{ m}$ とする。検討結果を表3に示す。

表3 普通車, スポーツ車, 競技車の性能係数比較

車種	要求速度	$a$	$\alpha$	$k$	GR	$n_p$ (rps)	$F$ (N)	$Pw$ (w)
普通車	6.0 (22)	1.00	0.33	0.1	3.0	0.96	216	287
スポーツ車	10.0 (36)	0.50	0.18	0.3	5.0	0.96	434	680
競技車	14.0 (50)	0.30	0.12	0.7	6.5	1.04	518	1,152

m/s (km/h)

- 1) 走行抵抗係数  $a$ : スポーツ車では普通車の1/2, 競技車では普通車の1/3が要求される。
- 2) 風圧抵抗係数  $\alpha$ : スポーツ車では, 姿勢を屈めることで普通車の約半分にする必要がる。  
競技車では, 服装の素材やヘルメット形状にも工夫が要求される。
- 3) 引き上げ力係数  $k$ : スポーツ車, 競技車ともに脚の引き上げ力をペダルトルクに変換する  
漕ぎ方が要求される。

## 【漕ぎ出し力】

漕ぎ初めにペダルが重たく感じられるのは, (5.51)式に示す加速度による慣性力( $m\ddot{u}$ )が加わるためである。仮に, 5~6秒ほどで一定速度 $u=5.6\text{ m/s}$ に達するように漕ぎ出すと加速度は, 約 $1\text{ m/s}^2$ となる。この時の慣性力は約 $80\text{ N}$ であり, 定常走行時の抵抗( $41.7\text{ N}$ )の約2倍である。つまり, 漕ぎ初めは, 速度が遅く走行抵抗等がほとんど零にもかかわらず, 定常走行時に感じている脚力の約2倍を必要とするのである。

## 【おまけ】

普通車走行で一般的な大人の常用出力は $250\text{ (w)}$ 程度である。これの1時間走行時の消費エネルギーは,  $216\text{ kcal}$  ( $1\text{ kw}=0.24\text{ kcal/s}$ )に相当する。これは, ごはん $130\text{ g}$  ( $168\text{ kcal}/100\text{ g}$ )程度である。運動によるダイエットが難しいのがつくづく分かる。

清水, 空気の密度と動粘性係数を表4に示す。

表4 動粘性係数  $\nu(\text{m}^2/\text{s})$  (1気圧における値)

温度 $t$ (°C)	清水		海水	空気	
	$\rho$ ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )	$\nu \times 10^6$	$\nu \times 10^6$	$\rho_a$ ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )	$\nu \times 10^6$
0	999.87	1.7867	1.8284	1.293	13.22
5	999.99	1.5170	1.5614	1.269	13.66
10	999.73	1.3064	1.3538	1.247	14.10
15	999.13	1.1390	1.1883	1.225	14.56
20	998.23	1.0037	1.0537	1.203	15.01
25	997.07	0.8929	0.9425	1.184	15.47
30	995.76	0.8009	0.8493	1.164	15.93

## 【おわりに】

2018 年の元旦に手書き授業資料の電子化を思い立った。まずは、2 年生の流体力学から始めることにした。思いつくままに書き進めると、分量も多くなり「桜の季節」までに至った。振り返ると学問領域の境界を見極めるのが難しく、瀬祭の感がある。

思うに、多くを解説しようとする「動」と学生自ら解き進むことに期待を込めて待つ「静」が交錯する。

## 【参考文献】

- 1) 基本を学ぶ流体力学：藤田勝久，森北出版
- 2) 基礎解析学コース ベクトル解析：矢野健太郎，石原 繁，裳華房
- 3) 流体力学（前編）：今井 功，裳華房
- 4) 流体力学（I）：西山哲男，日刊工業新聞社
- 5) 船舶海洋工学のための流体力学入門：池畑光尚，船舶技術協会
- 6) 英和対照 [工学基礎テキスト] 流体力学：石間経章，天谷賢児，森北出版
- 7) Marine Hydrodynamics：J. N. Newman ,The MIT Press Cambridge, Massachusetts, and London
- 8) 工科のための一般力学：中川憲治，森北出版
- 9) FLUID-DYNAMIC DRAG：HOERNER, Published by the Author
- 10) 薄翼理論と流れ模型：重廣律男，Published by the Author
- 11) ウィリアム・フルード その人と業績：吉岡 勲，日本造船協会誌 第 506 号，1971 年 8 月，日本造船学会

第 2 刷 改定版発行 2019 年 3 月

第 1 刷の記述表現や誤り等を修正した。さらに，Appendix-5 にナビエ・ストークスの運動方程式の解説を追加した。