

等分除と包含除の統合という視座からのわり算の指導の改善

福 富 健 [鹿児島市立田上小学校]

Improving teaching methods for division from the perspective of integrating partitive and quotative divisions
FUKUTOMI Takeru

キーワード：わり算、等分除、包含除、統合、意味

1. 問題の所在

子供にとってわり算の理解は、容易ではない。その理由の一つとして、わり算は、等分除と包含除という2つの場面に適用される演算であることが挙げられる。等分除とは、12個のものを4人に等分して1人分の個数を求めるといった、ある数量を等分したときにできる1つ分の大きさを求める場面である。一方、包含除とは、12個のものを4個ずつ分けて何人に分けられるかを求めるといった、ある数量がもう一方の数量の幾つ分であるかを求める場面である。

第3学年の子供たちは、既存の学びのあらゆる場面で統合的に考える経験を経てきている。例えば、第1学年のたし算の学習においては、同時に存在する二つの数量を合わせた大きさを求める合併の場面と、はじめにある数量に累加したり増加したりしたときの大きさを求める増加の場面を、どちらも二つの集合を合わせた集合の要素の個数を求める演算であると統合的に考え理解してきている。しかし、わり算の学習においては、等分除と包含除が適用される場面の意味の違いを理解できなかったり、統合的な考え方を働かせることができず、単純に分ける計算をわり算として形式的に理解するに留まっていたりしているという課題が見られる。その原因として、等分除と包含除という二つの場面の操作や商の意味が異なることや、どこが同じか見えにくいことが、統合的に考え理解することを阻んでいると考えられる。この点に、わり算の指導の課題が挙げられる。

また、第4学年では、除数が1位数で被除数が2位数や3位数の場合の等分除や包含除を適用するわり算において、筆算の仕方を考え、わり算の計算が確実にできるようにすることをねらいとしている学習がある。ここでは、一般に、72個のものを3人に等分して1人分の個数を求めるといった等分除の場面を、半具体物を操作したり図や式で表したりし、それを筆算と対応させながら計算の意味や筆算の仕方を考える学習が行われる。その後、余りが出る場合の筆算の仕方を学習するという趣旨で包含除の場面が導入されることがあるが、ここでは、等分除で理解した筆算の形式だけを適用するに留まり、意味と対応させながら筆算の仕方を学習する場面は想定されていない。つまり、子供たちは、意味を伴わないまま筆算の形式だけを適用している状況にある。そのため、わり算の意味の理解が深められていないと考えられ、この点もわり算の指導の課題として挙げられる。

2. 本実践の視点と本稿の目的

本実践では、前述のわり算の指導の課題を踏まえ、子供がわり算の意味や計算の仕方を統合的に考え、理解することができるようにするために、第3学年と第4学年のわり算の指導において、学習指導計画や一単位時間ごとの問題場面の設定、数学的活動の工夫を行った。特に、等分除と包含除の場면을意図的に取り扱い、統合的に考える働き掛けを行ったところに、本実践の特徴がある。

そもそもわり算を統合的に考え、理解することにどんな意義があるのだろうか。それは、算数科の目標にある数学的な見方・考え方や数学的活動、数学的に考える資質・能力の中に見いだすことができる。小学校学習指導要領解説算数編では、数学的に考える資質・能力として、「基礎的・基本的な数量や図形の性質などを見いだし統合的・発展的に考察する力」が示されている。「統合的に考察する」ことは、異なる複数の事柄をある観点から捉え、それらに共通点を見いだして一つのものとして捉え直すことであるとされ、「発展的に考察する」と併せてその重要性が述べられている。特に、算数を統合的・発展的に考察していくことは、新たな知識及び技能を生み出したり、数理的な処理のよさを味わったり、算数を活用してよりよく解決しようとする態度の育成につながったりするとされる。そのような数学的に考える資質・能力を、数学的な見方・考え方を働かせ、数学的活動を通して育成するとされている。数学的な見方・考え方については、「事象を、数量や図形及びそれらの関係などに着目して捉え、根拠を基に筋道を立てて考え、統合的・発展的に考えること」とし、数学的活動については、「事象を数理的に捉えて、算数の問題を見だし、問題を自立的、協働的に解決する過程を遂行すること」として、問題発見・解決の過程に位置付けている。この過程については、図1に示されているように「日常の事象を数理的に捉え、数学的に表現・処理し、問題を解決したり、解決の過程や結果を振り返って考えたりする」とことと「算数の学習場面から問題を見だし解決したり、解決の過程や結果を振り返って統合的・発展的に考えたりする」とことの二つの過程が相互に関わり合っているとされ、数学的に問題を解決する資質・能力を育成するために、この学習過程の果たす役割が極めて重要であることが述べられている。これらのことから、算数科において統合的に考えることは、算数の学びを創る上で重要な視点であり、育成を目指す資質・能力に深く関わるものであるといえる。

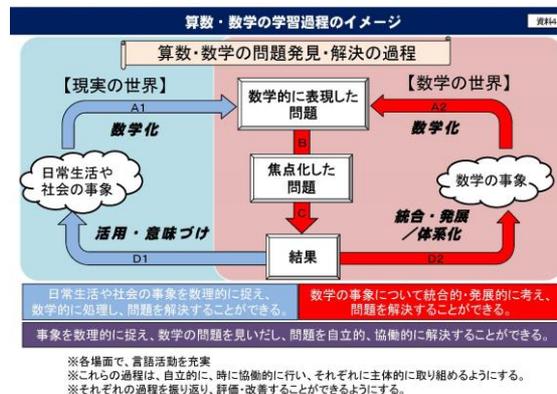


図1 算数・数学の問題発見・解決の過程

以上のことから、わり算の学習において、等分除と包含除の意味や計算の仕方を統合的に考え、理解することには意義があると考えた。

まず、第3学年では、わり算の意味について、等分除と包含除を統合的に考え理解する学習を位置付けた。例えば、12個のものを4人に等しく分ける等分除の操作は、図2のように表すことができる。同じく、12個のものを4個ずつ分ける包含除の操作は、図3のように表すことができる。

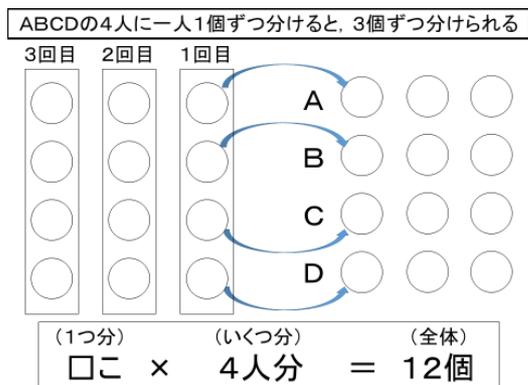


図2 等分除の操作

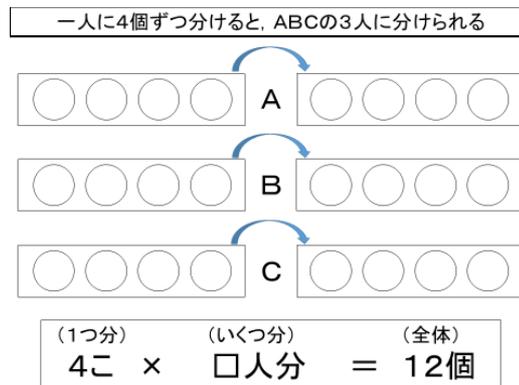


図3 包含除の操作

このとき、図2の等分除で1人に1個ずつ配ると4個必要になる。これを1回に4個とすると、2回目も4個、3回目も4個ずつ分けることになる。これは、包含除の4個ずつ分けることと同じと見ることができる。この操作の中に同じ数ずつ累減しているという共通点を見いだすことで、統合的に考え、同じわり算として理解することができる。また、基にする大きさの何倍かを求めるかけ算との関係で統合的に考えることもできる。図2のように、基にする大きさを求める場合は1つ分の大きさを求める等分除、図3のように何倍かを求める場合は幾つ分を求める包含除として、求めるものは異なるが、1つ分、幾つ分、全体の関係が成り立つ場面であることを見いだすことで、式の表現に対応させて統合的に考え、同じわり算として理解することができる。

実際には、等分除と包含除の意味の違いを理解することができるようにするために、具体物や半具体物を操作したり、絵や図に表したりするように促すとともに、どちらも同じ数ずつ累減しているという共通点を見いだすことができるようにするために、表した絵や図の中に操作の跡を残すように促した。また、等分除と包含除の意味の理解や違いを明確にするために、それぞれにその意味を捉えやすい名前を付けるようにした。また、統合的に考え、理解を深めることができるようにするために、かけ算との関係でわり算を考えさせる発問や板書を意図的に行った。

次に、第4学年では、除数が1位数で被除数が2位数や3位数の場合の等分除や包含除を適用するわり算について、筆算の意味や計算の仕方を統合的に考え理解する学習を位置付けた。ここで取り上げるのは、一般に長除法と呼ばれるわり算の筆算であるが、子供にとって、計算の意味と筆算の仕方を関連付けて理解することは容易ではない。それは、既習の加法や減法、乗法の筆算と表記の仕方が異なる点や、乗法と減法を適用して計算を進めていく点に困難性があると考えられる。この点に配慮しつつ、等分除が適用される場面の筆算だけでなく包含除が適用される場面の筆算の意味や計算の仕方を取り上げることで、統合的に考えながら筆算の意味を理解する学習を位置付けた。

例えば、72個のものを6人に等しく分ける等分除の計算は、図4のように考える。まず、72個を70個と2個に分け、 $70 \div 6 = 10$ 余り10とする。この10余り10は、1人に10個ずつ分けて、10個余りができることを意味する。この10個と最初に分けた2個を合わせた12個

を6人で割ると2個ずつになる。このことから $72 \div 6$ の商は、10と2を合わせた12個となる。これを、筆算の仕方と関係付け、計算の意味を伴わせながら理解させる。

図4 商が2位数の等分除の計算

図5 商が2位数の包含除の計算

一方、72個のものを6個ずつ等しく分ける包含除の計算は、72個から1人に6個ずつ分けるので、6個を12回累減するというひき算に表すことができる。このことから、 $72 \div 6$ の商は、12人分となる。これを筆算に表すと、図5のように被除数から取る除数の6が被除数の下に続くとともに、1回に引いた分が1人分となり、それが何人分になるかを求めるため、1が被除数の上に行くことになる。その1の合わせた数が、何人分を表す商となる。この1回に1人分累減しているということを、一度にまとめて複数人分累減すると捉え直すことで、筆算の表記が洗練され、等分除と同じ長除法の筆算の形式で計算することができるようになる。つまり、72個のうち10人分の60個を一気に分け、残り12個を6個ずつ2人で分けると捉えることで、10人分と2人分で商は12人分となるのである。

以上のように、本実践の特徴は、子供に本時の問題が等分除であるか包含除であるかを捉えさせた上で、それぞれの場面に合うように図や筆算などを関係付けながら計算の意味や計算の仕方を統合的に考え、理解することができるようにした点にある。

本稿の目的は、本実践において、等分除と包含除の統合という視座からわり算の指導を行うことで、子供のわり算の学習にどのような変容があるのかその実態を明らかにし、学習指導方法改善の視点を獲得することにある。

3. 実践

3.1. 実践1 (第3学年「わり算」)

第3学年では、除数が1位数のわり算について、数量の関係に着目し、計算の意味や仕方を考え、わり算の意味について理解し、除数と商が共に1位数であるわり算の計算が確実にできるようにするとともに、わり算のよさに気づき、生活や学習に活用しようとする資質・能力の育成を目標として、実践を行った。

具体的には、ある数量を等分したときにできる1つ分の大きさを求めたり、ある数量がもう一方の数量の幾つ分であるかを求めたりする活動を通して、わり算の意味を理解し、商が1位数であるわり算の計算が確実にできるようにすることを知識及び技能の観点の目標とした。また、その中で、数量のまとまりを基に考える単位の考えや、分け方の共通性、乗法との関係などを基に等分除と包含除の両方をわり算として捉える統合的な考え方を育むことを数学的な思考力、判断

力、表現力等の観点の目標とした。さらには、わり算のよさに気付き、生活や学習に活用しようとする態度を養うことを学びに向かう力、人間性等の観点の目標とした。そして、この目標に迫るために、表1のような学習指導計画を立案し、実践を行った。

表1 第3学年「わり算」の学習指導計画（総時数11時間）

主な学習活動		時間
1	「分ける」と「同じ数ずつ分ける」ことの意味の違いについて話し合う。	1
2	ある数量をいくつかに等分したときの1つ分の大きさを求める意味について話し合う。	1
3	等分除が用いられる場面について考え、式の表し方や答えの求め方について話し合う。	1
4	ある数量の中に1つの大きさがいくつあるかを求める意味について話し合う。	1
5	絵を見て、等分除や包含除の問題を作る。	1
6	同じわり算の式で内容異なる問題を基に、等分除と包含除の共通点や相違点について話し合う。	1
7	わり算で商が1や0になる場合や、1でわるわり算の意味について話し合う。	1
8	被除数が何十で、被除数の十の位の数で除数で割り切れる計算の仕方について話し合う。	1
9	簡単な場合の除数が1位数で商が2位数のわり算の計算の仕方について話し合う。	1
10	既習事項の理解を深め、練習問題をし、学習したことをまとめる。	1
11	既習事項を確かめ、練習問題を解き、学習を振り返る。	1

以下、等分除と包含除を統合的に考えることに関わる第1時から第6時の実践を述べる。

まず、第1時において、同じ数ずつ分けられる場面と分けられない場面を取り上げ、分け方を比べる活動を通して、等分の意味を理解することができるようにした。そして、第2時で等分除の場面を取り上げ、具体物を1つずつ順に繰り返し分ける操作や乗法との関連について考える活動を通して、等分除の意味や式の表し方、計算の仕方を理解することができるようにした（写真1）。具体的には、 $12 \div 4$ のような等分除の場面だと、分ける操作をせずに1人分が見えてしまう可能性があるため、実際に具体物を操作したり図にかいたりして確かめたいくなるように、28枚を4人に等分する場面を設定した。子供たちからは、「トランプ配りと同じように、一人に1枚ずつ配る分け方だね。」という声が聞かれ、それが実際の操作や図上で操作を表す矢印の表現に表れていた。このとき、「結局一人に何回配ったのかな。」と問うことで、1人分の枚数は一人に一枚ずつ配った回数と同じになることに気付かせ、後に包含除と一緒に同じわり算として統合的に考えるための見方で捉えられるようにした。このとき、一人に1枚ずつ配り終わったときを1回分として、それを分け終わるまで続けるという操作になることを式や計算の意味と関係付けて理解し、その後も想起することができるようにするために、「1つずつ分け算」という名前を付けて、意味の理解を深めた。



写真1 第3学年「わり算」第2時の板書



写真3 第3学年「わり算」第6時の板書

3.2. 実践2 (第4学年「1けたでわるわり算」)

第4学年では、除数が1位数で被除数が2位数や3位数の場合の等分除や包含除を適用する除法について、数量の関係に着目し、基本的な計算を基にして類推的に考えたり、計算の仕方を統合的に考えたりしながら、筆算の仕方を理解し、除法の計算が確実にできるようにするとともに、除法のよさに気づき、生活や学習に活用しようとする資質・能力の育成を目標として、実践を行った。

具体的には、(2, 3位数) ÷ (1位数) の除法の意味や計算の仕方を考える活動を通して、被乗数を位ごとに10や100のまとまりとばらで捉えたり、累減する数のまとまりで考えたりすればよいことに気づき、計算の意味と筆算の仕方を関係付けながら理解して、筆算を用いて計算することができるようにすることを知識及び技能の観点の目標とした。また、場面を具体物を操作したり、絵や図、式、筆算などに表したりする中で、数のまとまりや位に着目して考える単位の考えや、等分除と包含除の両方の筆算をわり算の筆算として捉える統合的な考え方を育むことを数学的な思考力、判断力、表現力等の観点の目標とした。さらには、除法のよさに気づき、生活や学習に活用しようとする態度を育むことを学びに向かう力、人間性等の観点の目標とした。そして、この目標に迫るために、表2のような学習指導計画を立案し、実践を行った。

表2 第4学年「1けたでわるわり算」の学習指導計画 (総時数13時間)

主な学習活動	時間
1 等分除と包含除の場面を式に表し、計算の意味や計算の仕方、答えの確かめ方について話し合う。	1
2 (何十・何百) ÷ (1位数) のわり算の計算の仕方を、(1位数) ÷ (1位数) の計算を基にして考える。	1
3 繰り下がりのない(2位数) ÷ (1位数) の計算の意味や計算の仕方を考える。	1
4 等分除の場面で、繰り下がりのある(2位数) ÷ (1位数) の計算の意味や仕方と筆算とを関連付けて考える。	1
5 包含除の場面について、等分除の場面と比較・関係付けながら計算の意味や筆算の仕方を考える。	1
6 余りのある除法や商に0が立つ除法の筆算の仕方を考える。	1
7 (3位数) ÷ (1位数) の計算の仕方を考えたり、商が3位数になる場合の計算を考えたりする。	1
8 (3位数) ÷ (1位数) で商が2位数になる場合の計算をする。	1
9 (3位数) ÷ (1位数) で商に空位がある場合の計算をする。	1
10 問題文や図から数量の関係をとらえ、図をかいて問題場面を式に表す。	1
11 乗法や除法の考えを活用して、問題を解決する。	1
12 既習事項の理解を深め、練習問題をし、学習したことをまとめる。	1
13 既習事項を確かめ、練習問題を解き、学習を振り返る。	1

以下、等分除と包含除の筆算を統合的に考えることに関わる第1時から第5時の実践を述べる。

まず、第1時では、第3学年の学びと関連付け、等分除と包含除の場面の違いを理解しながら立式し、計算の意味や仕方を考えようとするができるようにするために、かけ算九九で答えが求められるわり算を取り上げた。その際、第3学年で行ったときと同じように、等分除を「1つずつ分け算」、包含除を「まとまり取り算」と言うことにし、それ以降の時間で問題場面はどちらのわり算なのか明確にした上で学習を進めようとするができるようにした。

第2時では、60枚を3人で等分する等分除の場面を取り上げ、60を10のまとまりの6個分と見ることで $6 \div 3$ で求められることを取り上げた。第3時では、69枚を3人で等分する等分除の場面を取り上げた(写真4)。ここでは、10枚ずつ6束を3人に、1枚ずつ9枚のばらを3人に分ければ簡単に分けられるという考えが出され、 $69 \div 3$ を $60 \div 3$ と $9 \div 3$ に分けて、それぞれの商を合わせる考えが出された。その考えと操作を表した図、そして先行知識として筆算の形式を知っている子供の発言を関係付け、等分除における筆算の意味や計算の仕方の理解を深めた。その際、位で分けて考える前述の考えをどのように筆算に表せばよいかと問うと、被除数の上に $60 \div 3$ の商である20を書き、その上に $9 \div 3$ の商である3を書いて、その上に20と3を足した23を書くという考えが出された。ここでは、この書き方でも最初から合算した書き方でもどちらでもよいとし、意味の理解を大切にしよう促した。

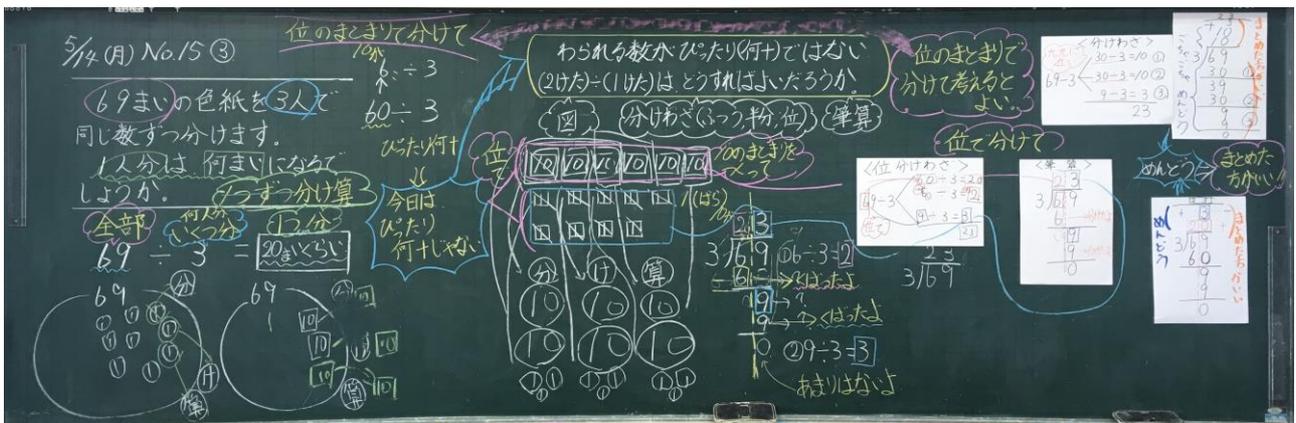


写真4 第4学年「1けたでわるわり算」第3時の板書

第4時では、72枚を3人で等分する等分除の場面を取り上げた(写真5)。ここでは、位ごとに分けると $70 \div 3$ と $2 \div 3$ となり、どちらも割れないことが問題となり、3で割れるように72を60と12に分けたり、36と36に分けたり、30と30と12に分けたりする案が出された。しかし、実際に具体物を分けたり、図にかいて分け方を考えたりして、場面を具体的に考える中で、72枚を1枚ずつ分けるよりも、10枚ずつ7束のものを3人で分けて、 $70 \div 3 = 20$ 余り10として、20枚ずつ分けたのち、余りの10枚を元々のばらの2枚と合わせて12枚とし、3人に分ける方が自然であるという発言があった。また、他の分け方は、枚数が異なればその都度分け方が異なることから、位ごとに分ける方がいつでもできそうであるといった一般性に関わる発言があり、それを基に筆算の意味を考えることとなった。ここでも、商を位ごとに書いて後で合算する場合と、最初から合算する場合が出されたが、意味の理解を優先し、どちらの書き方でもよいとした。



写真5 第4学年「1けたでわるわり算」第4時の板書

第5時では、教科書では筆算の意味を考えるとという場面としては取り扱っていない包含除の場面の計算の意味や筆算の仕方を考える場面を取り上げた(写真6)。具体的には、92個を一人に4個ずつ分ける場面である。子供たちからは、「やっときた」という発言が聞かれ、前時までの学習では、等分除について考えてきたことから、ずっと包含除の場面を考えたいという思いをもっていたようであった。本時では、等分除と包含除の場面や筆算の相違点と共通点を考えることができるようにするために、まず、等分除の場面を図や筆算に表した。その時点で、「同じわり算なんだから、筆算は『1つずつ分け算(等分除)』のときと同じでいいんじゃない。」という声も聞かれた。その後、包含除の場面を絵図に表すと、4個のまとまりを23回取ること、それを筆算に表すと被除数の下に4を何度も書いて引く累減の計算になり、商も1回分であり1人分を表す1を被除数の上に23個書くことになることから、等分除の場面とは意味も筆算も違うという声と、面倒だという声が聞かれた。そこで、「面倒なのはどうして。」と問うと、「一回に4個ずつしか分けられないから、何度も繰り返さないといけなくなる。」という声が上がったことから、「それじゃあ、一回を増やせばいいんじゃない。一回で5人が取ったとすれば一気に20個分けられる。」という考えが出された。その考えが基になり、「それじゃ、10人の方が分かりやすいから 4×10 で40個を1回で取ったら。」「だったら、 4×20 で80個まで取れて、簡単。」「結局、最初に $90 \div 4 = 20$ 余り12を出して、残り12個をまた4で割る『1つずつ分け算(等分除)』の筆算と同じになるんじゃない。」というように、包含除の筆算も等分除の筆算と同じように考えることができるという考えに至った。



写真6 第4学年「1けたでわるわり算」第5時の板書

4. 考察（成果と課題）

4.1. 成果

第3学年から等分除、包含除それぞれの場面に名前を付けて意味を統合的に考えて理解することができるようにしたこと、その後の第4学年において、等分除と包含除を意図的に取り上げ、子供にどちらの場面か捉えさせながら筆算の意味や計算の仕方を統合的に考えて理解することができるようにしたこと、子供は、意味にこだわり、わり算を理解しようと意欲的に学習に取り組む姿が見られた。また、その中で、計算の仕方を身に付けるとともに、統合的に考える姿も見られた。特に第4学年において、教科書では取り扱われていない包含除の場面の筆算の意味を考える学習を位置付けたことは、子供が除法の計算の仕方だけではなく、意味も伴わせながら考えようとする姿につながったことから、子供のわり算の理解を深める手立てとして有効であったと考える。また、本実践を通して、子供は思考の方法として図や筆算などの表現を何度も繰り返して用いて考えたり、新たな問題点に適用できるように修正したりしていた。このことから、そういった数学的活動が、除法の意味や計算の仕方の理解に大きく寄与することが明らかになった。

4.2. 課題

第3学年の等分除と包含除を同じ除法として統合的に考える学びにおいては、2つの除法の分ける操作に累減として「同じ」を見いだすことが難しい姿も見られた。これは、等分除を先に学んでいるため、累減の見方が弱かったことが原因であると考える。2つの除法の分ける操作に累減として「同じ」を見いだせるようにするために、包含除を先に学んで累減を強く意識できるようにする学習指導計画を検討する必要があると考える。第4学年の等分除や包含除の筆算を同じわり算の筆算として統合的に考える学びにおいては、たし算やひき算、かけ算の筆算の表記との関係が話題になった。子供は、既習の演算の筆算と同じ形式ではできないのかという視点から考えるという実態が明らかになったことから、意図的にそれを取り上げることで、わり算の筆算である長除法のよさを味わい、意味や計算の仕方の理解を深めていくことができる可能性がある。

また、本稿では述べていないが、第4学年の「2けたでわるわり算」で計算の意味や筆算の仕方を考える学びにおいても、等分除や包含除を意図的に学習指導計画に位置付け展開した。そこでは、概算して商の見当をつけて仮の商を立てることのよさを理解したり適切な仮の商を立てたりすること、図に表して考えることといった点で課題が見られた。これは、問題の数値が適切でないため、商を立てることが難しかったり、図に表すと煩雑になりすぎたりしたためであると考える。このことから、「2けたでわるわり算」の学びについても、本実践の成果を踏まえ、学習指導計画や問題場面を工夫し、わり算の意味と計算の仕方の理解を深めていく必要がある。

参考文献

- 文部科学省（2017）「小学校学習指導要領解説算数編」. 日本文教出版
- 筑波大学附属小学校算数研究部（2013）「算数授業研究 VOL.89 論究V」. 東洋館出版社
- 清野辰彦, 大野桂, 越後佳宏（2008）「小学校算数科における数学化を重視した学習指導に関する研究—わり算の筆算の創造に焦点をあてて—」 日本数学教育学会誌第90巻第4号. PP.22-32