図式的推論に基づく数学授業に関する基礎的考察
―記号論と身体化理論の視座から―

和田　信哉*・山本　貴之**

（2020 年 10 月 21 日　受理）

Fundamental Considerations on Lessons of Mathematics Based on Diagrammatic Reasoning: From the Perspectives of Semiotics and Embodiment

WADA Shinya, YAMAMOTO Takayuki

要約

本稿は，創造的な数学的活動を記述できるツールである図式的推論について，記号論と身体化理論の観点から考察し，より詳細で豊かな説明を与えることでその記述性を高めることと，記述的ツールとしての図式的推論に規範性をもたせるために，図式的推論に関する規範性に対する示唆を得ること，の 2 つを目的としている。そのためにネットワーク化ストラテジー（Prediger et al., 2008）を用い，図式的推論の事例を記号論から記述した後に，それを身体化理論から記述し，これらを協応することがより豊かな説明になることを議論した。また，それとともに，事例分析の際に Kinach（2018）のデザイン原理の観点から議論することでその有効性を検討した。

その結果，次の示唆を得ることができた。①図式的推論が進むためには，図式が類似記号から指標記号へ切り替わる必要があり，そこには身体性が大きく関わっている。②図式が類似記号のままで操作規則を見いだせない場合は，教師の身体的な介入が必要である。③Kinach の図式を基盤とした記号論的連鎖のデザイン原理は，図式的推論を連鎖的に意図する授業をデザインする上での重要な指針となりうる。

キーワード：図式的推論，数学授業，記号論，身体化理論

*　鹿児島大学 法文教育学域 教育学系　准教授
**　新潟市立万代高等学校　教諭

１．はじめに

いうまでもなく，数学的活動には数学を創り出す活動が含まれており，数学教育ではそのような活動の実現が求められている（cf. 古藤，1998；Freudenthal, 1973)。またわが国の数学的な考え方の育成を標榜する背景には，創造的な活動の実現がある（cf. 中島，1981)。実際，2017 年および 2018 年に告示された学習指導要領（文科省，2018a，2018b，2019）では，数学の世界と現実の世界のそれぞれを循環するような数学的活動を重視しつつ, 所謂アクティブ・ラーニングも強調されている。さらに，高等学校では引き続き「創造性の基礎」を養うことが謳われている。しかしこれらのことは，裏を返せば，算数・数学の授業における創造的な数学的活動の実現は，特に高等学校ではまだ不十分であるといっているのに等しいのではないだろうか。

また，数学的能力の構成要素の一つとして考えられている視覚化（visualization）は，1970 年代から重要なものとみなされて研究が続けられている（cf. Clements, 2014; Presmeg, 2006, 2014)。心理学においては，視覚化の傾向にある者（visualizer）と言語化の傾向にある者（verbalizer）という認知スタイルについての研究がなされてきていたが，近年では，視覚化の傾向にある者は空間的な視覚化傾向（対象の関係性を図示する傾向のある者）と対象的な視覚化傾向（対象そのものを図示する傾向のある者）とに識別されることが指摘されている（Kozhevnikov et al., 2005)。そして数学教育において，空間的な視覚化傾向は，数学的創造性（Pitta-Pantazi et al., 2013）や代数的能力（Chrysostomou et al., 2013）と相関があることが報告されている。

そのような視覚化の研究において，スケッチのような自由度の高い絵図ではなく，ある程度それを構成するための規則などがある図式（diagram）へ着目する研究もある（例えば, Kinach, 2018; Rivera, 2011 など)。図式は，先の視覚化傾向でいえば空間的なものであるから，図式を用いた活動は創造的な活動と親和性が高いことが示唆されよう。実際，数学教育における図式に関する研究では，高度な数学を事例としながら図式的推論が数学の創造に役立つことを示す研究（Dörfler, 2006; Hoffmann, 2005）や，実際の数学者の創造的活動や中学生の創造的学習の様子をそれで記述する研究（山本，2010；Bakker & Hoffmann, 2005; Kadunz, 2016; Menz & Sinclair, 2018）があり，創造的な数学的活動や授業を記述するのに適したツールであることが示されている。

他方で，図式を記号論の観点から検討する研究（例えば Sáenz-Ludlow, 2018 など）では，それは類似記号（icon）であるとみなされているのに対し，図式を身体化理論の観点から検討する研究（例えば Menz & Sinclair, 2018 など）では，指標記号（index）であるという指摘がなされている。同じ図式を研究対象としながら，一方は類似記号であると述べ，他方は指標記号とみなしており，一見すると矛盾が生じているように感じられる。理論のネットワーク化（Prediger et al., 2008）の観点からは，記号論と身体化理論が対比されて相違点が強調されている状態といってよいであろうから，その統合の度合いをもう一歩進め，これらの理論を協応させて図式の説明をより豊かにする必要があろう。

そこで，本稿は，創造的な数学的活動を記述できるツールである図式的推論について，記号論と

身体化理論の観点から考察し，より詳細で豊かな説明を与えることでその記述性を高めることを目的とする。また，記述的ツールとしての図式的推論に規範性をもたせるために，図式的推論に関する規範性に対する示唆を得ることも目的とする。そのための方法論として，ネットワーク化ストラテジー（Prediger et al., 2008）を用いる。具体的には，図式的推論の事例を記号論から記述した後に，それを身体化理論から記述し，これらを協応することがより豊かな説明になることを議論する。また，規範性に対する示唆に関しては，事例分析の際に，Kinach（2018）のデザイン原理の観点から議論することでその有効性を検討する。

本稿の構成は次のようになっている。はじめに，Peirce の図式と図式的推論について概観し，記号論の観点から数学教育における図式的推論について述べていく。次に，身体化理論の観点からみた図式の特徴などについて述べた後，高等学校の三角関数の合成の授業を記号論的な図式的推論が現れている事例として取り上げ，その後に身体化理論の観点から記述を行ってそれらの協応について議論するとともに，その規範性に対する示唆について検討する。

２．Peirce の記号論と図式的推論

Diagram とは，Oxford Learner's Dictionary によると「何かがどこにあるか，何かがどのように機能するか，などを説明する線を使用した簡単な描画」である。通常，「図式」と訳されることが多く，関係を表す図を意味している。数学教育における記号論的な図式の先行研究では，Peirce の捉え方を参照しているものが多い（例えば，山本，2010；和田，2014；Dörfler, 2005, 2006; Hoffmann, 2005 など）。そこで，Peirce の図式の捉え方をみる前に，彼の思想を概観しよう。

Peirce の思想は，記号や心理学的なものまでも現象とし，現象を「存在の様相」という観点から分類する現象学を基盤としている。そのカテゴリーは，一次性（Firstness ; そのものであるようなものの在り方，積極的な質的可能性，e.g. 性質など），二次性（Secondness ; 一次性を含む二項関係的なものの在り方，現存する事実，e.g. 作用と反作用など），三次性（Thirdness ; 二次性を含む三項関係的なものの在り方，未来の事実を支配するであろう法則，e.g. 習慣など）という 3 つである（CP 1.23; 2.84-86）[※]。

このような現象学に基づき，Peirce は次のように記号を捉えている。「記号あるいは表意体は，ある人にとって，ある観点もしくはある能力において何かの代わりをするものである。それは誰かに話しかける，すなわち，人の心の中に等価な記号あるいはより発展した記号を創り出す」(CP 2.228)。つまり，記号は「「われわれの注意が別のものに向けられると，それは直ちに記号となりうる」(Otte, 2006, p.19) というものである。また，先のカテゴリーに従うと，記号は 3 つの観点から捉えられる。つまり，表意体（記号そのもの；一次性），対象（記号と対象との関係；二次性），解釈項（記号と対象とを結びつける解釈作用；三次性）という 3 つの観点である。さらに，これらの観点それぞれにもカテゴリーを当てはめて，Peirce は 9 つの記号に分類しているが（CP 2.243-253），本稿では対象の観点からの分類について言及しておきたい。それは次の分類である。

- 類似記号（一次性）：記号と対象が類似性に基づいて結びつけられている
- 指標記号（二次性）：記号と対象が近接性に基づいて結びつけられている
- 象徴記号（三次性）：記号と対象が規約的に結びつけられている

このような考えに基づき，あるものが記号として認識されるとその解釈項が新たな記号となりその解釈項がまた新たな記号へ，というように，人間の認識を記号の連続として，すなわち記号過程（semiosis）として Peirce は捉えるのである。

以上のような思想の下，Peirce は関係を表す図に止まらず，代数記号を用いた表現までも図式と考えており（CP 2.279），次のように捉えている：「図式は，主に関係の類似記号であり，慣習によってそのようなものとして用いられる表意体である。指標記号も，多少は使用される。それは，完全に一貫した表象体系に基づいて実行されなければならず，単純にかつ容易に理解可能な基本的アイデアに基づいている」（CP 4.418）。この引用のように，「一貫した表象体系」が重要となるため，ある程度，構成規則などがあるものといえる。

また，Peirce によると，数学は論理学を必要としない学問であり（CP 2.81），必然的な推論と実在的抽象（hypostatic abstraction）とで特徴づけられる（CP 3.557）。この必然的な推論の過程では，図式が重要な役割を果たしている。「数学的推論は，一般的指針に従う図式を構成し，その指針によって明確に要求されないその図式の部分間の特定の関係を観察し，これらの関係がすべてのそのような図式に対して保たれるであろうということを示し，そして一般的用語でこの結論を定式化する，ということに本質がある。すべての妥当な必然的推論は，実際に，このような図式である」（CP 1.54）。このように図式を構成し，それからある関係を観察し，それを定式化することが数学的推論であると捉えると，単に図式を構成するだけでは何らかの関係を観察できない場合が生じる。そのようなときには，例えば幾何では補助線を引くこと，代数では可能な変換（式変形など）を行うことなどが必要であろう（CP 4.233）。このような知覚可能な図式を構成し，必要な場合にはそれに何らかの処理を加え，それから新しい関係を見いだしていく一連の流れが図式的推論と呼ばれているのである。

３．数学教育における図式的推論

近年，上述のような Peirce の図式を数学教育に援用している研究がある。Dörfler（2001, 2005, 2006）や Hoffmann（2005），和田（2014）などは図式や図式的推論が数学の創造を記述するのに有用であることを事例分析によって示している。また，山本（2010）や Bakker & Hoffmann（2005），Kadunz（2016）などは中学生の数学的活動を図式の観点から記述することで，実際の数学的活動を記述するツールとして有用であることを示している。これ以外にも，視覚化の研究における図式への着目（例えば，Kinach, 2018; Rivera, 2011 など）や身体化理論からみた図式に関する研究（例えば，de

Freitas & Sinclair, 2012; Menz & Sinclair, 2018 など）も行われている。それでは，まず数学教育における図式の記号論的研究では，それがどのように捉えられているかをみていこう。

Dörfler（2001）は，Peirce の図式の捉え方に基づき，それを紙などの媒体に記銘（inscription）されたものとした上で，先の図式の定義から，代数記号を用いた表現も図式とみなしている。このような数学教育における図式の特徴として Dörfler（2001）が挙げたものを，Rivera（2011）は次のようにまとめている（p.228）。

- 構造的，関係的である；図式における対象は，ある方法で配列されており，部分あるいは構成要素が関係づけられている。それらは関係を表しているので，図的というよりも関係的なものである。
- 内的意味をもつ；それらを操作，変換する方法に関する規則が存在する。
- 外的（参照的）意味をもつ；それらを数学内外で使用，解釈することを許す規則が存在する。
- 一般的である；それらは，同じ類の個々の例を包含する一種の視覚的一般性を伝達する。
- 知覚的，物質的である；関連する操作は，知覚的，物質的文脈において実行される。

1 点目は図式の関係的特徴を説明するものであり，「ある方法で配列」されているため，図式の構成規則が存在することを示している。また，2 点目の内的意味は，上述の Peirce のいう「一貫した表象体系」のことであり，図式の操作規則の存在を，3 点目の外的意味は，図式の運用規則の存在を示している。これら 3 つの規則を有しているがゆえに，絵図とは異なるものであることがわかろう。また，4 点目と 5 点目から視覚的な配列によって一般的関係を訴えるような表現であることがわかるため，類似記号とみなされる。

また Bakker & Hoffmann（2005）は，Peirce の捉え方に従いながら，図式的推論を次の 3 段階から成るものとして捉えている（pp.340-341）。

1. 図式の構成
2. 図式の実験
3. 実験結果の観察とそれらの省察

はじめに構成規則に従い図式を構成し，次に操作規則（可能な変換や行為，操作の制約を規定する）に従った操作や変換などを行う。そして，構成のときには気づかれていなかったあるいは隠れていた新しい関係を推論していく観察の段階がある。

また，Hoffmann（2005）は，この推論によって見いだされる関係性について，その表象体系内で解釈できる場合とそうでない場合（「受け入れられない経験」（山本，2010）という）があり，後者の場合，実験あるいは表象体系を疑わなければならず，新たな観点からそれらを見直したり，新た

な記号を生成したりする必要もあることも指摘している。特に，新しい関係性が見いだされた後に，Peirce のいう実在的抽象が起こることが指摘されている。実在的抽象とは，事物ではないものを事物として扱うようにする抽象化の過程である（Hoffmann，2005，p.49）。さらに Rivera（2011）は，図式の構成から新たな図式の構成までの一連の過程を漸進的な図式化（progressive diagrammatization）と呼んでいる。

このように，図式的推論は先の 3 段階で完結するものではなく，観察がうまくいかなかった場合には，1’ 図式の修正（あるいは他の図式の選択）や 2’ 実験の修正を適宜行うような再帰的な活動であるし（山本，2010），観察の段階が次の図式的推論のはじまりにもなる連鎖的な活動でもある。

以上のように，記号論的にみた数学教育における図式の研究では，Peirce の捉え方に従った記述的な研究が展開されている。これに対し，図式的推論の規範的ツールとしての検討を行っている研究も少ないながら存在する。われわれは，以前，図式的推論による中学校の授業の分析結果と図を使った先行研究の検討をふまえ，次のような図式的推論を生かした授業構成についての原理を指摘している（山本，2010）。

(1)　図式は，生徒によって自発的に構成されなければならない
(2)　実験は，ルールと目的が明確でなくてはならない
(3)　観察は，前の表現の目的に照らした再解釈を行わなくてはならない
(4)　新しい性質などを見いだす際は，「受け入れられない経験」が生じなくてはならない
(5)　「受け入れられない経験」が生じた際は，図式または実験を修正しなくてはならない

また Kinach（2018）は，Peirce の推論を計画する際の基本的な 3 つの方法（EP 2.212-213）を取り上げ，図式的推論を基盤とした記号論的連鎖のデザイン原理としている。

①　複数の命題を一つの複合命題へと結合すること
②　誤りがないように命題から何かを除去すること
③　誤りがないように命題に何かを導入すること

以上の図式的推論に関する規範的示唆は，図式が訴えてくる構成などの規則について，図式に埋め込まれた社会的・文化的な要因が影響していることは窺えるが，それを授業で制御していくことができるのか，もしできるのであればどのようにデザインしていけばよいのか，といったことはまだ明らかではない。しかし，上記の Kinach の原理は，図式的推論の規範性を検討する際の一つの指針となりうると考えるため，後の事例でこの観点から検討したい。

このような記号論的な図式の研究に対し，身体化理論から図式を検討している研究もあるので（cf. de Freitas & Sinclair, 2012; Menz & Sinclair, 2018），以下では身体化理論からみた図式的推論について

みていこう。

４．身体化理論からみた図式的推論

身体化理論は，人間の認識の根底には身体行為やそれによる経験があると考えるもので，身体的リソースによって数学的活動も誘発されると考える（cf. 影山ら，2016；Lakoff & Núñez; 2000）。そのようなリソースは，次のような場によってつくられる（影山，2015）: 制約や規則によって作られる経験場，制約を乗り越える可能場，規則そのものを作り出す理論場。

また，身体化理論は，図式とジェスチャーの関係に着目する（影山，2015；de Freitas & Sinclair, 2012; Menz & Sinclair, 2018）。ジェスチャーは記号論的にも検討されており，類似記号的，隠喩的，直示的などの分類が指摘されている（Sabena, 2008）。これに対し，Menz & Sinclair（2018）は，図式とジェスチャーの関係を論じる中で，もし図式が類似記号だとしたら，その対象はプラトニックな対象を単にコピーしたものになるのではないか，という疑問を呈している。

指標記号は文脈に縛られるものであるから，例えばワックスを塗る手のジェスチャーは円を指標するものとみなしうるのであり，したがって，円の図式はそれを描いた鉛筆の動きに言及する指標記号とみなすことができるのである（Menz & Sinclair, 2018, p.316）。つまり，図式はジェスチャーと描画を通して操作・実験がなされて現存するものとなるので，ジェスチャーの跡でも思考の過程でもある反面，心的事態の影でも思考の投影でもない（Menz & Sinclair, 2018, p.330）。図式は，革新的な数学が存在に至った方法のストーリーを伝えるものである一方で，ジェスチャーは，思考を視覚化したりコミュニケーションを支えたりするだけでなく，図式やその意味との運動的・触覚的な経験において中心的役割を果たすものである（Menz & Sinclair, 2018, p.331）。このように，図式とジェスチャーは身体を介して相互作用しているのである。

例えば，関数概念の発達過程を研究している久保・岡崎（2013）では，関数の表現（式・表・グラフ）のシンボル化やシグナル化にジェスチャーが寄与することを示している。また，小野田・岡崎（2014）は，ジェスチャーに着目して，事象との関連に関する関数の学習過程を検討する中で，一般化の促進（Sabena, 2008）や概念融合（Yoon et al., 2011）の他に,「グラフ上の点と事象の瞬間の場面を結びつける」などのジェスチャーの役割を同定している。このように，関数を例にすると，数学学習においてジェスチャーが重要であることがわかる。ジェスチャーによって対象が生成したり，図式化されたり，図式に対するジェスチャーによって思考や理解が進んだりするのである。

また，Menz & Sinclair（2018）は，3 人の数学者の共同活動を図式とジェスチャーの相互作用の観点から分析し，図式の生成・進化のライフサイクルを次のように同定している（p.328）。

1. 製造：図式の生成
2. コミュニケーション：図式と人の相互作用
3. 結末：図式が生き残るかどうかの判断

これは，記号論的観点からの図式的推論の段階に非常に類似している。もちろん，図式の捉え方に違いはあるが，同じことを異なる視点で述べているといってよいであろう。

ところで，先の Menz & Sinclair（2018）による図式が指標記号であるという指摘は，記号論的研究における類似記号であるという捉え方と矛盾している。ここで，これに関連する議論を行っている Cooke（2010）をみてみよう。

Cooke（2010）は，Peirce の数学の探究の理論と一般的な（科学的な）探究の理論とを対比させ，数学の探究を図式的推論であるとみなすのであれば仮説演繹的な科学的探究と一致するが，二次性の有無に大きな違いがあることを指摘している。つまり，科学的探究における実験対象は二次性である現実世界の事物であるが，数学的探究における図式は一次性である類似記号であるため，二次性が欠如しているのである。そのため，象徴記号である三次性に至るまでに二次性が欠如しているから，仮説である一次性からの連絡がうまくいかないという指摘である。「Peirce のカテゴリーの観点では，二次性としての現実性は三次性を知るための条件である」(Cooke, 2010, p.183)。そこで，Cooke（2010）はこの問題を解消するために，図式を類似記号（仮説）でもあるし指標記号（実験対象）でもあると考えるのである。

このように考えると，図式を類似記号とも指標記号ともみることは，Peirce の思想の批判的検討からも導かれるのである。われわれは，この一見矛盾しているようにみえる各々の観点で共通の現象を記述することにより，これらの理論を協応させることが望ましいことを議論していきたい。

５．事例

本節では，三角関数の合成を生徒が発見できるように学習過程を工夫した，筑波大学附属高等学校（2019）の実践を分析する。この実践は，記号論的な図式的推論に従った学習活動であり，その過程で身体行為が顕著に現れかつ重要な役割を担っているため，本稿の目的に照らし合わせれば事例として取り上げることは適切であると考えた。

(1) 授業の概要

授業では最初に，$y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ のグラフの形を予想する活動を行った。まず，グラフを描くために，教師が $y=\sqrt{3}\sin x$ と $y=\cos x$ のグラフを配付した。グラフを描く際は，$y=\sqrt{3}\sin x$ と $y=\cos x$ の近似値を用いるのではなく，15°ごとにプロットされたそれぞれのグラフから，関数の値をグラフの x 軸から y 軸方向の線分の長さと関連付ける活動を行った。例えば，$x=15°$の点をプロットする際は，$y=\sin x$ のグラフを $x=15°$のところで y 軸に平行に折り，折り目の x 軸から y 軸方向の線分の長さを $y=\sqrt{3}\sin x$ のグラフに継ぎ足すという方法である。グラフの線分の長さを継ぎ足す方法は教師が生徒の前で説明し，実際に $x=15°$の点をプロットして見せた。生徒は，この作業を 15°ずつ繰り返し，グラフを完成させた（図 1)。

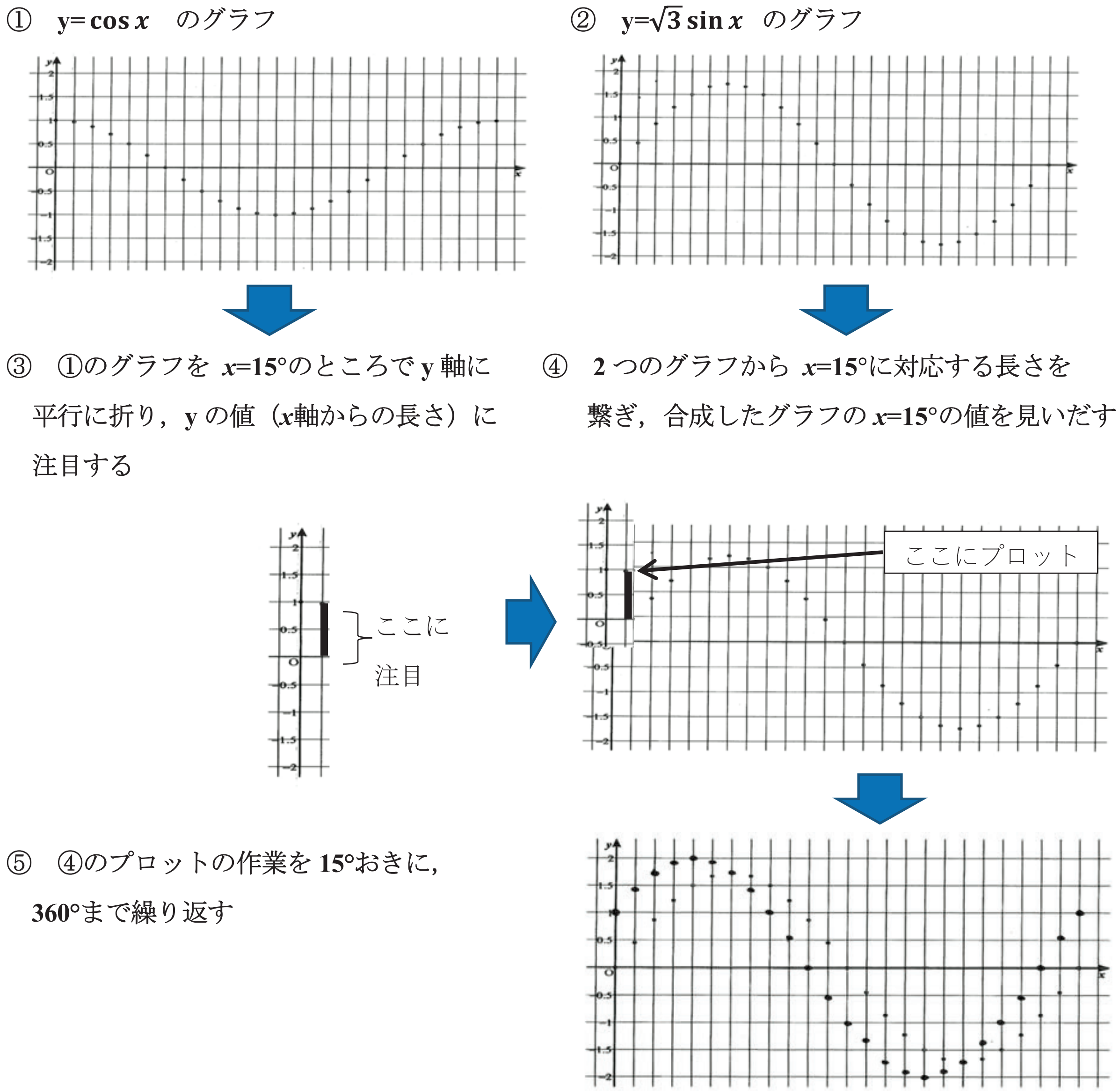

図１　グラフによる三角関数の合成

生徒は，作業で得られたグラフから $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ または y= $2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ となることを予想した。教師は「これらの式が正しいことを確かめるにはどうすればよいか」と問いかけ，それぞれの式の右辺を加法定理で分解すれば $\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ となることを導いた。

(2) 図式的推論に従った生徒の学習活動の記述

上述の授業を記号論的な図式的推論の枠組みで記述すると，次のようになる。

第 1 段階は，図式の構成である。構成する図式は，y= $\sqrt{3}\sin x+\cos x$ を分離した y= $\sqrt{3}\sin x$ と y= $\cos x$ のグラフである。生徒が自発的に y= $\sqrt{3}\sin x$ と y= $\cos x$ のグラフを描くことが望ましい場面であるが，この授業では 15°ごとにプロットされた座標の正確性がカギとなる。そのため，教師がそれぞれのグラフを描いた用紙を説明しながら配付した。生徒がそれに合意することで図式が構

成されたと考えるのが妥当であろう。

第 2 段階は，それぞれの式のグラフを複合的に考えた上で長さを足す図式の実験である。生徒にとってあまり経験のない方法なので，教師がグラフを折って長さを見つけ，プロットするところまでをジェスチャーで示した。グラフには「横軸が x の値，縦軸が y の値」「上や右が正，下や左が負」を表すという構成規則が内在している。生徒は，こうしたことを踏まえながら，2 つのグラフを合成していく。x の値が 15°から 75°までは，2 つのグラフの y の値は正なので， $y=\sqrt{3}\sin x$ のグラフの y 座標から $y=\cos x$ グラフの y 座標の値を上に継ぎ足せばよい。ところが，x＝90°のときは y＝0 で長さをもたない。また，x＝105°から暫くは y＜0 となり，グラフの線分の長さを下に継ぎ足さなくてはならない。これらの操作を続けていくうちに，生徒は $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ のグラフを 15°おきにプロットしたものを構成することになる。

この構成や実験に続く第 3 段階が観察である。実験結果から既習知識と結びつけて新しい関係を推論していく段階である。生徒は，プロットされたグラフが単調増加ではないこと，$x=\frac{\pi}{6}$ で極大になっていることや，直線 $x=\frac{\pi}{6}$ を対称の軸として線対称になっていることなどに気づく。さらに，振幅幅が一定であることやグラフの対称性などから，三角関数のグラフだと推測する。そこで，x 軸方向へのずれや周期を読み取り，グラフが $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ または $y=2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ となることを予想する。

ここで，$y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ を図式とみなした図式的推論の連鎖が起こり，複合的に $\sqrt{3}\sin x+\cos x$ ＝$2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ を見いだすのである。

６．議論

上記の事例を踏まえ，まず記号論的に分析した図式的推論の過程を身体化理論の観点から記述し，これらの理論を協応することが望ましいことを議論する。次に，図式的推論の規範性について検討し，それを促進するための示唆について Kinach（2018）の観点から議論していく。

(1)　身体化理論の観点から

図式的推論の構成の段階は，グラフが印刷された 2 枚の用紙が教師から生徒に配付された場面だった。しかし，配付しただけでは，生徒は実験の段階に進むことはできなかった。それは，生徒にとって図式の操作規則が明らかではないからである。

事例では，教師がグラフを折って重ねて長さと長さをつなぎ合わせるという身体行為を伴う働きかけを行った。それを見た生徒も実際に身体行為を伴いながら，長さと長さをつなぎ合わせたり，重ねたりするという図式の操作規則に気づきグラフを作成した。本来ならば，図式の構成規則も「上は正で下は負」や「周期性（リズム）」などの身体性が基盤となっているのだが，教師の身体行為の促しによってそれらが呼び起こされ，操作規則が明確になったといえよう。

上記のように図式からその操作規則を読み取れない場合は，図式が指標記号として働いていないことになる。むしろ操作規則が読み取れる場合は，類似記号から指標記号へ切り替わっているとい

えよう。そこに実は，身体性が大きく関わっていると考えることができる。事例では，類似記号から指標記号へ切り替わらなかったから身体行為を教師が行うことで，生徒は指標記号的な見方に変わり，新しい操作を加えることができたのである。

したがって，図式は記号論的には類似記号と言われているけれども，操作規則に従って操作を加えるということを考えると，指標記号的な見方ができなくてはならない。そして，身体はこのことに大きく関わるといえよう。つまり，操作規則というのは現実世界における操作，すなわち身体を基盤とした操作を促すようなものである。したがって，指標記号的な見方ができるということは，操作規則に従って操作をするということであり，身体の関わりが極めて重要である。

このように，図式を類似記号と指標記号の両視点で捉えることが重要であり，したがって，記号論と身体化理論を協応させて図式を捉えていくことが望ましいといえよう。

(2)　図式的推論の規範性

算数・数学の授業では，図式が類似記号のままで操作規則を見いだせない場合も想定される。このような場合，教師が実験の結果を説明してしまうような場合が散見される。まず，生徒が実験できる図式を工夫することが大切であるが, 図式が類似記号のままで操作規則を見いだせない場合は, 事例のように教師の方で操作規則を見いだせるような身体的な介入が必要になる場合もあろう。

また, 観察の場面では, 生徒はプロットによって得られたグラフを y=$2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ と予想した。そして，引き続き y=$2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ を図式とみなした図式的推論の連鎖が起こり，加法定理から，$2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ という関係を見いだした。Kinach の観点で，この連鎖を見ると，原理 1 を取り入れて続いているといえる。関数という命題に対しては，新しく見出された関係に対して，新しい命題をつけて複合命題にしたり，逆に何かを落として簡素な命題にしたりすることで，次の推論につながっていくのである。このことは，原理 2 や 3 も含め，図式的推論を連鎖的に意図する授業をデザインする上での重要な指針となりうる。

7．おわりに

本稿では，図式的推論の過程を記号論と身体化理論の観点から考察し，より詳細で豊かな説明を与えるとともに，その規範性に対する示唆を得ることを目的としていた。その結果，次の示唆を得ることができた。

- 図式的推論が進むためには，図式が類似記号から指標記号へ切り替わる必要があり，そこには身体性が大きく関わっている。
- 図式が類似記号のままで操作規則を見いだせない場合は，教師の身体的な介入が必要である。
- Kinach の図式を基盤とした記号論的連鎖のデザイン原理は，図式的推論を連鎖的に意図する授業をデザインする上での重要な指針となりうる。

今後の課題としては，図式的推論の規範性に関する示唆を踏まえ，高等学校数学における教材を開発し，それを実践的に検討するとともに，図式的推論にさらに詳細で豊かな説明を与えていくことである。

謝辞

本研究はJSPS科研費JP18K02584の助成を受けたものです。また，本稿は，全国数学教育学会第52回研究発表会資料を加筆・修正したものであり，コメントをくださった方々に感謝の意を表します。

註

※）慣例により，*Collected papers of Charles Sanders Peirce*（Peirce, 1931-35, 1958）からの引用・参考の場合には（CP 巻数. パラグラフ数），*The essential Peirce*（Peirce, 1992, 1998）からの引用・参考の場合には（EP 巻数. ページ数）と表記する。

引用及び参考文献

小野田愛・岡崎正和（2014）.「記号論的視座からの関数の学習過程に関する研究─ジェスチャーの意味と役割に焦点をあてて─」. 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 第20巻，第2号，pp.197-207.

影山和也（2015）.「為すこととしての数学的認知論の基礎的考察」. 日本数学教育学会『数学教育学論究 臨時増刊』, 第97巻，pp.65-72.

影山和也・和田信哉・岩田耕司・山田篤史・岡崎正和（2016）.「数学教育における図式との相互作用による数学的思考の分析─記号論と身体化理論のネットワーク化を通した図式の意味について─」. 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 第22巻，第2号，pp.163-174.

久保拓也・岡崎正和（2013）.「小中接続期における関数概念の発達の様相に関する研究」. 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 第19巻，第2号，pp.175-183.

古藤怜（1998）.「自ら学ぶ意欲を育てる算数科の指導─Do Mathematicsの視座から─」.『日本数学教育学会誌』, 第80巻，第12号，pp.2-12.

筑波大学附属高等学校（2019）.「教科書の例題でできる主体的・対話的で深い学び～三角関数の合成公式について～」.『中等教育資料』, 10月号，pp.46-49.

中島健三（1981）.『算数・数学教育と数学的な考え方』. 金子書房.

文部科学省（2018a）.『小学校学習指導要領解説　算数編』. 日本文教出版.

文部科学省（2018b）.『中学校学習指導要領解説　数学編』. 日本文教出版.

文部科学省（2019）.『高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編』. 学校図書.

山本貴之（2010）.「図式的推論を生かした数学の授業に関する研究」. 新潟大学教育学部数学教室

『数学教育研究』，第 45 巻，第 1 号，pp.48-68.

和田信哉（2014）.「図的表現と操作的表現の規約性に関する研究─代数的推論の観点から─」.『鹿児島大学教育学部研究紀要　教育科学編』，第 65 巻，pp.31-48.

Bakker, A. & Hoffmann, M. H. G. (2005). Diagrammatic reasoning as the basis for developing concepts: a semiotic analysis of students' learning about statistical distribution, *Educational Studies in Mathematics, vol.60*, no.3, pp.333-358.

Chrysostomou, M., Pitta-Pantazi, D., Tsingi, C., Cleanthous, E. & Christou, C. (2013). Examining number sense and algebraic reasoning through cognitive styles, *Educational Studies in Mathematics, vol.83*, no.2, pp.205-223.

Clements, M. A. (2014). Fifty years of thinking about visualization and visualizing in mathematics education: a historical overview. In Fried, M. N. & Dreyfus, T. (Eds.), *Mathematics & mathematics education: Searching for common ground* (pp.177-192). Springer.

Cooke, E. F. (2010). Peirce's general theory of inquiry and the problem of mathematics. In Moore, E. M. (Ed.), *New essays on Peirce's mathematical philosophy* (pp.169-202). Open Court.

de Freitas, E. & Sinclair, N. (2012). Diagram, gesture, agency: theorizing embodiment in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, vol.80*, no.1-2, pp.133-152.

Dörfler, W. (2001). Instances of diagrammatic reasoning. Paper presented to the discussion group on semiotic and mathematics education at the 25th PME conference, University of Utrecht, Netherlands.

Dörfler, W. (2005). Diagrammatic thinking: affordances and constraints. In Hoffmann, M. H. G. et al. (Eds.), *Activity and sign: grounding mathematics education* (pp.57-66). Springer.

Dörfler, W. (2006). Inscriptions as objects mathematical activities. In Maasz, J. and Schloeglmann, W. (Eds.), *New mathematics education research and practice* (pp.97-111). Sense Publishers.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. D. Reidel.

Hoffmann, M. H. G. (2005). Sign as means for discoveries: Peirce and his concepts of "diagrammatic reasoning," "theorematic deduction," "hypostatic abstraction," and "theoric transformation". In Hoffmann, M. H. G. et al. (Eds.), *Activity and sign: grounding mathematics education* (pp.45-56). Springer.

Kadunz, G. (2016). Diagrams as means for learning. In Sáenz-Ludlow, A. & Kadunz, G. (Eds.), *Semiotics as a tool for learning mathematics: how to describe the construction, visualisation, and communication of mathematical concepts* (pp.111-126). Sense Publishers.

Kinach, B. M. (2018). Progressive visualization tasks and semiotic chaining for mathematics teacher preparation: towards a conceptual framework. In Presmeg, N. et al., (Eds.), *Signs of signification: semiotics in mathematics education research* (pp.235-255). Springer.

Kozhevnikov, M., Kosslyn, S. & Shephard, J. (2005). Spatial versus object visualizers: a new characterization of visual cognitive style. *Memory & Cognition, vol.33*, no.4, pp.710-726.

Lakoff, G. & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: how the embodied mind brings mathematics into being*. Basic Books.

Menz, P. & Sinclair, N. (2018). Diagramming and gesturing during mathematizing: kinesthetic and haptic interactions support mathematical ideation. In Presmeg, N. et al., (Eds.), *Signs of signification: semiotics in mathematics education research* (pp.315-334). Springer.

Otte, M. (2006). Mathematical epistemology from a Peircean semiotic point of view. *Educational Studies in Mathematics, vol.61,* no.1-2, pp.11-38.

Oxford Learner's Dictionary. https://www.oxfordlearnersdictionaries.com/

Peirce, C. S. (1931-35, 1958). *Collected papers of Charles Sanders Peirce*. Harvard University Press.

Peirce, C. S. (1992, 1998). *The essential Peirce*. Indeana University Press.

Pitta-Pantazi, D., Sophocleous P. & Chritou C. (2013). Spatial visualizers, object visualizers and verbalizers: their mathematical creative abilities. *ZDM, vol.45*, no.2, pp.199-213

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A. & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: first steps towards a conceptual framework. *ZDM, vol.40*, no.2, pp.165-178.

Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics: emergence from psychology. In Gutierrez, A. & Boero, P. (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp.205–235). Sense Publishers.

Presmeg, N. C. (2014). Visualization and learning in mathematics education. In Lerman, S. (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp.636-640). Springer.

Rivera, F. D. (2011). *Toward a visually-oriented school mathematics curriculum*. Springer.

Sabena, C. (2008). On the semiotics of gestures. In Radford, L. et al. (Eds.), *Semiotics in mathematics education: epistemology, history, classroom, and culture* (pp.19-38). Sense Publishers.

Sáenz-Ludlow, A. (2018). Iconicity and diagrammatic reasoning in meaning-making. In Presmeg, N. et al., (Eds.), *Signs of signification: semiotics in mathematics education research* (pp.193-215). Springer.

Yoon, C., Thomas, M. O. J. & Dreyfus, T. (2011). Grounded blends and mathematical gesture spaces: developing mathematical understandings via gestures. *Educational Studies in Mathematics, vol.78*, no.3, pp.371-393