演繹法による期間の異なるパー・ボンドの考察

王　　鏡　凱[1]・楊　　　　楽[2]

1．はじめに

本研究は，演繹法（Deduction）に基づいてパー・ボンドの現在価値を導出し，期間の異なるパー・ボンドの関係について考察する．パー・ボンド（Par Bond）とは額面価格債券ともいう，その名前の通り，債券のクーポン・レートが割引率と等しいとき，債券の理論価格と額面価値が一致する特別な利付債のことである．債券のクーポン・レートが割引率と等しいことは極めて偶然であるため，パー・ボンドは必ずしも実在する債券とは限らない．しかし，それにもかかわらず，パー・ボンドは債券価格の割高と割安を判断する重要な基準であるだけでなく，債券の基本構造であるクーポン（C）と額面価値（F）と償還期間（n）を所与として債券価格と割引率の関係を理論分析するうえでも極めて重要な参照基準である．

債券の理論価格を求めるためには，債券のキャッシュフローを数列として記述して，そのキャッシュフロー数列を割引現在価値として求める方法がある．実際にパソコンソフトの関数機能や専門のプログラムなどを使えば直ちに債券の理論価格を求めることができる．パソコンソフトや専門のプログラムなどを利用する方法は，債券の価格を正確に求めることだけでなく，債券のイミュニゼーション，デュレーションやコンベキシティなどの洗練された金融工学の技術も生かすことができる[3]．しかし，パソコンソフトや専門のプログラムなどはあくまでも指示されたアルゴリズムを実行するだけなので，意思決定の最終責任者ではない．

債券価格の変動を知るためには，パソコンソフトや専門のプログラムなどを利用する方法に加え，パー・ボンドを利用する方法もある．パー・ボンドを利用する方法はパソコンソフトや専門のプログラムなどの方法と比べて，正確性は劣るが利便性は優れものである．債券のイミュニゼーション，デュレーションやコンベキシティなどの洗練された金融工学の技術を活用するにはパソコンソフトや専門のプログラムなどを利用しないといけない．

一方，実務の世界では債券価格の変動について常に正確に知ることよりも，債券価格の変動の方

---

[1] 鹿児島大学准教授，本論文に関するすべてのお問い合せは責任著者である王鏡凱にご連絡ください．
E-mail: kyogaiw@leh.kagoshima-u.ac.jp

[2] China Construction Bank, Special Assets Resolution Center, Shandong Branch.
E-mail: yangle/sd/ccb@ccb.com

[3] 債券のイミュニゼーション，デュレーションやコンベキシティなどの洗練された金融工学の技術は，今日の年金基金，生保などの金融機関が最も広く使われている投資技術である．普通に市販されている債券や金融工学に関するテキストには必ず載せる内容である．興味のある方は，例えば，デービッド・G. ルーエンバーガー（2002）と榊原・青山・浅野（2005）を参照されたい．

向とその程度の大きさを把握することだけならば事足りる場合がほとんどである．その時はわざわざ時間とコストをかけてパソコンソフトや専門のプログラムなどを利用するよりも，パー・ボンドを利用する方法は適切であり，現実的である．

パー・ボンドの特徴，その理論価格が常にその額面価値であることを利用して，債券価格の変化を簡単に見積もることができる．債券の理論価格を直接に求めるのではなく，その債券と同じ発行条件であるパー・ボンドを基準として比較することで，間接的にその債券価格の変化度合を見積もることができる．なぜなら，債券の取引価格とパー・ボンドの額面価値のおおよその乖離について，クーポン・レートと利回り（割引率）を比較することでおおよその見積もりができるからである．利付債の理論価格の判断基準としての役割を果たしているパー・ボンドが実務世界では極めて重要であるだけでなく，債券の理論世界においても利付債の仕組みを理解する上では必要不可欠である．その仕組みのなか特に重要なのは期間の異なるパー・ボンドの関係性である．本研究ではパー・ボンドの現在価値の導出と期間の異なるパー・ボンドの関係性について考察する．

本研究の主な結果は以下の通りである．演繹法に基づく導出方法は導出のプロセスである数列情報を使わないと，期間の異なるパー・ボンドの関係性を明示的に考察するのは困難であることが明らかになった．導出のプロセスである数列情報を使うことで，パー・ボンドの期間が延びるまたは縮むことによって，クーポンの償還効果である現在価値の変動分（増加分または減少分）と，額面価値の償還効果である現在価値の変動分（減少分または増加分）が互いにちょうど相殺するようになっていることが明らかになった．

本稿の構成は以下である．第 2 節と第 3 節ではそれぞれ利付債とパー・ボンドについて説明する．そして，第 4 節では期間の異なるパー・ボンドの関係について演繹法に基づいて考察する．最後に全体をまとめる．

2. 確定利付証券（Fixed Income Securities）について

古くから金銭の貸借契約を最もよく表すものは債券（Bond）である．債券とは，定期的に一定の利子（クーポン : Coupon, 以下 C と略記）が支払われ，満期（n）時にあらかじめ定められた額面価値（Face Value, Par Value, 以下 F と略記）が償還される証券のことである[4]．

債券の定義から分かる通り，債券は発行時点で決められたルールに従って，保有者に金銭を支払う発行者の債務のことである．債券発行時点でルールによって決められた内容は，債券のクーポン（C）と額面価値（F）と償還期間（n）についての約束ことであり，債券の基本構造でもある．債券が発行されるとき，既に基本構造（C, F, n）について確定されていることから，確定利付証券（Fixed Income Securities）または単に利付債またはクーポン債とも呼ばれる．

[4] 本文の債券の定義については，榊原・青山・浅野（2005），「証券投資論」［第 3 版］，第 5 章，p.220を基に筆者が加筆修正したものである．また，額面価値は額面金額ともいう．

クーポン（C）とは定期的に支払われる利子のことをいう．一般に債券の世界では，クーポン（C）を直接に表示する代わりにクーポン・レート（C/F）で表示するのが普通である．クーポン・レート（C/F）は，クーポン（C）を額面価値（F）のパーセンテージ（%）として記述されるものである．一般にクーポンは年1回支払われるとは限らない．しかし，説明を簡潔化するために特別な事情がない限り，本研究ではクーポンについて一般的なテキストと同じ仮定を課す．すなわち，本研究ではクーポンが毎期の期末日に1回だけ支払われるものとする．この仮定をおくことによって，後に分析する確定利付証券の理論価格式が債券の本質を損なうことがなく簡潔になる．

償還期限のある債券の中には，満期の途中でのクーポン（C）の支払いが一切なく，満期日に額面価値（F）だけを支払うものは割引債という．クーポン（C）の支払いがないことから，割引債のことはゼロ・クーポン債ともいう．割引率 r と満期 n の割引債の理論価格は以下のように記述することができる．

$$V_n = \frac{0}{1+r} + \frac{0}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{F}{(1+r)^n} = \frac{F}{(1+r)^n}$$

逆に償還期限のない永久債は，満期時の額面価値（F）が永久に償還されずに定期的にクーポン（C）が永久的に支払い続けられる債券である．割引率 r の永久債の理論価格は以下のように記述することができる．

$$V_\infty = \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \cdots = \frac{C}{r}$$

しかし，一般にほとんどの債券は，クーポン（C）と額面価値（F）と償還期間（n）が約束される確定利付証券である．クーポン（C）が毎期の期末日に1回だけ支払われ，割引率 r と満期 n の利付債の理論価格は以下のように記述することができる．

$$V_n = \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{C+F}{(1+r)^n} = \frac{C}{r}\left\{1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right\} + \frac{F}{(1+r)^n}$$

ここでいう割引率 r とは，債券の最終利回りまたは満期利回り（Yield To Maturity: YTM）であり，債券投資のキャッシュフローによって決まる金利のことである．具体的にいうと，債券投資によってもたされるキャッシュフローから求められる債券の現在価値が現在取引している債券価格と等しくなる金利のことである．この定義から，YTM は一般のスポット・レートとは違い，債券投資のキャッシュフローによって求められる内部収益率（Internal Rate of Return: IRR）であることが明らかである．本研究では，特に言及がない限り，金利の期間構造については所与とし，YTM は単に

利回りまたは割引率と表す．債券の利回りについては年率で表示するのが普通である．

3. パー・ボンド（Par Bond）について

ここでは演繹法に基づいてパー・ボンド（Par Bond）の理論価格を導く．クーポン（C）が毎期の期末日に1回だけ支払われ，割引率 r を所与として基本構造（C, F, n）を持つ標準的な利付債について，その理論価格は以下のように記述することができる．

$$V_n = \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{C+F}{(1+r)^n} = \frac{C}{r}\left\{1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right\} + \frac{F}{(1+r)^n}$$

パー・ボンドの条件である $r=C/F$ を代入すると，理論価格は以下の通りである．

$$V_n = \frac{rF}{1+r} + \frac{rF}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{rF+F}{(1+r)^n} = \frac{rF}{r}\left\{1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right\} + \frac{F}{(1+r)^n} = F$$

証明は以上である．演繹法による証明はストレートでそして分かりやすい．しかし，証明の結論（$V_n=F$）だけでは，パー・ボンドの特徴を捉えることが難しい．例えば，期間の異なるパー・ボンド V_n と V_i の関係について考察するためには，演繹法の結論，（$V_n=V_i=F$）だけでは必ずしも明らかではない．期間の異なるパー・ボンド V_n と V_i の関係を考察するためには，どうしても証明のプロセスである数列情報を利用しなければならない．次節では証明のプロセスである数列情報を利用して期間の異なるパー・ボンド V_n と V_i の関係を明らかにする．

4. 期間の異なるパー・ボンドの関係性について

ここでは演繹法に基づいて異なる期間のパー・ボンド V_n と V_i の関係性を明らかにする．パー・ボンド V_n の証明プロセスである数列情報を任意のパー・ボンド V_i について適用すると以下の通りになる．

$$V_i = \frac{rF}{1+r} + \frac{rF}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{rF+F}{(1+r)^i} = \frac{C}{r}\left\{1 - \frac{1}{(1+r)^i}\right\} + \frac{F}{(1+r)^i} = F$$

ここで異なる期間のパー・ボンド V_n と V_i の差分をとると以下の通りになる．

$$V_n - V_i = \frac{C}{r}\left\{\frac{1}{(1+r)^i} - \frac{1}{(1+r)^n}\right\} + F\left\{\frac{1}{(1+r)^n} - \frac{1}{(1+r)^i}\right\} = 0$$

この証明プロセスの可視化こそが期間の異なるパー・ボンド V_n と V_i の関係性を表している[5]．V_n と V_i の差分式から期間の異なるパー・ボンド V_n と V_i の関係について以下の結論が得られる．パー・ボンドの期間が（$n-i$）期間分延びることによって，延びる（$n-i$）期間分のクーポン（C）の償還による現在価値の増加分 $\frac{C}{r}\left\{\frac{1}{(1+r)^i} - \frac{1}{(1+r)^n}\right\}$ と，延びる（$n-i$）期間分の額面価値（F）の償還による現在価値の減少分 $F\left\{\frac{1}{(1+r)^n} - \frac{1}{(1+r)^i}\right\}$ が同じ効果である．従って，パー・ボンドの期間が延びるまたは縮むことによって，クーポン（C）と額面価値（F）のそれぞれの償還効果は互いにちょうど相殺するようになっていることが分かる．

5. まとめ

本研究は，演繹法に基づいてパー・ボンドの現在価値を導出し，期間の異なるパー・ボンドの関係について考察した．期間の異なるパー・ボンドの関係について数式による分析の可視化は，債券の取引価格の変動情報について理解するために必要不可欠である．

本研究の主な結論は以下の通りである．演繹法に基づく利付債の導出方法は導出のプロセスである数列情報を使わないと，期間の異なるパー・ボンドの関係性を明示的に考察するのは困難であることが明らかになった．また導出のプロセスである数列情報を使うことで，パー・ボンドの期間が延びるまたは縮むことによって，クーポン（C）の償還効果である現在価値の変動分（増加分または減少分）と，額面価値（F）の償還効果である現在価値の変動分（減少分または増加分）が互いにちょうど相殺するようになっていることが明らかになった．

参考文献

デービッド・G. ルーエンバーガー（著），今野浩（訳），枇々木規雄（訳），鈴木賢一（訳）(2002)，『金融工学入門』，日本経済新聞社．

榊原茂樹，青山護，浅野幸弘（2005)，『証券投資論』，日本証券アナリスト協会（編)，日本経済新聞社．

王鏡凱（2021)，「数学的帰納法による期間の異なるパー・ボンドの考察」鹿児島大学法文学部『経済学論集』97, 研究ノート．

[5] この証明プロセスの可視化こそが，数学的帰納法の最大の特徴であり，異なる期間のパー・ボンド V_n と V_i の関係性を表している．王（2021）では，数学的帰納法に基づいて期間の異なるパー・ボンド V_n と V_i の関係性について考察している．