【研究ノート】

Dixit and Nalebuff（1991）の三者決闘ゲームに関する新たな拡張：もしプレイヤーCが百発百中でなかったら結果はどうなる？

王　　鏡　凱[1]

1．はじめに

本研究は Dixit and Nalebuff（1991）の三者決闘ゲームを拡張して考察するものである．Dixit and Nalebuff（1991）では，三者決闘ゲームのプレイヤー３人（A・B・C）の命中率を（0.3, 0.8, １）に固定したまま，先読み推論法を用いて各プレイヤーの最適戦略を考察した．本研究では，Dixit and Nalebuff（1991）の三者決闘ゲームのプレイヤー３人のうち，最初のプレイヤー２人（A・B）の命中率を Dixit and Nalebuff（1991）と同様，(0.3, 0.8）に固定したまま，最後のプレイヤー C の命中率だけを（$0.8 < p \leq 1$）として一般化して考察する．

本研究の主な目的は，条件付きではあるが Dixit and Nalebuff（1991）の三者決闘ゲームをより一般化した三者決闘ゲームに拡張した場合，元の三者決闘ゲームの最適戦略はまだ最適であり続けるのかを考察することである．プレイヤー C の命中率だけを（$0.8 < p \leq 1$）と一般化することによって，プレイヤー（A・B）の最適戦略にどういう影響を与えるのかについて考察する．Dixit and Nalebuff（1991）の三者決闘ゲームと区別するため，本研究で考察するゲームを三者決闘拡張ゲームと呼ぶことにする．

三者決闘ゲームについては，Dixit and Nalebuff(1991）では先読み推論法を用いて考察されており，王・江（2017 a）ではバックワード・インダクションの手法を用いて考察している．さらに，王・江（2017 b）ではバックワード・インダクションの手法を用いて条件付き一般化した三者決闘ゲームについて考察している．王・江（2017 b）の条件付き一般化とは，三者決闘ゲームを数値例として考察するではなく，より一般的な比較分析ができるようにすることである．ただし，プレイヤー３人のうち，最後のプレイヤー C の命中率だけは Dixit and Nalebuff(1991）の仮定と同じ値（確率１）に固定することは唯一の制約条件である．したがって，王・江（2017 b）の条件付き一般化とは，Dixit and Nalebuff（1991）の三者決闘ゲームの３人のプレイヤーのうち，最後のプレイヤー C の命中率だけを確率１に固定するという制約条件の下でその他の２人のプレイヤー（A・B）の命中率（p, q）を，（$0 < p < q < 1$）として考察したものである．

これまでの先行研究では，Dixit and Nalebuff（1991）の三者決闘ゲームのプレイヤー３人のうち，

[1] 鹿児島大学准教授，本論文に関するすべてのお問い合せは責任著者である王鏡凱にご連絡ください．
E-mail: kyogaiw@leh.kagoshima-u.ac.jp

最初のプレイヤー２人（A・B）の命中率を一般化して考察したものである．本研究は，これまでの先行研究とは逆パターンについて考察するものである．つまり，Dixit and Nalebuff（1991）の三者決闘ゲームのプレイヤー３人のうち，最後のプレイヤーＣの命中率を一般化して考察する．本研究は Dixit and Nalebuff（1991）の三者決闘ゲームのプレイヤー３人のうち，最初のプレイヤー２人（A・B）の命中率を元のゲームの条件である（0.3, 0.8）に固定したまま，最後のプレイヤーＣの命中率だけを（$0.8 < p \leq 1$）と一般化して考察する．

研究方法については、本研究も Dixit and Nalebuff（1991）に従い，バックワード・インダクションではなく，先読み推論法を用いて考察する．本研究の構成は以下の通りである．まず第２節では Dixit and Nalebuff（1991）の三者決闘ゲームとプレイヤーの目的関数について説明する．そして，第３節では新たな条件付き一般化した Dixit and Nalebuff（1991）の三者決闘拡張ゲームについて説明する．第４節では先読みの方法を用いてそれを考察する，最後に全体をまとめる．付録では参考のために Dixit and Nalebuff（1991,pp.292–293）による先読み手法の解き方を引用した．

2. Dixit and Nalebuff（1991）の三者決闘ゲームとプレイヤーの目的関数について

ここでは Dixit and Nalebuff（1991, pp.292–293）に基づき，必要に応じて筆者が加筆修正した三者決闘ゲームについて説明する．プレイヤーは３人，ラリー・モー・カリー（ここではＡ・Ｂ・Ｃと呼ぶ）が２ラウンド制の逐次ゲームとして，Ａ→Ｂ→Ｃの順に１発ずつ打つことになっている．

各プレイヤーの戦略は２つしかなく，相手を狙って打つかまたは空砲を打つかである．相手を打つと決めた場合，３人の命中率はそれぞれ｛A : B : C = 30% : 80% : 100%｝となっている．

ここではプレイヤーの選好について述べる．各プレイヤーにとっての最善の結果は，自分だけが生き残ることである．次によいのは２人が生き残り，そのうちの１人になることである．3番目によいのは３人全員が生き残ることである．最悪なのは自分だけが殺されることである．

以上のルールの下でプレイヤーＡの生存確率を最大にする最適戦略とは何かについて求める問題である．付録では Dixit and Nalebuff(1991) の解き方を引用しており、必要に応じて参照されたい．ここからは本研究の三者決闘拡張ゲームを考察するため，プレイヤー３人の選好に基づいてその目的関数について説明する．

各プレイヤーの目的関数は，①自分の生存確率の最大化と②自分への潜在的な脅威の最小化を，両立することである．目的の②自分への潜在的な脅威の最小化について具体的に説明する．潜在的な脅威というのは，競争相手の多さとその命中率の高さの両方を意味する．競争相手の多さの脅威については，仮に競争相手の出番になったときに自分へ狙うはずがないにもかかわらず，相手が生きているという事実だけでも脅威となりうることを意味する．競争相手の命中率の高さの脅威については，仮に競争相手の出番になったときに自分へ狙うはずがないにもかかわらず，相手の命中率が０でないという事実だけでも脅威となりうることを意味する．従って，潜在的な脅威の最小化とは，単に競争相手の数を減らすことだけでなく，相対的に命中率の高い競争相手を優先的に減らす

ことも必要である．特定の相手を優先的に打つことは，プレイヤーの選好を反映したものである．

プレイヤーの目的関数を理解するために第2ラウンドの最終のプレイヤーCについて考えるとよい．仮にいまは3人のプレイヤーが生きている状態で第2ラウンドの最終手番のプレイヤーCの出番になったとしよう．最終のプレイヤーCにとっては，空砲（C→◎）を打つことも，また（C→B）にしても（C→A）にしても，Cの生存確率はすべて同じ最大の1であることに変わりがないので，目的関数①は満たされる．しかし，目的関数②は満たされないかもしれない．オフ・パスの考え方に基づけば，もしも次回も同じ状況になったら，今のCはどうふるまうべきかを合理的に推論できる．合理的なCは，決して空砲（C→◎）を打たないはずである．なぜなら，Cはまだ潜在的な競争相手AとBの数を減らすことが出来るので，空砲を選ぶはずがない．また同じ推論法に基づけば，合理的なCにとっての潜在的な脅威は，AよりもBの方が大きいので，Cは（C→A）よりも（C→B）を選好するはずである．このように，各プレイヤーの目的関数は，自分の生存確率の最大化と自分への潜在的な脅威の最小化を両立することである．

また，王・江（2017a, b）でも説明した通り，この選好の順序は2ラウンド制の逐次ゲームのルール（制約条件）として必要不可欠である．なぜなら，このような選好の順序を仮定しないと，共謀が排除できないからである．各プレイヤーの目的関数は生存確率の最大化だけであれば，生き残りの人数に関する選好の順序を仮定せず，単にnラウンド制の逐次ゲームをやっても，全員が空砲またはわざと外すことで，確率1で全員が生き残れる．このような共謀行為は本研究におけるゲームの性質と異なるものであり，本論文はDixit and Nalebuff（1991）に倣い，共謀の可能性を排除し，自分の生存確率が最大かつ潜在的な脅威が最小となるAの戦略を考察する．

3.　Dixit and Nalebuff（1991）の三者決闘拡張ゲームについて

ここではDixit and Nalebuff（1991, pp.292–293）に基づき，三者決闘拡張ゲームについて説明する．各プレイヤーの戦略も選好も第2節の説明の通りであるが，唯一の変更点はプレイヤー3人（A・B・C）の命中率が｛A : B : C = 30% : 80% : 100%｝から｛A : B : C = 0.3 : 0.8 : p｝へと変わったことである．プレイヤーCの命中率を（$0.8 < p \leq 1$）と一般化して考察する．

4.　先読み手法による解き方

ここではDixit and Nalebuff（1991, pp.292–293）に基づき，先読み手法でAのすべての選択肢を順番に検討する．

①（A→B）：もしAがBを狙い命中させたら，その次はA自身がやられてしまう．なぜなら次はCの番になり，CはAを（$0.8 < p \leq 1$）の確率で撃ち当てる．そうなると，A自身の生き残れる確率は（$1-p$）であり，厳密に20%以下となる．だからAにとってBを狙うのはいい選択肢ではな

い.

ここで第１段階の（C → A）から始まり第２段階の最後までのサブゲームをゲーム h' と呼ぶ（図１を参照）. ゲーム h' においてＡ・Ｂ・Ｃそれぞれの生存確率Ｐ（A）・Ｐ（B）・Ｐ（C）を計算すると以下の通りである.

$$\{ P(A), P(B), P(C) \} = \{0.3(1-p)+0.7(1-p)^2, 0, 1-0.3(1-p) \}$$

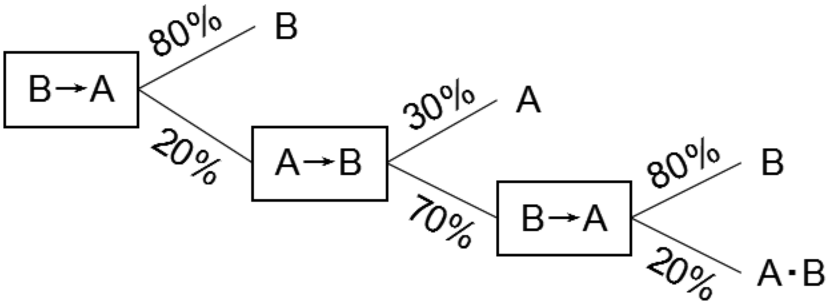
図１：サブゲーム *h'* を挿入（省）

② （A → C）：もしＡがＣを狙い命中させたら次はＢの番となり，ＢはＡを狙うことになる. そうなると，Ａ自身の生き残れる確率は20% 以下となる. これもあまり魅力のある選択肢ではない.

①と同様、第１段階の（B → A）から始まり第２段階の最後までのサブゲームをゲーム h'' と呼ぶ（図２を参照）. ゲーム h'' においてＡ・Ｂ・Ｃそれぞれの生存確率Ｐ（A）・Ｐ（B）・Ｐ（C）を計算すると以下の通りである.

$$\{ P(A), P(B), P(C) \} = \{ 0.088, 0.94, 0 \}$$

図２：サブゲーム *h''*



したがってＡにとっては（A → B）より（A → C）を選好するはず. なぜなら，条件（$0.8 < p \leq 1$）の下では，$0.3(1-p)+0.7(1-p)^2 < 0.088$ となるからである.

③ （A →◎）：Ａの最適行動は第１ラウンドではわざと空砲を打つことで，そして第２ラウンドではＢかＣの生き残ったほうを狙うことである. もし第２ラウンドではＢとＣの両方が生き残った場合，第１ラウンドと同様Ａがわざと空砲（A →◎）を打つ. これがＡにとっての最適戦略であることを主張するためには，②と③のＡの生存確率と比較する必要がある. 第１ラウンドでＡ

がわざと空砲（A →◎）を打つ場合，B と C はお互いに狙い打つ（B ⇄ C）と仮定すればどうでしょう．この仮定の合理性については後でチェックする．第１ラウンドで A がわざと空砲（A →◎）を打ってから，B は C を狙い，もし失敗しても C が B を狙う．第２ラウンドに入り，再び A の番となる．もし B と C のうち１人生しか生き残ってない場合，A はその生き残ったほうを狙えばよい．そうなると，A 自身の生き残れる確率は少なくとも30% 以上となる．もし B と C の両方が生き残った場合，A は第１ラウンドと同様わざと空砲（A →◎）を打てばよい．確率１で A は生き残りとなる．

③（A →◎）の戦略に従えば，A は少なくとも30% 以上の確率で生き残る．②（A → C）の戦略に従えば，A は30% の確率でサブゲーム h'' のステージに突入し，そしてそのステージでの生存確率は8.8% である．また，A は70% の確率でサブゲーム h'' のステージに突入せず，③（A →◎）と同じステージに突入し30% 以上の確率で生き残る．従って，A が30% 以上の生存確率を犠牲にしてサブゲーム h'' のステージに突入し8.8% の生存確率を手に入れることは不合理である．

以上の①②③に基づいて，かつ B と C はお互いに狙い打つ（B ⇄ C）と仮定すれば，第１ラウンドの A にとっては③（A →◎）が最適戦略である．

今度は B と C がお互いに狙い打つ（B ⇄ C）仮定の合理性について考察する．まずは，生き残ったプレイヤーは B と C の２人の場合，この仮定は明らかに合理的である．残ったケースは A と B と C が共存し，かつ A が③（A →◎）の戦略を所与としている場合である．この場合でも B と C は A を狙って打つことや空砲を打つことよりもお互いに狙い打つ（B ⇄ C）を選好する．B と C はそれぞれ自分の戦略から逸脱しても，相手の戦略を変更させることができないので，従って，第１ラウンドでのプレイヤー A と B と C それぞれの最適戦略は，{(A →◎),(B ⇄ C)} であることを示すことができた．ただし，厳密にいうと {(A →◎),(B ⇄ C)} は最適戦略ではなく，あくまでも各プレイヤーの第１ラウンドの最適行動の組に過ぎない．なぜなら，第２ラウンドに突入した場合の各プレイヤーの最適行動の組についてまだ記述していないからである．

各プレイヤーの最適戦略を厳密に記述すると以下の通りである．①第1ラウンドと第２ラウンドにかかわらず，もしプレイヤー数は３人の場合，最適行動の組は {(A →◎),(B ⇄ C)} である．②第１ラウンドと第２ラウンドにかかわらず，もしプレイヤー数は２人の場合，最適行動の組は $\{(i \rightleftarrows j), \forall\, i, \mathrm{j} \in (A, B, C)\}$ である．③第１ラウンドと第２ラウンドにかかわらず，もしプレイヤー数は１人になった場合，その時点でゲーム終了となる．

5. まとめ

本研究は Dixit and Nalebuff（1991）の三者決闘ゲームについて，プレイヤー C の命中率が確率１の仮定を拡張して考察したものである．Dixit and Nalebuff（1991）に倣い，本研究も先読み手法を用いて考察した．

本研究の主な結果は以下の通りである．プレイヤーCの命中率が確率1でなくても，Dixit and Nalebuff（1991）の三者決闘ゲームと同様，三者決闘拡張ゲームにおいてもプレイヤーAとBの戦略関係は互恵関係でなくても敵対関係にはなり得ない．なぜなら，たとえプレイヤーCの命中率が確率1でなくても，その命中率の相対的な高さの意味においてはプレイヤーAとBにとっては脅威であることに何の変りもないからである．

しかし本研究は未完成であることを言わなければならない．まず，個別のナッシュ均衡をチェックする意味では本研究の分析は事足りるでしょう．しかし，この先読み推論の分析手法だけでは，最適戦略候補であるナッシュ均衡（N.E.）及び最適戦略であるサブゲーム完全均衡（Subgame Perfect N.E.）をすべて特定することが出来ない．特に，最適戦略候補であるN.E.の中には信憑性のない脅しを排除することが出来ない．そして，本研究ではプレイヤーCだけを一般化した考察であるが，すべてのプレイヤーの一般化が望ましいであることは言うまでもない．

付録：先読み手法による解き方：Dixit and Nalebuff（1991,pp.292-293）を引用

ここでは先読み手法でAの選択肢を個々に検討する．もしAがBを狙い命中させたら，その次はA自身がやられてしまう．なぜなら次はCの番になり，彼はAを確実に撃ち当て最善の結果に至る．だからAにとってBを狙うのはいい選択肢ではない．

次にもしAがCを狙い命中させたら次はBの番となり，BはAを狙うことになる．そうなると，A自身の生き残れる確率は20%以下となる．だからこれもあまり魅力のある選択肢ではない．

Aの最適行動は第1ラウンドではわざと空に向けて打つことで外す，そして第2ラウンドではBかCの生き残ったほうを狙うことである．第1ラウンドでAがわざと外した場合，BはCを狙い，もし失敗してもCがBを撃ち当てる．第2ラウンドに入り，再びAの番となる．AはBかCの生き残ったほうを狙えば，30%以上の確率でAは唯一の生き残りとなる．

三者決闘ゲームから得られる教訓としては，小物（A）がスターになるには最初のチャンスは見送ったほうがよい場合がある．ライバルが多数いるときは，トップを走っている者は2番手以降から集中攻撃を受け，潰されることがある．こういう状況では，実力者（BとC）が互いに潰し合うまでは小物（A）が後方に控えておくほうが得である．

参考文献

Avinash Dixit and Barry Nalebuff（1991）, Thinking Strategically: Competitive Edge in Business, Politics and Everyday Life, WW Norton & Co.（菅野隆，嶋津祐一　訳［1991］,「戦略的思考とは何か—エール大学式『ゲーム理論』の発想法」，TBS ブリタニカ）

王鏡凱・江駿（2017a），「Dixit and Nalebuff（1991）の三者決闘ゲームに関する考察：数値例を中心に」鹿児島大学法文学部『経済学論集』88, 21–29.

王鏡凱・江駿（2017b），「Dixit and Nalebuff（1991）の三者決闘ゲームに関する考察：条件付き一般化」，『九州地区国立大学教育系・文系研究論文集』, 5（1），No.23, 1–11.