

# 数学的帰納法による期間の異なるパー・ボンドの考察

王 鏡 凱<sup>1</sup>

## 1. はじめに

本研究は数学的帰納法に基づいて期間の異なるパー・ボンドの関係性について考察するものである。パー・ボンドの現在価値を導出する主な方法は、演繹法 (Deduction) と数学的帰納法 (Induction) がある。数学的帰納法は帰納ではなく演繹論理である。演繹法による証明では、一般の利付債の公式からパー・ボンドの条件に合わせて証明するが普通である。王・楊 (2021) は演繹法による証明プロセスを考察している。演繹法による証明がストレートであり分かりやすいである一方、証明のプロセスである数列情報を使わないと、証明の結論だけでは期間の異なるパー・ボンドの関係について明示的に考察することが難しい。演繹法に対して数学的帰納法は証明のプロセスである数列情報を明示することが出来るので、期間の異なるパー・ボンドの関係性を考察するには便利である。

パー・ボンド (Par Bond) とは額面価格債券ともいう、その名前の通り、債券のクーポン・レート (C/F) が割引率  $r$  と等しいとき、債券の理論価格と額面価値 (F) が一致する特別な債券のことである。債券のクーポン・レート (C/F) が割引率  $r$  と等しいことは極めて偶然であるため、パー・ボンドは必ずしも実在する債券とは限らない。しかし、それにもかかわらず、パー・ボンドは債券価格の割高と割安を判断する重要な基準であるだけでなく、債券の基本構造 (C, F, n) を所与として債券価格と割引率の関係を理論分析するうえでも極めて重要な参照基準である。

債券価格の変動を知るためには、パソコンソフトや専門のプログラムなどを利用する方法に加え、パー・ボンドを利用する方法もある。パー・ボンドを利用する方法はパソコンソフトや専門のプログラムなどの方法と比べて、正確性は劣るが利便性は優れたものである。債券のイミュニゼーション、デュレーションやコンベキシティなどの洗練された金融工学の技術を活用するにはパソコンソフトや専門のプログラムなどを利用しないと行けない。

一方、実務の世界では、債券価格の変動について常に正確に知ることよりも、債券価格の変動の方向とその程度の大きさを把握することだけならば事足りる場合がほとんどである。その時はわざわざ時間とコストをかけてパソコンソフトや専門のプログラムなどを利用するよりも、パー・ボンドを利用する方法は適切であり、現実的である。

パー・ボンドの特徴、その理論価格が常にその額面価値であることを利用して、債券価格の変化を簡単に見積もることができる。債券の理論価格を直接に求めるのではなく、その債券と同じ発行

---

<sup>1</sup> 鹿児島大学准教授、本論文に関するすべてのお問い合わせは責任著者である王鏡凱にご連絡ください。

E-mail: kyogaiw@leh.kagoshima-u.ac.jp

条件であるパー・ボンドを基準として比較することで、間接的にその債券価格の変化度合を見積もることができる。なぜなら、債券の取引価格とパー・ボンドの額面価値のおおよその乖離について、クーポン・レートと利回り（割引率）を比較することでおおよその見積もりができるからである。利付債の理論価格の判断基準としての役割を果たしているパー・ボンドが実務世界では極めて重要であるだけでなく、債券の理論世界においても利付債の仕組みを理解する上では必要不可欠である。その仕組みのなか特に重要なのは期間の異なるパー・ボンドの関係性である。本研究では演繹法と数学的帰納法それぞれに基づいて期間の異なるパー・ボンドの関係性について考察・比較分析する。

本研究の主な結論は以下の通りである。演繹法に基づく利付債の導出方法は導出のプロセスである数列情報を使わないと、期間の異なるパー・ボンドの関係性を明示的に考察するのは困難であることが明らかになった。演繹法に対して数学的帰納法は証明のプロセスである数列の情報を明示することができるので、期間の異なるパー・ボンドの関係性を考察するには便利であることを明らかにした。さらに導出のプロセスである数列情報を使うことで、パー・ボンドの期間が延びるまたは縮むことによって、クーポン（C）の償還効果である現在価値の変動分（増加分または減少分）と、額面価値（F）の償還効果である現在価値の変動分（減少分または増加分）が互いにちょうど相殺するようになっていることが明らかになった。

本稿の構成は以下である。第 2 節では確定利付証券について説明し、第 3 節と第 4 節では、期間の異なるパー・ボンドの関係性をそれぞれ演繹法と数学的帰納法に基づいて考察する。最後に全体をまとめる。

## 2. 確定利付証券（Fixed Income Securities）について<sup>2</sup>

お金には時間価値がある。金銭の貸借をすると利子が付く。なぜなら、貸借において、貸し手は現在の消費を犠牲にして資金を借り手に融通するからである。利子は貸し手のコスト、お金の時間価値に対する見返りとして支払われるものである。

古くから金銭の貸借契約を最もよく表すものは債券（Bond）である。債券とは、定期的に一定の利子（クーポン：Coupon, 以下 C と略記）が支払われ、満期（n）時にあらかじめ定められた額面価値（Face Value, Par Value, 以下 F と略記）が償還される証券のことである<sup>3</sup>。

債券の定義から分かる通り、債券は発行時点で決められたルールに従って、保有者に金銭を支払う発行者の債務のことである。債券発行時点でルールによって決められた内容は、債券のクーポン（C）と額面価値（F）と償還期間（n）についての約束ことであり、債券の基本構造でもある。債券が発行される時、既に基本構造（C, F, n）について確定されていることから、確定利付証券

<sup>2</sup> この節では王・楊（2021）に基づいたものである。

<sup>3</sup> 本文の債券の定義については、榊原・青山・浅野（2005）、「証券投資論」[第 3 版]、第 5 章、p.220 を基に筆者が加筆修正したものである。また、額面価値は額面金額ともいう。

(Fixed Income Securities) または単に利付債またはクーポン債とも呼ばれる。

クーポン (C) とは定期的に支払われる利子のことをいう。一般に債券の世界では、クーポン (C) を直接に表示する代わりにクーポン・レート (C/F) で表示するのが普通である。クーポン・レート (C/F) は、クーポン (C) を額面価値 (F) のパーセンテージ (%) として記述されるものである。一般にクーポンは年 1 回支払われるとは限らない。しかし、説明を簡潔化するために特別な事情がなければ、本研究ではクーポンについて一般的なテキストと同じ仮定を課す。すなわち、本研究ではクーポンが毎期の期末日に 1 回だけ支払われるものとする。この仮定をおくことによって、後に分析する確定利付証券の理論価格が債券の本質を損なうことなく簡潔になる。

一般にほとんどの債券は、基本的に一定のクーポン (C) と額面価値 (F) と償還期間 (n) が約束される確定利付証券である。債券の理論価格を求める方法として、債券のキャッシュフローを数列として記述して、そのキャッシュフロー数列を割引現在価値として求める方法がある。割引率  $r$ 、満期  $n$  の利付債の理論価格は以下の通りに記述することができる。

$$V_n = \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \dots + \frac{C+F}{(1+r)^n} = \frac{C}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right\} + \frac{F}{(1+r)^n}$$

割引率  $r$  とは、債券の最終利回りまたは満期利回り (Yield To Maturity: YTM) であり、債券投資のキャッシュフローによって決まる金利のことである。具体的にいうと、債券投資によってもたされるキャッシュフローから求められる債券の現在価値が現在取引している債券価格と等しくなる金利のことである。この定義から、YTM は一般のスポット・レートとは違い、債券投資のキャッシュフローによって求められる内部収益率 (Internal Rate of Return: IRR) であることが明らかである。本研究では、特に言及がない限り、金利の期間構造については所与とし、YTM は単に利回りまたは割引率と表す。債券の利回りについては年率で表示するのが普通である。

割引率  $r$  が変化すると、基本構造の異なる複数の債券価格はそれぞれどの程度変化するのかを理解することが重要である。割引率  $r$  による債券の理論価格の変化分析では、厳密な定量分析だけでなく、直感的かつ簡潔な分析も重要である。割引率  $r$  が変化すると、基本構造の異なる複数の債券価格はそれぞれどの程度変化するのかを簡潔に理解するため、実務では  $p$ - $r$  平面 (価格・利回り曲線ともいう) をよく利用する。縦軸が債券価格  $P$  であり、横軸が割引率  $r$  の 2 次元平面に、クーポン・レートと満期の異なる複数の債券について、横軸の割引率  $r$  を動かしながら債権価格をプロットするものである。基本構造の異なる複数の債券価格と割引率の関係は 2 次元平面において簡潔に捉えることができる。

一般論として、普通の金融市場では、異なる債券の利回り (割引率  $r$ ) が同じ方向へ動くものである。しかし、債券価格がどの程度変化するかは、それぞれの債券の基本構造 (C, F, n) によって異なる。特に複数の債券のクーポン・レートが同じの場合、満期の異なる複数の債券の価格・利回り曲線は必ずパー・ボンドの点を通る。つまり、クーポン・レートと額面価値が同じであれば、期

間の違いによらずすべての債券は同じ額面価値（縦軸の債券価格  $P = F$ ）と利回り（横軸の割引率  $r = C/F$ ）の点、パー・ボンドの点  $(C/F, F)$  を通る。これこそ、パー・ボンドが債券の理論分析において極めて重要な理由である。

### 3. 期間の異なるパー・ボンドの関係性：演繹法に基づく考察

ここでは王・楊（2021）の考察に基づいて、演繹法による期間の異なるパー・ボンドの関係性を説明する。クーポンが毎期の期末日に1回だけ支払われ、割引率  $r$  を所与として基本構造  $(C, F, n)$  を持つ標準的な利付債について、その理論価格は以下のように記述することができる。

$$V_n = \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \dots + \frac{C+F}{(1+r)^n} = \frac{C}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right\} + \frac{F}{(1+r)^n}$$

パー・ボンドの条件である  $r=C/F$  を代入すると、理論価格は以下の通りである。

$$V_n = \frac{rF}{1+r} + \frac{rF}{(1+r)^2} + \dots + \frac{rF+F}{(1+r)^n} = \frac{rF}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right\} + \frac{F}{(1+r)^n} = F$$

証明は以上である。演繹法による証明の結論  $(V_n=F)$  では、パー・ボンドの特徴を捉えることが難しい。期間の異なるパー・ボンド  $V_n$  と  $V_i$  の関係について考察するためには、演繹法の結論、 $(V_n=V_i=F)$  だけでは必ずしも明らかではない。期間の異なるパー・ボンド  $V_n$  と  $V_i$  の関係を考察するためには、どうしても証明のプロセスである数列情報を利用しなければならないことが明らかである。次節では数学的帰納法に基づいて証明のプロセスである数列情報を利用して期間の異なるパー・ボンド  $V_n$  と  $V_i$  の関係を明らかにする。

ここでは演繹法に基づいて期間の異なるパー・ボンド  $V_n$  と  $V_i$  の関係性を明らかにする。パー・ボンド  $V_n$  の証明プロセスである数列情報を任意のパー・ボンド  $V_i$  について適用すると以下の通りになる。

$$V_i = \frac{rF}{1+r} + \frac{rF}{(1+r)^2} + \dots + \frac{rF+F}{(1+r)^i} = \frac{C}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{(1+r)^i} \right\} + \frac{F}{(1+r)^i} = F$$

ここで異なる期間のパー・ボンド  $V_n$  と  $V_i$  の差分をとると以下の通りになる。

$$V_n - V_i = \frac{C}{r} \left\{ \frac{1}{(1+r)^i} - \frac{1}{(1+r)^n} \right\} + F \left\{ \frac{1}{(1+r)^n} - \frac{1}{(1+r)^i} \right\} = 0$$

この証明プロセスの可視化こそが期間の異なるパー・ボンド  $V_n$  と  $V_i$  の関係性を表している。  $V_n$  と  $V_i$  の差分式から期間の異なるパー・ボンド  $V_n$  と  $V_i$  の関係について以下の結論が得られる。パー・ボンドの期間が  $(n-i)$  期間分延びることによって、延びる  $(n-i)$  期間分のクーポン (C) の償還による現在価値の増加分  $\frac{C}{r} \left\{ \frac{1}{(1+r)^i} - \frac{1}{(1+r)^n} \right\}$  と、延びる  $(n-i)$  期間分の額面価値 (F) の償還による現在価値の減少分  $F \left\{ \frac{1}{(1+r)^n} - \frac{1}{(1+r)^i} \right\}$  が同じ効果である。従って、パー・ボンドの期間が延びるまたは縮むことによって、クーポン (C) と額面価値 (F) のそれぞれの償還効果は互いにちょうど相殺するようになっていることが分かる。

#### 4. 期間の異なるパー・ボンドの関係性：数学的帰納法に基づく考察

演繹法に比べ、証明プロセスの可視化こそが数学的帰納法の最大の特徴である。これから期間の異なるパー・ボンド  $V_n$  と  $V_i$  の関係性について考察する際に、数学的帰納法による証明プロセスの可視化は役に立つことが明らかになる。

パー・ボンドの条件 ( $r=C/F$ ) を所与として基本構造 (C, F, n) を持つパー・ボンドについて、その理論価格は以下のように記述することができる。

$$\text{if } n = 1, \quad V_1 = \frac{rF}{(1+r)} + \frac{F}{(1+r)} = \frac{F(1+r)}{(1+r)} = F$$

$$\text{if } n = 2, \quad V_2 = \frac{rF}{(1+r)} + \frac{rF}{(1+r)^2} + \frac{F}{(1+r)^2} = \frac{rF}{(1+r)} + \frac{V_1}{(1+r)} = \frac{F(1+r)}{(1+r)} = F$$

$$\text{so, given } V_i = F, \quad V_j = \frac{rF}{(1+r)} + \frac{V_i}{(1+r)} = \frac{F(1+r)}{(1+r)} = F$$

$$\text{so, } V_n = F$$

証明は以上である。パー・ボンドの期間  $n$  について得られる情報は演繹法も数学的帰納法も同じであり、 $V_n=F$  の結論は期間  $n$  に依存しない。しかし、 $V_i$  と  $V_j$  の関係については数学的帰納法から以下の情報が得られる。

$$V_j = \frac{rF}{(1+r)} + \frac{V_i}{(1+r)} = \frac{F(1+r)}{(1+r)} = F$$

$V_j$ の現在価値は、 $V_i$ とクーポン（C）の1(= $j-i$ )期間分の割引現在価値を合計したものである。さらに、ここから派生方法として以下の関係が得られる。

$$V_j - V_i = \frac{rF}{(1+r)} + \left[ \frac{1}{(1+r)} - 1 \right] F = 0$$

パー・ボンドの期間が1期間分延びることによって、延びる1期間分のクーポン（C）の償還による現在価値の増加分  $[rF/(1+r)]$  と、延びる1期間分の額面価値（F）の償還による現在価値の減少分  $[1/(1+r)-1]F$  が同じ効果である。従って、パー・ボンドの期間が延びるまたは縮むことによって、クーポン（C）と額面価値（F）のそれぞれの償還効果は互いにちょうど相殺するようになっていることが分かる。

同様、より一般的  $V_i$  と  $V_n$  の関係についても数学的帰納法から以下の情報が得られる。

$$V_j = \frac{rF}{(1+r)} + \frac{V_i}{(1+r)} = \frac{F(1+r)}{(1+r)} = F$$

$$V_k = \frac{rF}{(1+r)} + \frac{V_j}{(1+r)} = \frac{rF}{(1+r)} + \frac{rF + V_i}{(1+r)^2} = \frac{F(1+r)}{(1+r)} = F$$

⋮

$$V_n = \frac{C}{(1+r)} + \frac{C}{(1+r)^2} + \dots + \frac{C + V_i}{(1+r)^{n-i}} = \frac{C}{r} \left[ 1 - \frac{1}{(1+r)^{n-i}} \right] + \frac{V_i}{(1+r)^{n-i}} = F$$

$V_k$ の現在価値は、 $V_i$ とクーポン（C）の2期間分( $k-i$ )の割引現在価値を合計したものである。そして、 $V_n$ の現在価値は、 $V_i$ とクーポン・レート（C）の( $n-i$ )期間分の割引現在価値を合計したものである。ここでは、 $V_n$ の等比数列の変形を見やすいようにあえてクーポン（C）として使用した。さらに、ここから以下の差分式が得られる。

$$V_k - V_i = \frac{rF}{(1+r)} + \frac{rF}{(1+r)^2} + \left[ \frac{1}{(1+r)^2} - 1 \right] F = 0$$

⋮

$$V_n - V_i = \frac{C}{r} \left[ 1 - \frac{1}{(1+r)^{n-i}} \right] + F \left[ \frac{1}{(1+r)^{n-i}} - 1 \right] = 0$$

パー・ボンドの期間が( $n-i$ )期間分延びることによって、延びる( $n-i$ )期間分のクーポン（C）の

償還による現在価値の増加分  $[1 - 1/(1+r)^n]C/r$  と、延びる  $(n-i)$  期間分の額面価値 (F) の償還による現在価値の減少分  $[1/(1+r)^{n-i} - 1]F$  が同じ効果である。従って、パー・ボンドの期間が延びるまたは縮むことによって、クーポン (C) と額面価値 (F) のそれぞれの償還効果は互いにちょうど相殺するようになっていることが分かる。

## 5. まとめ

本研究は数学的帰納法に基づいて期間の異なるパー・ボンドの関係性について考察したものである。期間の異なるパー・ボンドの関係について数式による分析の可視化は、債券の取引価格の変動情報について理解するために必要不可欠である。

本研究の主な結論は以下の通りである。演繹法に基づく利付債の導出方法は導出のプロセスである数列情報を使わないと、期間の異なるパー・ボンドの関係性を明示的に考察するのは困難であることが明らかになった。数学的帰納法は証明のプロセスである数列情報を明示することができるので、期間の異なるパー・ボンドの関係性を考察するには便利であることを明らかにした。さらに導出のプロセスである数列情報を使うことで、パー・ボンドの期間が延びるまたは縮むことによって、クーポン (C) の償還効果である現在価値の変動分 (増加分または減少分) と、額面価値 (F) の償還効果である現在価値の変動分 (減少分または増加分) が互いにちょうど相殺するようになっていることが明らかになった。

## 参考文献

- デービッド・G. ルーエンバーガー (著), 今野浩 (訳), 枇々木規雄 (訳), 鈴木賢一 (訳) (2002), 『金融工学入門』, 日本経済新聞社.
- 楠原茂樹, 青山護, 浅野幸弘 (2005), 『証券投資論』, 日本証券アナリスト協会 (編), 日本経済新聞社.
- 王鏡凱・楊樂 (2021), 「演繹法による期間の異なるパー・ボンドの考察」鹿兒島大学法文学部『経済学論集』第97号.