

力学的エネルギー保存則の実験における回転エネルギーの関与

Involvement of Rotational Energy in Experiment on Mechanical Energy Conservation Law

陳 麗¹⁾・濱崎貢¹⁾・山口光臣²⁾・小原益巳³⁾・三井好古⁴⁾・小山佳一⁴⁾ *

Li CHEN¹⁾, Mitsugi HAMASAKI¹⁾, Mitsuomi YAMAGUCHI²⁾, Masumi OBARA³⁾, Yoshifuru MITSUI⁴⁾,
Keiichi KOYAMA⁴⁾ *

¹⁾ 鹿児島大学共通教育センター

¹⁾ Education Center, Kagoshima University

²⁾ かがしま企業家交流協会

²⁾ Kagoshima Enterprise Exchange Society

³⁾ 原田学園鹿児島情報高等学校

³⁾ Kagoshima JOHO High School, Harada Academy

⁴⁾ 鹿児島大学大学院理工学研究科

⁴⁾ Graduate School of Science and Engineering, Kagoshima University

* koyama@sci.kagoshima-u.ac.jp

Abstract: The law of energy conservation is most basic and universal in natural phenomena. At mechanics of material particle, the conservation law of mechanical energy correlates only potential energy with translational kinetic energy. However, in the motion of a rigid body, the energy of rotation must be added. In this paper, we discuss the conservation law of mechanical energy from student experiments, when a rigid body does not rotate and when it rotates. By analyzing experimental data, students understand the concept of the conservation law of mechanical energy, which includes the energy of rotation in the motion of a rigid body.

Keywords: Potential energy, Kinetic energy, Rotational energy, Angular velocity, Conservation law of mechanical energy, Moment of inertia

1. はじめに

2016 年 12 月の中央教育審議会の答申では高等学校理科においては、1) 課題の把握（発見）、2) 課題の探究（追究）、3) 課題の解決という探究の過程をとおした学習活動を行うことを重視している[1]。

このような視点に基づいて鹿児島大学理学部は、2016年から「かがしま企業家交流協会」との共催で、高等学校生徒を対象にサイエンス・パートナーシップ・プログラム（SPP）を実施し、新しい理科教育に対応する実践的な取り組みを行っている。本稿は、2018年のSPPに取り入れた高等学校物理の力学的エネルギー保存則における「回転のエネルギーの関与」に関する教材の開発と、それを用いた実験についてまとめたものである。

高等学校では力学的エネルギー保存則を「物理基礎」の科目で学習するが、剛体については「物理」の科目で力のモーメントの扱いに留めている[2]。しかし、「半径の異なる球（剛体）が斜面を転がり降りるとき、半径の大きい球ほど加速度が大きいのではないか？」との疑問をもつ生徒もいる。生徒のこのような疑問や気付きは課題の把握（発見）であり、課題の探求（追及）と解決の学習として最適の内容である。

2018年のSPPではオリジナルな器具を用いて次の実験を行い、剛体の回転エネルギーの関与について考察した。

実験Ⅰ；振り子を使ったおもりの水平投射で力学的エネルギー保存則を調べる。

実験Ⅱ；レールを使ったおもりの水平投射で力学的エネルギー保存則を調べる。

実験Ⅱでは、レール上を運動するおもりが回転しないと想定した場合と、回転をする場合に分けて考察を行った。図1は今回用いた実験装置である。実験Ⅰと実験Ⅱの測定結果を比較するため、おもりの最初の高さと水平投射を始める高さを統一した[3]。

生徒は2つの実験のおもりの水平到達距離の違いについて解析し、運動エネルギーが異なる原因は、おもりの回転の有無によることに気づくことになる。また、身近な材料を利用した実験によって創造性が培われ、知識や技能の習得とともに思考力・判断力・表現力を身に付けることが期待できる[2]。

※ 実験は、8グループ（1グループ4名）で行った。

※ 報告する実験のデータと解析結果は、筆者らによる予備実験と4つのグループのものである。

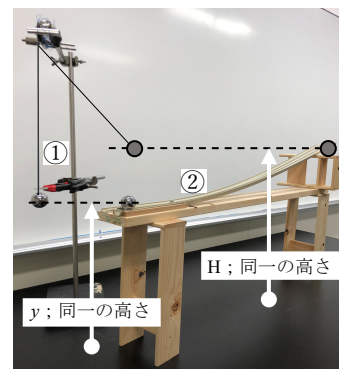


図1. 実験装置 (参照, 図2.3)
①; 実験Ⅰ, ②; 実験Ⅱ

2. 実験の原理

摩擦力や空気の抵抗がなくて重力だけが物体にはたらくとき、運動エネルギーと位置エネルギーの和は一定に保たれる。物体の高さ h_1 における速さを v_1 、高さ h_2 における速さを v_2 とすれば、力学的エネルギー保存則は次の (1) 式のように表される。

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2 \quad (1)$$

2.1 振り子を使ったおもりの水平投射

図2のように、軽い糸でつるしたおもりの最下点Bを高さの基準とし、Bから高さ h のAでおもりを静かに放す。おもりがBに達したとき糸が切れ水平に飛び出すとき、エネルギー保存則は (1) 式を次の (2) 式のように書き改めればよい。

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = mgh \quad (2)$$

これは、Aでの位置エネルギーがBの運動エネルギーに変換されたことを示している。本実験の目的は、(2)式の関係が成り立つことを確かめることである。Aの位置エネルギーは容易に測定できる。一方、Bの運動エネルギー E_B は水平投射に関する (3) 式から得られる (4) 式で、 x と y を測定して求めることになる[4,5]。

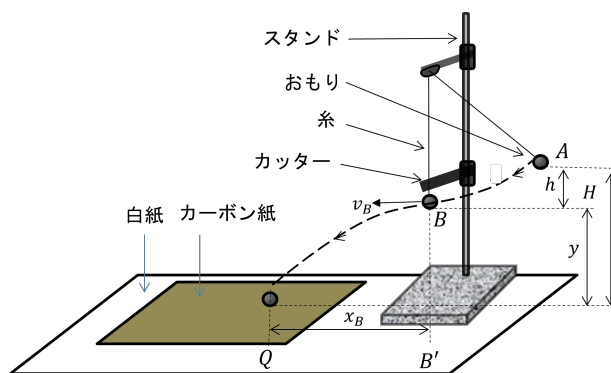


図2. 振り子を使ったおもりの水平投射

$$x = v_B t, \quad y = \frac{1}{2}gt^2 \quad (3)$$

$$E_B = \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{mgx_{ave}^2}{4y} \quad (4)$$

2.2 レールを使ったおもりの水平投射

図3のように、斜面の部分が水平な部分になめらかに繋がったレールを用いたおもりの運動を考える。テーブル面に固定されたレールの端Dを高さの基準とする。

実際の実験ではレールとおもりの間には摩擦が存在するため、おもりはレールを回転しながら D に達する。質量 m 、半径 r のおもりが D に達したときの速さを v_D とすると、角速度 ω と慣性モーメント I はそれぞれ次のように表される。

$$\omega = \frac{v_D}{r}, \quad I = \frac{2}{5}mr^2 \quad (5)$$

おもりの全運動エネルギーは、並進の運動エネルギー E_{D1} と重心のまわりの回転のエネルギー E_{D2} の和となる[6]。したがって、高さ h の C と基準の D 間の力学的エネルギー保存則は次の (6) 式で表される。

$$\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv_D^2 = mgh \quad (6)$$

(6) 式に(5)式を用いると、 E_{D1} として (7) 式を、 E_{D2} として(8)式を得る。また (7) 式から D でのおもりの速さ v_D として、(9) 式を得る。

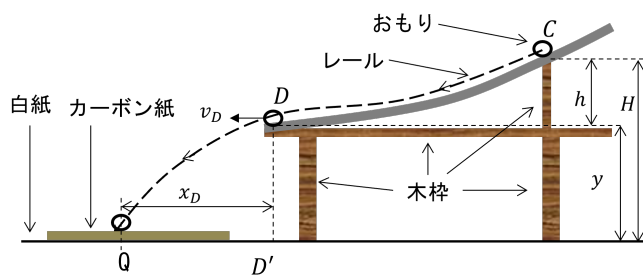


図 3. レールを使ったおもりの水平投射

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mr^2 \left(\frac{v_D}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}mv_D^2 = mgh$$

$$E_{D1} = \frac{1}{2}mv_D^2 = \frac{5}{7}mgh \quad (7)$$

$$E_{D2} = mgh - \frac{5}{7}mgh = \frac{2}{7}mgh \quad (8)$$

$$v_D = \sqrt{\frac{10}{7}gh} = \sqrt{\frac{5}{7}} \cdot \sqrt{2gh} \quad (9)$$

(7) 式から D でのおもりの並進の運動エネルギー E_{D1} は、おもりが回転しないと想定した場合に対して(5/7)倍になる。また (8) 式から回転のエネルギー E_{D2} は、(2/7) 倍になることが分かる。D を水平に飛び出したおもりは床の Q に落下すが、その水平到達距離 x は v_D と一次の相関をなすから、(9) 式から回転を伴う実際のおもりの水平到達距離 x_2 は、回転を伴わないと想定した場合の x_1 の $(\sqrt{5/7})$ 倍になる[6,7]。D の運動エネルギー E_D の実験値は、(4) 式に準じて水平到達距離の平均値 x_{ave} と y を測定して、次の (10) 式から求めることができる。

$$E_D = \frac{1}{2}mv_D^2 = \frac{mgx_{ave}^2}{4y} \quad (10)$$

今回の実験のねらいは、回転を伴う物体の運動エネルギーが回転を伴わないと想定した場合に比べて小さくなることを確かめ、その理由を考察することである。実験を行う高校生は慣性モーメントや回転のエネルギーに対する学習がなされていないため、(5) 式と(6) 式の内容は確立していない。したがって「2.1」と「2.2」で、おもりの水平到達距離が異なることに大きな驚きと疑問を抱き、その理由について考察するはずである。

3. 実験の手順

実験に使用された主な器具は、スタンド、糸(細いポリひも)、セロテープ、おもり(質量 $m = 32.2 \text{ g}$)、カーボン紙、白紙、ものさし、配線用モール、クリップ、木枠、カッターナイフ(取扱いに注意)

3.1 実験Ⅰ：振り子を使ったおもりの水平投射

- (1) 実験装置の概略図を図2に、実験の様子を図4に示している。白紙を実験台に敷き、セロテープでずれないように固定する。カーボン紙はおもりが落下する位置に置く。
- (2) 長さ約40cmの糸の端におもりをセロテープでとめる。このとき、ひもを指でつまめるくらい（約2cm）残してテープで留める。
- (3) 糸の一方をスタンドのクリップに挟み、おもりの位置Bを高さ $y = 32\text{cm}$ に固定する（糸の長さを調整して決める）。おもりの真下のテーブル上の位置B'を決め白紙上に記録する。
- (4) カッターナイフをBのおもりより少し上のところに固定する。カッターの刃はおもりの進行方向に対し、斜めになるようにする良い。
- (5) おもりを高さ $H = 44\text{cm}$ まで、糸が弛まないように引っ張り上げてAの位置に静止させる。テーブルからAまでの高さH、おもりの最下点BからAまでの高さを h とし、 $H = y + h$ となることを確認する。
※ $y = 32\text{cm}$, $H = 44\text{cm}$, $h = 12\text{cm}$ にする。
- (6) Aに静止したおもりを静か（ $v_A = 0$ ）に放す。落下点Qはカーボン紙によって白紙上に記録される。B'からQまでの水平距離 x_i を測りデータ表に記入する。
※ 予備実験を行い、手順を確認するとよい。
- (7) (2)から(6)の操作を5回繰り返し、水平距離 x_{ave} を記録する。

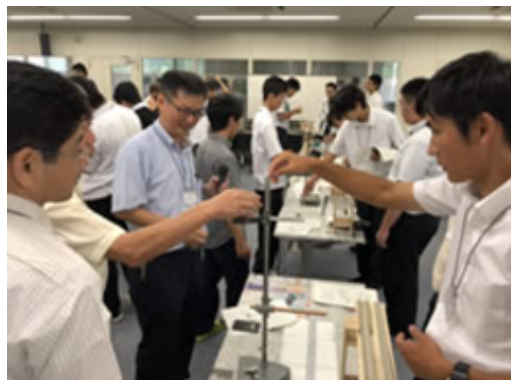


図4. 実験Ⅰの様子

3.2 実験Ⅱ：レールを使ったおもりの水平投射

- (1) 図3や図5のように木枠等を利用してレールをセットする。必要ならばクランプで木枠を固定する。
- (2) テーブルから水平なレールの端Dの高さを、正確に $y = 32\text{cm}$ に設定する。
※ y の値は実験Ⅰと実験Ⅱの結果を比較するため、「実験Ⅰ」のCの高さ y と同じにする。
- (3) おもりをレール上で放す位置Cを決める。テーブルからCまでの高さH、水平なレールの端DからCまでの高さを h とすると、 $H = y + h$ となるように確認する。
※ $y = 32\text{cm}$, $H = 44\text{cm}$, $h = 12\text{cm}$ にする。
- (4) Cからおもりを静かに放し、レールの下端Dから水平投射をさせる。
※ 以降の手順は「3.1. 実験Ⅰ」の(6), (7)に準じる。

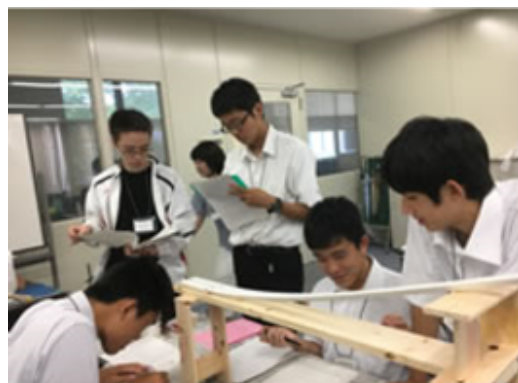


図5. 実験Ⅱの様子

4. 実験Ⅰ，Ⅱの測定結果

表1および表2は、実験Ⅰと実験Ⅱに対する筆者らによる予備実験と生徒4グループの測定データである。実験Ⅰ，実験Ⅱとも、おもりのはじめの高さを $H = 440 \times 10^{-3}\text{m}$ ，おもりが水平に飛び出す高さを $y = 320 \times 10^{-3}\text{m}$ に統一した。水平到達距離の実測値 x_i とその平均値 x_{ave} を記入している。

表 1 : 振り子をつかったおもりの水平投射の測定データ
($y = 320 \times 10^{-3}m$, $h = 120 \times 10^{-3}m$, $H = 440 \times 10^{-3}m$)

実験 グループ	水平到達距離の実測値 x_i ($\times 10^{-3}m$)					実測値 x_i の平均値 x_{ave} ($\times 10^{-3}m$)
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
予備実験	399.0	390.5	398.5	395.0	392.0	395.0
1	385.0	388.0	416.0	402.0	392.0	396.6
2	375.0	400.0	392.0	384.0	370.0	384.2
3	420.0	385.0	390.0	400.0	416.0	402.2
4	396.0	380.0	390.0	390.0	385.0	388.2

表 2 : レールを使ったおもりの水平投射の測定データ
($y = 320 \times 10^{-3}m$, $h = 120 \times 10^{-3}m$, $H = 440 \times 10^{-3}m$)

実験 グループ	水平到達距離の実測値 x_i ($\times 10^{-3}m$)					実測値 x_i の平均値 x_{ave} ($\times 10^{-3}m$)
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
予備実験	325.0	320.0	335.0	320.0	335.0	327.0
1	320.0	328.0	333.0	330.0	321.0	326.4
2	330.0	327.0	316.0	320.0	325.0	323.6
3	317.0	330.0	325.0	328.0	326.0	325.2
4	318.0	317.2	325.0	328.0	320.0	321.6

5. 考察

5.1 実験 I の考察

表 1 の水平到達距離の平均値 x_{ave} を(4) 式に用いて運動エネルギーの実測値 E_B を算出し, (2) 式を用いて運動エネルギーの理論値 E_0 を求めてみた。これを基に, 理論値に対する実測値の相対誤差を求めた。表 3 はこれらの結果をまとめたものである。

表 3 : 振り子をつかったおもりの水平投射のデータ解析
($m = 32.2 \times 10^{-3}kg$, $y = 320 \times 10^{-3}m$, $h = 120 \times 10^{-3}m$, $H = 440 \times 10^{-3}m$)

実験 グループ	実測値 x_i の 平均値 x_{ave} (m)	おもりの水平 距離の理論値 $x_0 = 2\sqrt{yh}$ (m)	運動エネルギーの 実測値 $E_B = \frac{mgx_{ave}^2}{4y}$ ($\times 10^{-2}J$)	運動エネルギーの 理論値 $E_0 = mgh$ ($\times 10^{-2}J$)	相対誤差 $\frac{E_B - E_0}{E_0} \times 100$ (%)
予備実験	0.3950	0.3919	3.846	3.787	1.6
1	0.3966		3.878		2.4
2	0.3842		3.639		-3.9
3	0.4022		3.988		5.3
4	0.3882		3.715		-1.9

生徒の実験では相対誤差が $(-3.9\%) \sim (+5.3\%)$ であり、グループ間にかなりの開きがある。生徒たちはその要因として、実験装置（図 1）の設定や実験の方法について次のいくつかの項を挙げた。

- (1) おもりの最下点 B の高さの設定が不正確であったため、おもりの水平到達距離 x_B の値が散逸した。
- (2) おもりを放す A の高さ ($H = 440 \times 10^{-3}m$) を、フリーハンドでは正確に保持できなかったため、
($h = H - y = 120 \times 10^{-3}m$) の値が不正確になり、実験ごとにおもりの水平到達距離 x_B の値が散逸した。
- (3) A の位置でおもりを放す瞬間に、おもりに初速度を与えてしまった（実験グループ 2, 4）。
- (4) 糸を切るカッターナイフの位置をおもりの直上にセットしなかったため、おもりが最下点 B に達し糸が切れる瞬間に、おもりが水平方向に対してやや上向きに飛び出した。

5.2 実験 II の考察

実験 II の考察としてはおもりが回転を伴わないと想定した場合と、回転を伴う実際の場合に分けて並進の運動エネルギーについて検討する。表 4 はこれらの結果をまとめたものである。

表 4：レールを使ったおもりの水平投射のデータ解析
($m = 32.2 \times 10^{-3}kg$, $y = 320 \times 10^{-3}m$, $h = 120 \times 10^{-3}m$, $H = 440 \times 10^{-3}m$)

実験 グループ	実測値 x_i の平均値 x_{ave} (m)	運動エネルギー の実測値 $E_D = \frac{mgx_{ave}^2}{4y}$ ($\times 10^{-2}J$)	回転を伴わない としたときの運 動エネルギー の理論値① $E_0 = mgh$ ($\times 10^{-2}J$)	相対誤差① $\frac{E_D - E_0}{E_0}$ $\times 100$ (%)	回転を伴う場合の 並進の運動エネル ギーの理論値② $E_{D1} = \frac{5}{7}mgh$ ($\times 10^{-2}J$)	相対誤差② $\frac{E_D - E_{D1}}{E_{D1}}$ $\times 100$ (%)
予備実験	0.3270	2.636	3.787	-30.4	2.705	-2.5
1	0.3264	2.626		-30.6		-2.9
2	0.3236	2.582		-31.8		-4.6
3	0.3252	2.607		-31.1		-3.6
4	0.3216	2.550		-32.6		-5.7

【回転を伴わないと想定した場合】

水平到達距離 x_{ave} を(10) 式に用いて運動エネルギーの実測値 E_D と、(2) 式を用いて運動エネルギーの理論値① E_0 を算出し、 E_0 に対する E_D の相対誤差② を求めた。相対誤差① は、 $(-32.6) \sim (-30.6)\%$ となり実験 I に比べ極めて大きくなる。これは回転を伴わないと想定した場合、運動エネルギーが極端に小さくなることを意味する。このように実験 I に比べて相対誤差①が大きくなる理由を、多くの生徒たちはおもりにはたらく空気抵抗とレールとおもりの間の摩擦力の影響だと認識した。

【回転を伴う場合】

ここでの考察に先立って、「3.2. 実験 II：レールを使ったおもりの水平投射」について説明を加えた。回転を伴う場合の運動エネルギーの理論値② E_{D1} は、回転を伴わないと想定した場合の理論値① E_0 の $(5/7)$ 倍になるなど考察の視点を与えた。

水平到達距離 x_{ave} を(7) 式に用いて回転を伴う場合の並進の運動エネルギーの理論値② E_{D1} を算出し、 E_{D1} に対する実測値 E_D の相対誤差② を求めた。相対誤差② は、 $(-5.7) \sim (-2.9)\%$ となり、相対誤差① より低減した。グループの中には、表 4 の相対誤差② が表 3 の相対誤差より大きい要因として、実験 II ではレールとおもりの間の摩擦力の影響が無視できないと指摘した。

6. まとめ

高等学校の物理では学習指導要領の規定により、力学的エネルギー保存の法則を質点に限定して扱うことになっている。そのため、慣性モーメントの異なる二つの物体が斜面を転がり降りるとき、加速度に差があることに疑問を感じる生徒が少なくない[7]。今回の実験は生徒の鋭い疑問をテーマにした。使用した装置は身近で安価な材料を利用したものであったが、実験では高い技術と正確な測定が求められた。表3と表4の相対誤差の散逸は、実験の技術と測定の精度を反映している。

実験Ⅰは高等学校の物理実験として多くの学校が取り入れている。実験Ⅱはデータの解析と考察の過程をとおして疑問に気付き、課題を協働して解決する資質や能力（思考力・判断力・表現力）を身に付けさせる契機になった[2]。いずれの実験とも測定結果はグループによって隔たりがあったが、実験の目的と成果は十分に達成された。また、手造りの教材で実験に臨んだことが、生徒には親しみを感じ楽しく実験ができたようである。



図6. データ処理とプレゼンテーション資料作成



図7. グループのプレゼンテーション

講座の最終日にはグループごとに実験結果を分析し、その後プレゼンテーションを行った(図6. 7)。プレゼンテーションをとおして、生徒たちは次のような感想や意見を述べた[8]。

- ・実験Ⅰの式はよく分かったが、実験Ⅱでは高等学校の教科書にはない式があった。慣性モーメントという言葉は初めて聞いた。慣性モーメントとは何だろうと思った。
- ・実験Ⅰは高等学校の授業で扱ったので、今回の実験で力学的エネルギー保存則がさらによく理解できた。
- ・実験Ⅱはデータ処理や計算式が複雑で、考察が大変難しかったが達成感を味わった。
- ・実験Ⅱのおもりの水平到達距離が実験Ⅰより小さいのは、これまで摩擦の影響だと思っていた。
- ・物体が回転するときは、回転のエネルギーが伴うことを初めて知った。

次期学習指導要領では高等学校物理の力学分野の「様々な運動」では、物体を質点として扱っている。また、剛体に関しては「力のモーメントのつり合い」だけで、回転については従前どおり扱わないことになっている[2]。今回SPPで行った実験の成果として、次のようなことが挙げられる。

- (1) 実験に興味・関心をもち協働して観察、実験をしようとする態度が見られた。
- (2) 回転する物体の運動には、並進の運動エネルギーの他に回転のエネルギーが関与することを理解した。
- (3) 実験及びプレゼンテーションをとおして、事象に対する思考力、判断力や表現力が向上した。

謝辞

本 SPP は、「鹿児島大学理学部」と「かごしま企業家交流協会」との共催で実施したものである。当協会には実験に関わる全ての経費を負担していただいた。さらに、講座の広報や実施要項の作成など、当協会の事務局に全面的に支援していただいた。講座の終了に当たり、厚くお礼を申し述べます。なお、参加した生徒と高等学校の引率の先生方、TA として実験の補助指導をしていただいた鹿児島大学大学院理工学研究科の学生にも謝意を表します。

参考文献

- [1] 中央教育審議会「学習指導要領の改善及び必要な方策等（答申・197 号）」（平成 28 年 12 月）145-150
- [2] 文部科学省「高等学校学習指導要領解説（理科編）」（平成 30 年 7 月）27-30, 37-39
- [3] 濱崎貢『力学的エネルギーの保存』鹿児島大学・理科教材研究法I
- [4] 啓林館「物理基礎」高等学校教科書（平成 23 年）90-98
- [5] 数研出版「物理 I」高等学校教科書（平成 18 年）93-98
- [6] 山本逸郎「斜面を転がる球の衝突実験の物理学的考察」弘前大学教育学部紀要 第 94 号（2015 年 10 月）19-23
- [7] 原康夫「物理学基礎（学術図書）」（2016 年 10 月）100-103
- [8] かごしま企業家交流協会「産学連携「高大接続講座」（平成 30 年）