Bulletin of the Educational Research and Development, Faculty of Education, Kagoshima University
2022, Vol.31, 21-30

論文

高等学校出張講義の題材

磯川幸直［鹿児島大学教育学系（数学教育）］
濱田和哉［鹿 児 島 県 立 出 水 高 等 学 校］

Topics of Visiting Lectures Given at Senior High Schools

ISOKAWA Yukinao and HAMADA Kazuya

キーワード：良い問題、問題を解く、精要算法、数学教育

1. はじめに

筆者の一人はこれまで度々高等学校で出張講義を行ってきた．この経験から分かったことは，高校生に数学を勉強することの楽しさを伝える事の成否、その鍵は講義の題材の選択にあることだ．すなわち，講義の目的を達成するためには，何よりも良い問題を見つけることが重要，ということである．本論文は，出張講義に相応しい良い問題とはどのようなものであるかについて，具体的に論じる．

そもそも**問題とは何か？**この問に対する答えは，つぎの対談に見出すことが出来る（小林秀雄・岡潔『人間の建設』p.69–70）．物事を深く理解する為には，問題（すなわち良い問題）を自ら提出することから始めなければいけない．

小林　ベルグソンは若いころにこういうことを言っています。問題を出すということが一番大事なことだ。うまく出す。問題をうまく出せば即ちそれが答えだと。この考え方はたいへんおもしろいと思いましたね。いま文化の問題でも、何の問題でもいいが、物を考えている人がうまく問題を出そうとしませんね。答えばかり出そうとあせっている。

岡　問題を出そうとしないで答えだけ出そうというのは不可能ですね。

次に，**問題を解くとは何を意味するか？**答えは，つぎの文章から知ることが出来る（岡潔『紫の火花』p.46）．　この行為の意味を私たちはふだん根本的に誤解していると思う．

私は学校で教わったことは何もないように思う。そのこと以外は、つまらないことしか思い出せないが、二つだけある。一つは六年の算術の教科書の応用問題に、碁石算というのがあった。これは私自身で解けなくて、先生に教えてもらった。私は小学校の六年から中学校の入学試験を受けて落ち、一年間高等小学校へ行って、それから中学校に入ったのだが、その最初の試験のとき、鶴亀算の形を変えたものが応用問題に出ていた。これも考えたが解けなかった。この二つを除いて、それ以降、さいきんまで数学の問題で解けなかった問題は一つもない。（数学で私たちが問題を解くというのは、この意味に解釈しているのであって、教えられた問題を解くとか、教えられて

次に繰り返すとか、基本を教えられて解くというようなものは、解いたと言わないのである。解いてしまわないうちに教えられると、それはもう解けない問題になってしまう。

さて,「問題を提出し,問題を解くことにより,はじめて勉強が楽しいと感じられるようになる」,それを高校生に伝えたい．そのために出発点をどこに置いたらよいだろうか．筆者の見出した答えは，和算の問題を出発点とすることである．和算とは江戸時代の数学，明治時代に洋算が輸入される前に，日本人が開拓した独創的かつ高度な数学である．自分で解いた経験のある人しか納得してもらえないであろうが，和算の問題を解いていると，懐かしい気持ちに浸りながら問題の研究を行うことができる．

本論文では，藤田貞資の著した『精要算法』（天明元年,1781 年）下巻にある一つ講義の種（研究の出発点）に用いる.はじめに『精要算法』の意義について知るために，藤田と同門の天才数学者安島直円による跋を引用する．

久留島先生曰、凡、数学は問を設るを難しとす。術を施すは是に次ぐ。今、暦術を以て問と為すこと算題の得がたきより起れりと、信なる哉。近世算題を見るに徒に和を増し、乗を累子、題中に数乗の開方商を錯へて、容易に術を施しがたからしむ。是、所謂、算題の得がたきを困して、巧をなす者なり。是を名けて煩題と云。題意謬りなしといえども、労して功なし。或は題辞足らず、或は題辞余りありて、大に損益すべき者あり。是題辞に各定数あることを知らずして、謬りをなす者なり。是を名けて病題と云。如此の類、皆、術を施し、数を試ざるが故なり。自ら謬ることを知らざるのみにあらず。更に初学の工夫を費さしむ。又、世を惑わすのみあらず、己れも亦大に惑へる者なり。予が友藤田子、これを憂へ、これを慮て、彼売買、貸借等の算題より此方、円容術等の雑題に至るまで、理の深遠にして、術の簡なる者百余条、自ら題を設け術を施して、初学をして売買、貸借の類といえども、方円容術の類と同じく、算題となすべきことを知らしめんがため書数編を著す。書成て、予をして校訂せしむ。其書たるを見るに、繁を芟り、要を括りて、関夫子の深意奥妙悉く術中に含めり。初学ひとたび是を観て、引て、伸之類して、長之せば、題を設けて煩ならず。従て術を施し得は、自ら其妙に至らんか。因てこれが後へに書す。
于時安永八年己亥秋八月

安島直円伯規　撰

おくがきの冒頭で安島は先人久留島義太の発言を援用しながら，数学の難しさは問題を解くことよりも問を設けることにある，と言う．これは（現代の大数学者である）岡潔の言うことと全く同じである．以下に，おくがきの現代語訳を記す．ただし丸括弧の中は，本論文の筆者たちが行った補足説明である．

近年，暦術の問題が難しいことが述べられているが，その原因は算題（適切な問題）の提出が容易に得られないところにあると信じる．

近頃の算題を見ると，足し算や掛け算を何回も行い，さらに途中で開平（平方根を求めること）を何度も行い，答えを求める計算が大変に面倒である．

この原因は適切な問題を見つけることが困難であるため，ひたすら機械的な技（テクニック）のみを追い求めることになる．このような問題のことを「煩題」と言う 問題に誤りがあるわけではないが，計算が大変なだけで，分かった！という喜びが得られない．

また，問題文に述べられた条件が不足もしくは過剰という，大変に欠点のある問題もある．これは問題文に定数が含まれていることを理解できていないために誤りをおかしているのである．このような問問題を「病題」と言う．（たとえば二円が接しているという条件は，（二円の中心間の距離）－（二円の半径の和）= 0 と式で表現できるが，この条件を式で表せないので，条件が不足もしくは過剰の誤りの原因となる.）

この様な誤りはすべて，数を用いて具体的に計算しないことから起きる．自分が誤っていることをわかっていないだけでない．初学者の勉強の妨げになっている．世の中を惑わせるだけでなく，自分自身も惑いから抜け出ることができない．

私の友人である藤田くんは，この状況を憂いまた考慮して，物の売買貸借等の算術問題から，図形に円を内接させる雑問題まで，内容に深みがありかつ計算が簡単である百余題を，自ら考案し解答を計算して，初学者に売買貸借の問題から図形に円を内接させる問題までを集めて数巻の本を著した．

本が出来て，私が校正することになったのだが，問題文や術文の煩雑さを省き，解法の要点を簡潔にまとめて，関孝和の深意奥妙のすべてを解答中に含めている．だから初学者が，この本を勉強して，自ら様々な改変を試行錯誤するならば，繁雑でない問題を考案し解答する事により，数学の奥深い場所に到達できるであろう．

本論文で「種」とする問題は『精要算法問題』37 である．第 2 節では，原著よりこの問題を転載し，つぎに筆者による解答例を記す．第 3 節では，この問題から自発的に産み出される問題の幾つかを紹介する．それは，あたかも「種」が自発的に成長し，様々な実を付ける有様を連想させる．筆者は，このような自発的に成長する問題のことを，**良い問題**であると定義する．そして筆者は，良い問題の自発的な成長の様子を鑑賞できるに十分な力を養うこと，それが高校の数学教育の目標であると考える．

2. 原問題とその解答

図 1 のように，三辺形の内部に甲，乙，丙の方（正方形）が入れられた．大斜 17855 寸，中斜 14641.1 寸，小斜 7499.1 寸であるとき，甲の方の面（辺）を求めよ．

答．甲の方の面 3738 寸．

解法．大斜の冪と中斜の冪を併せて得られた数を寄位と置く（一つの変数に保存する）．ここから小斜の冪を減じて，その餘を自乗して，これを大斜の冪と中斜の冪の相乗したものの四段

（４倍）より減じる．その餘を開平して，半分にした数を再寄と置く（もう一つの変数に保存する）．再寄の３倍に寄位と小斜の冪を併せて得られた数を法と置く．寄位を２倍から小斜の冪を減じた餘を開平する．それに再寄を乗じて，これを法で除す．こうして，甲の方の面を得ることができる．

甲，乙，丙の方の面を $x, y, z,$ 大斜，中斜，小斜を c, b, a と書くとき，つぎのように計算している．

1．寄位：$= c^2 + b^2$

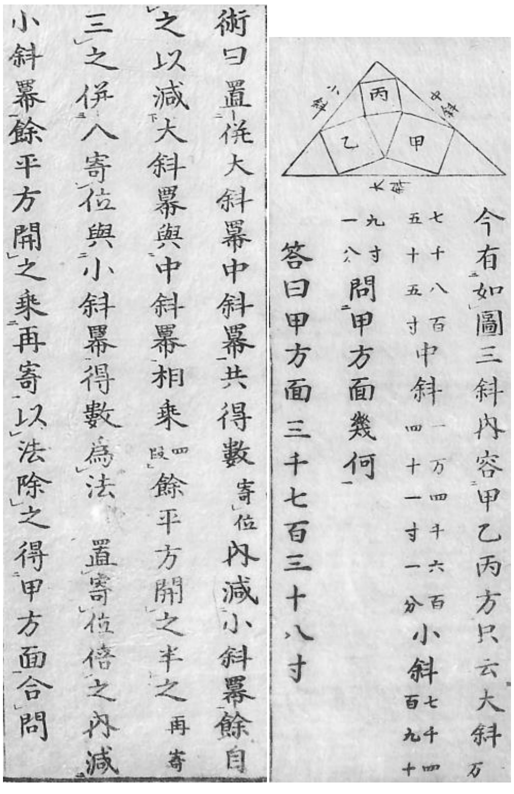
2．再寄：$= \sqrt{4c^2b^2 - \left(寄位 - a^2\right)^2} \div 2$

3．法：$=$ 再寄×3＋寄位＋a^2

4．最後に $\sqrt{寄位 \times 2 - a^2} \times 再寄 \div 法$

△ＡＢＣの中央にできる三辺が x, y, z の三角形をＰＱＲとする．辺ＡＢ上にある正方形 x の頂点をＫ，正方形 y の頂点をＫ′ として，ＫＫ′ ＝ ζ と置く．同様に、辺ＡＣ上にある正方形 x の頂点をＬ，正方形 z の頂点をＬ′ として，ＬＬ′ ＝ η と置き，辺ＢＣ上にある正方形 y の頂点をM，正方形 z の頂点をM′ として，MM′ ＝ ξ と置く．

△ＰＫＫ′ において頂点Ｐから辺ＫＫ′ に下ろした垂線の長さを k とし，△ＱＬＬ′ において頂点Ｑから辺ＬＬ′ に下ろした垂線の長さを l とする，さらに，正方形ＫＬＱＰの辺ＫＬに頂点Ａから垂線ＡＨを下ろし，ＡH= h と置く


今有如圖三斜内容甲乙丙方只云大斜一万七千八百五十五寸中斜一万四千六百四十一寸一分小斜七千四百九十九寸一分問甲方面幾何

答曰甲方面三千七百三十八寸

術曰置倂大斜冪中斜冪共得數寄位内減小斜冪餘自之以減大斜冪與中斜冪相乘四段餘平方開之半之再寄三之倂入寄位與小斜冪得數爲法置寄位倍之内減小斜冪餘平方開之乘再寄以法除之得甲方面合問

図１　原本に描かれている図

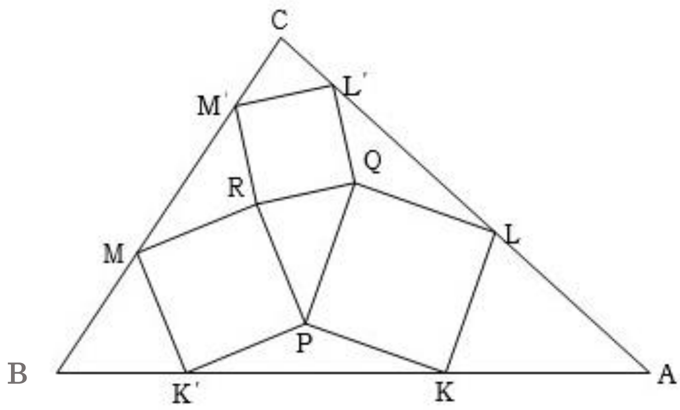


図２　解法を説明するための図

第一段

はじめに△ＰＱＲにおいて，辺xと辺yの間の角度をθと置くと，ＣＯＳ定理より$\cos\theta = (x^2 + y^2 - z^2)/(2xy)$ である．△ＰＫＫ′ において，∠ＫＰＫ′ ＝ 180° −θであるから，

$$\zeta^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos(180° - \theta) = x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta = 2x^2 + 2y^2 - \mathcal{Z}^2$$

となる．

そこで$\angle PKK' = \varphi$ と置くと、

$$\cos\varphi = \frac{\zeta^2 + x^2 - y^2}{2\zeta x} = \frac{3x^2 + y^2 - z^2}{2\zeta x} \quad (1)$$

である.また$\sin\varphi = K/x$ であるから、

$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{2\kappa\zeta}{3x^2 + y^2 - z^2} \quad (2)$$

となる．

そこで、三角形を PQR の面積をΔと置くと、$2\Delta = \kappa\zeta$ であるから、

$$\tan\varphi = \frac{4\Delta}{3x^2 + y^2 - z^2}$$

が導かれる.同様に$\angle QLL' = \psi$ と置くと、

$$\tan\psi = \frac{4\Delta}{3x^2 + z^2 - y^2}$$

が得られる．

ここで、次の重要な事実に着目する：垂線 AH と正方形の辺 KP、LQ は平行である.このことより、$\angle KAH = \varphi$、$\angle LAH = \psi$ がわかる.だから

$$\hbar\tan\varphi + \hbar\tan\psi = HK + HL = KL = x$$

となる.ここに（１）、（２）を代入する．

$$\frac{x}{\hbar} = \tan\varphi + \tan\psi = \frac{4\Delta}{3x^2 + y^2 - z^2} + \frac{4\Delta}{3x^2 + z^2 - y^2}$$

$$= 4\Delta\cdot\frac{(3x^2+y^2-z^2)+(3x^2+z^2-y^2)}{(3x^2+y^2-z^2)(3x^2+z^2-y^2)} = 4\Delta\cdot\frac{6x^2}{3x^2+y^2-z^2}$$

したがって

$$\hbar = \frac{(3x^2 + y^2 - z^2)(3x^2 + z^2 - y^2)}{24x\Delta} \quad (3)$$

を得る．

（３）を用いると，

$$AK = \frac{\hbar}{\cos\varphi} = \frac{(3x^2 + y^2 - z^2)(3x^2 + z^2 - y^2)}{24\Delta}\cdot\frac{2\zeta x}{3x^2 + y^2 - z^2} = \frac{\varsigma(3x^2 + z^2 - y^2)}{12\Delta}$$

がわかる.この式でx, yを交換して，

$$BK' = \frac{\varsigma(3y^3 + z^2 - x^2)}{12\Delta}$$

がわかる.ところが$KK' + AK + BK' = c$であるから,したがって

$$\zeta\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{6\,\Delta} + 1\right) = c$$

を得る.

第二段　以上のようにして,次の連立方程式を得る：

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{6\Delta} + 1 = \frac{a}{\xi} = \frac{b}{\eta} = \frac{c}{\zeta} \qquad (４)$$

$$\xi^2 = 2y^2 + 2z^2 - x^2,\ \eta^2 = 2z^2 + 2x^2 - y^2,\ \zeta^2 = 2x^2 + 2y^2 - z^2 \qquad (５)$$

この連立方程式を解く.

まず

$$\frac{2y^2 + 2z^2 - x^2}{a^2} = \frac{2z^2 + 2x^2 - y^2}{b^2} = \frac{2x^2 + 2y^2 - z^2}{c^2}$$

わかる.この共通の値をt^2と置いてみる.すると

$$\begin{cases} 2y^2 + 2z^2 - x^2 = a^2t^2 \\ 2z^2 + 2x^2 - y^2 = b^2t^2 \\ 2x^2 + 2y^2 - z^2 = c^2t^2 \end{cases}$$

となる.これより

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}t^2$$

となるから，まず

$$x^2 = (-a^2 + 2b^2 + 2c^2)\frac{t^2}{9},\ y^2 = (2a^2 - b^2 + 2c^2)\frac{t^2}{9},\ z^2 = (2a^2 + 2b^2 - c^2)\frac{t^2}{9} \qquad (６)$$

tの定義より

$$\xi = at,\ \eta = bt,\ \zeta = ct$$

である.（４）より

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{6\Delta} + 1 = \frac{c}{\varsigma} = \frac{1}{t}\cdot$$

これより

$$\Delta = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{18}\frac{t^3}{1 - t}$$

が導かれる.

ここで Heron の公式を利用する

$$\Delta = \sqrt{s(s - x)(s - y)(s - c)}$$

ただし$s = (x + y + z)\,/\,2$である.これは

$$\Delta^2 = \frac{1}{16}(-x^4 - y^4 - z^4 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2 + 2x^2y^2)$$

とも表される.ここに（６）を代入する.すると

$$\Delta^2 = \frac{1}{144}(-a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2)t^4$$

となる.三角形ABCの面積をSで表すことにして，再度，Heron の公式を用いると

$\Delta^2 = \frac{1}{9}S^2t^4$，すなわち$\Delta = \frac{1}{3}St^2$

である.

だから

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{18}\frac{t^3}{1-t} = \frac{1}{3}St^2$$

である.これより

$$t = \frac{6S}{6S + a^2 + b^2 + c^2} \qquad (７)$$

を得る.

3. 問題の自発的成長

本節では,『精要算法』の元の問題から，幾つかの新しい問題が現れてくる様子を記述する. この様子は，植物の種から芽が出て，成長する過程にそっくりで，自然にそうなるのである. 新奇のものをこしらえてやろう等という人間の努力は不要であり，元の問題が自発的に発展するのである.

以下の記述では，新しい問題の提示とその解だけを述べることにし，証明は省く（紙幅の都合による）.

3.1. 藤田三角形の頂点の重心座標

前節のようにして三角形ＡＢＣの内部に作った三角形ＰＱＲのことを,『精要算法』の筆者である藤田貞資にちなんで，**藤田三角形**と呼ぶことにする.

藤田三角形の頂点（の位置ベクトル）を，元の三角形の頂点（の位置ベクトル）の一次結合で表してみよう. すなわち

$$P = \lambda_{11}A + \lambda_{21}B + \lambda_{31}C,$$

$$Q = \lambda_{12}A + \lambda_{22}B + \lambda_{32}C,$$

$$R = \lambda_{13}A + \lambda_{23}B + \lambda_{33}C,$$

となるような係数$\lambda_{11}, \dots, \lambda_{33}$を求める. ただし

$$\lambda_{11} + \lambda_{21} + \lambda_{31} = 1,\ \lambda_{12} + \lambda_{22} + \lambda_{32} = 1,\ \lambda_{13} + \lambda_{23} + \lambda_{33} = 1$$

を満たすとする. 係数をまとめて行列

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{32} \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & \lambda_{33} \end{pmatrix}$$

で表すことにする.

行列Λの意味を明確にするために，各頂点を縦ベクトル

$$A=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

で表してみる. このとき

$$P=\lambda_{11}A+\lambda_{21}B+\lambda_{31}C=\begin{pmatrix}\lambda_{11}\\\lambda_{21}\\\lambda_{31}\end{pmatrix}$$

となり，Ｐは縦ベクトルで表されることがわかる. Ｑ, Ｒについても同様であるから，行列Λはこれら３つの縦ベクトルを横に並べたものである. すなわち$\Lambda=\begin{pmatrix}P\,Q\,R\end{pmatrix}$.

ここでつぎの諸量を導入しておく：

$$k=\frac{a^2+b^2+c^2}{6S} \tag{8}$$

および

$$\omega_1=\frac{a^2+3b^2-c^2}{2(a^2+b^2+c^2)},\quad \omega_2=\frac{-a^2+b^2+3c^2}{2(a^2+b^2+c^2)},\quad \omega_3=\frac{3a^2-b^2+c^2}{2(a^2+b^2+c^2)} \tag{9}$$

と置く. すると行列Λは次のように表わされる.

命題１.

$$\Lambda=\frac{1}{1+k}\begin{pmatrix}1/3 & 1/3+k(1-\omega_2) & 1/3+k\omega_3\\ 1/3+k\omega_1 & 1/3 & 1/3+k(1-\omega_3)\\ 1/3+k(1-\omega_1) & 1/3+k\omega_2 & 1/3\end{pmatrix}$$

3.2.　藤田三角形の作図可能性

考察の出発点に戻って，藤田三角形を作図できるとはそもそもどのような意味であるかを，明確にしておこう.

それぞれの正方形について，２個の頂点が元の三角形の内部にあり，１個の頂点が元の三角形の一辺上にあり, 残り１個の頂点が元の三角形の別の返上にあるとする.（たとえば正方形ＱＲＫＬでは，頂点Ｑ，Ｒは△ＡＢＣの内部にあり，頂点Ｋは辺ＡＢ上、頂点Ｌは片ＡＣ上にある.）このような場合に，藤田三角形を作図できると定義する. すると次のことがわかる.

命題２.

藤田三角形が作図可能であるためには, ω_1，ω_2，ω_3が０より大きく１より小さいことが必要十分である.

とくに，任意の鋭角三角形に対して藤田三角形が作図可能である.

3.3.　藤田三角形の形と大きさ

三角形ＡＢＣが鋭角三角形であるとき，藤田三角形ＰＱＲは鋭角三角形にも鈍角三角形にもなり

える. このように藤田三角形の形は様々であるが，藤田三角形の藤田三角形については状況は単純である.

命題３.

藤田三角形の藤田三角形は元の三角形と相似である.

次に藤田三角形の大きさについて考察する.

一般に，三角形ＡＢＣから出発して，藤田三角形の作図をｎ回繰り返して，三角形の列△$A_n B_n C_n (n = 0,1,2, \ldots)$が作られたとする. このとき

$$\nu = \frac{1}{3(1 + k^2)} \qquad （１０）$$

と置くと, 次の事が分かる.

命題４.

藤田三角形△$A_n B_n C_n$の大きさ（正確には，面積と三辺の２乗和）は指数関数ν^nに従って減少する.

3.4. 藤田三角形の列

△$A_0 B_0 C_0$の藤田三角形△$A_1 B_1 C_1$は,

$$\left(A_1\ B_1\ C_1\right) = \left(A_0\ B_0\ C_0\right)\Lambda$$

により求めることができるのであった. 同様に△$A_1 B_1 C_1$の藤田三角形△$A_2 B_2 C_2$は,

$$\left(A_2\ B_2\ C_2\right) = \left(A_1\ B_1\ C_1\right)\Lambda'$$

により求めることができる. ただし行列Λ'は，行列Λにおいて$\omega_1, \omega_2, \omega_3$のそれぞれの代わりに$1 - \omega_1, 1 - \omega_2, 1 - \omega_3$と置いたものである. したがって次を得る.

命題５.

$\tilde{\Lambda}$は, nが偶数の場合はΛ, nが奇数の場合はΛ'を表わすとして,

$$\left(A_{n+1}\ B_{n+1}\ C_{n+1}\right) = \left(A_n\ B_n\ C_n\right)\tilde{\Lambda}$$

3.5. 藤田三角形の列の極限

明らかに, 藤田三角形の列は減少列である, すなわち, すべてのnに対して$A_n B_n C_n \supset A_n B_n C_n$また, 命題４より, $n \to \infty$ のとき, △$A_n B_n C_n$の辺の長さは０に収束する. したがって△$A_n B_n C_n$自体は一点に収束する. この点を藤田点と呼ぶことにする. 以下、藤田点Ｆを具体的に求めてみよう.

nが偶数のとき,

$$\left(A_{n+2}\ B_{n+2}\ C_{n+2}\right) = \left(A_n\ B_n\ C_n\right)\Lambda\Lambda'$$

が成り立つ．そこで，行列 $M:=\Lambda\Lambda'$を具体的に求めてみる．すると

$$M=\begin{pmatrix} 1-\nu(\mu_2+\mu_3) & \nu\mu_1 & \nu\mu_1 \\ \nu\mu_2 & 1-\nu(\mu_3+\mu_1) & \nu\mu_2 \\ \nu\mu_3 & \nu\mu_3 & 1-\nu(\mu_1+\mu_2) \end{pmatrix} \qquad (11)$$

となる．ここでνは（１０）で定義された量であり，また量μ_1,μ_2,μ_3は次のように定義する：

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 1+k+k(1-\omega_2+\omega_3)+3k^2(1-\omega_2)\omega_3, \\ \mu_2 &= 1+k+k(1-\omega_3+\omega_1)+3k^2(1-\omega_3)\omega_1, \\ \mu_3 &= 1+k+k(1-\omega_1+\omega_2)+3k^2(1-\omega_1)\omega_2. \end{aligned} \qquad (12)$$

ベクトル

$$v_1=\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \mu_3\end{pmatrix},\ v_2=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\ v_3=\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$$

を定義する．このとき次の事実が成り立つ．

命題６．

M は固有値は１およびν を持ち，v_1 は固有値は１に属する固有ベクトル，v_2，v_3は固有値νに属する固有ベクトルである．

命題７．

藤田点 FのＡ，Ｂ，Ｃを基準点とした重心座標は

$$F=\frac{\nu}{1-\nu}\left(\mu_1 A+\mu_2 B+\mu_3 C\right)$$

参考文献

小林秀雄、岡潔（平成２２年）『人間の建設』新潮文庫．
岡潔（昭和３９年）『紫の火花』朝日新聞社．
田部井勝稲（令和２年）『精要算法』一粒書房
藤田貞資（天明元年）『精要算法』和算の館アーカイブ（http:/www.wasan.jp/archive.html）．