Bulletin of the Educational Research and Development, Faculty of Education, Kagoshima University
2016, Vol.25, 23-32

論 文

等分除と包含除の統合に関する実践的研究

－乗法的構造の認識に向けて－

和　田　信　哉［鹿児島大学教育学系（数学教育）］
宮　崎　憲一郎［鹿児島大学教育学部附属小学校］

A study on unification of partitive and measurement division: For the recognition of multiplicative structure

WADA Shinya・MIYAZAKI Kenichiro

キーワード：乗法的構造、等分除、包含除、逆の関係

１．はじめに

小学校第 3 学年の「除法」の学習では，等分除（例；12 個のアメを 4 人に分けます。1 人分は何個でしょうか）で導入するかそれとも包含除（12 個のアメを 4 個ずつ分けます。何人に分けられるでしょうか）で導入するかという問題があるが（杉山，2008），一般的には，等分除で導入した後に包含除を学習し，その後に両者とも同じ除法の式で表されるという観点で統合される。

しかしながら，等分除と包含除は乗法的構造の異なる見方であるにもかかわらず，このような統合の仕方は明示的にはなされない。また，乗法と除法が逆の関係にあることも明示的には学習されない。これら二つの課題は，算数と数学の乖離という重要な研究課題でもある（和田，2014）。さらに，例えば加法的構造に関しては，第 2 学年で加法と減法の相互関係の中で扱われるが，その際には直観的把握のための道具として図的表現（テープ図）が用いられる（和田，2014）。しかし，乗法的構造に関しては，第 2 学年の乗法の導入から一貫して用いられるような図的表現が見受けられないため，そのような構造の直観的把握が困難な状況であるといえよう。

そこで，本稿は，第 3 学年の除法の導入において，特に等分除と包含除の統合において，児童が乗法的構造を直観的に把握しながら乗法と除法（等分除と包含除）の相互関係を理解するような授業構成を考えることを目的とした。そのため，まず教科書分析を行うことで現在の除法の学習の課題を指摘する。次に，その課題に基づきながら授業構成の視点を明確にし，単元の構成について述べていく。そして，授業実践の実際を記述し，上記の課題に基づいて議論を行っていく。

２．教科書比較

まずはじめに，第 3 学年の除法の導入のための小単元（除法の意味の理解から等分除と包含除の統合まで）について，その課題を明確にするために，6 社から出版されている算数科教科書（平成 22 年検定済み）の該当小単元を比較する。比較の観点は，⑴等分除と包含除のどちらから導入しているか，⑵除法の計算の仕方の際の乗法の位置づけはどうなっているか，⑶等分除と包含除の統合がどのようになされているか，⑷どのような図的表現が用いられているか，という四つである。これらの観点から比較した結果，表 1 のようになった。

まず⑴の観点をみると，Ｄ社以外は等分除で除法の意味を導入して，その後に包含除を扱ってからそれらの意味を統合するという流れであった。もちろんＤ社のように，除法の意味は包含除で導入するべきであるという主張（杉山，2008）もあるけれども，教科書での扱いという現状では，等分除での導入が主流であるといえよう。

次の⑵の観点をみてみると，どの教科書も「除法の逆は乗法であり，その乗法を用いて答えを求めることができる」という趣旨の明確な記述はなかった。つまり，現状では，乗法と除法の関係性にふれることはなく，除法の答えを求めるためには乗法を用いるという程度の指導しかなされてい

表1　教科書比較の結果

	A社	B社	C社	D社	E社	F社
(1)導入	等分除→包含除	等分除→包含除	等分除→包含除	包含除→等分除	等分除→包含除	等分除→包含除
(2)乗法	□×5＝20の□に当てはまる数が答え。5の段の九九で求められる。	□×3＝24の□に当てはまる数が答え。	□×3＝15の□に当てはまる数が答え。3の段の九九で求められる。	6×□＝24の□に当てはまる数が答え。6の段の九九で求められる。	□×5＝15の□に当てはまる数が答え。5の段の九九で求められる。	□×6＝18の□に当てはまる数が答え。6の段の九九で求められる。
(3)統合	式からの問題づくり。「1人分を求めるときも何人分を求めるときも，どちらもわり算の式になる」。	式からの問題づくり。「どちらもわり算の式になる。答えは九九を使って求めることができる」。	式からの問題づくり。「わり算の答えは割る数の段の九九を使って求めることができる」。	式からの問題づくり。「どちらの問題も九九を使って求めることができる」。	式からの問題づくり。まとめとなる記述はないが，同じ式となる「8÷4＝2」が明記されている。	式からの問題づくり。「1つ分を求めるわり算といくつ分を求めるわり算がある」。
(4)図	絵，おはじき，テープ図	ブロック	絵，ブロック	おはじき，テープ図	絵，テープ図	絵，おはじき

ないといえよう。

⑶の観点をみると，すべての出版社がある除法の式から問題をつくらせることで，同じ除法の式でも等分除と包含除という異なる意味をもつというように統合することが意図されているといえよう。ただし，まとめ方に若干の相違があり，乗法で求めることができるということにまで言及する出版社が3社あるが，ここでも乗法と除法の関係性について言及する記述は見当たらない。

最後の⑷の観点をみてみると，乗法的構造を直観的に把握するために重要となるものが図的表現であるが，第2学年の加法と減法の相互関係の単元とは異なり，全出版社で統一されたものは見当たらず，場面を表す絵が多かった。したがって，どのような図的表現を用いるかということは重要な課題であるといえよう。

以上の四つの観点からの比較により，教科書教材にみられる課題として次の三つを指摘できる。

① 乗法と除法の関係が不明瞭である。

② そのため，等分除と包含除の統合の際に同じ乗法的構造の異なる見方であるという関係についても不明瞭である。

③ そのような関係を直観的に把握するための図的表現に統一的なものがない。

このような課題を克服するための授業について，その構成の視点と構想について考えていこう。

3．授業の構成

さて，前述のような教科書の構成を言語学的観点から，ここでは文（本稿では式）の意味を研究する意味論（早瀬，2012）の観点からみてみよう。はじめに等分除，そして包含除をそれぞれ学習する。つまり，同じ式で異なる場面を学習していることになるので，等分除及び包含除という「多義性」を学習していることになる。そして，それらが異なる場面であっても同じ式になると統合しているため，除法の「同義性」を学習していることになる。

しかしながら，乗法と除法の「反義性」や「同義性」は強調されていない。それまでに「求め方」としては九九を用いるということが強調されてはいるが，ここでの意味の統合の際に乗法との意味の関連は暗黙的である。3社は九九との関連でまとめる記述もあるが，あくまでも「計算」としての関連づけである。また，例えば10÷5＝□に対して，□×5＝10，5×□＝10　という記述はあり，もちろん，「1つ分」と「いくつ分」で違いを明確にはしているが，「乗法と除法は逆の操作である」ということは明示的ではない。したがって，一つの乗法の式の逆として，例えば，2×□＝10　と　□×5＝10　で関連づけるべきではないであろうか。

しかしながら，このような関連づけだと，除法

の「多義性」を認識するという本来の目的とはずれてしまうかもしれない。そこで，はじめに乗法との反義性を認識させることで除法の意味の違いを認識させ，その次に「構造」としては乗法と除法は同じであるということと，「式表示」としては同じ除法になるということを認識させるようにしたい。そのために，関係式は乗法だが求答式は除法になるいわゆる乗除の逆思考の問題を用いることにする。

また，加法と減法の相互関係のときには，それらの同義性などを直観的に把握させるために，図的表現が重要な役割を担っていた（和田，2014）。しかしながら，先に述べたように，等分除と包含除の統合の際に活用される図的表現はなく，さらにいえば乗法的構造に関する通学年的に一貫した図的表現はない。そこで，単元の導入で乗法を取り上げ，それを図的表現で表すことを学ばせる必要があると考える。乗法的構造を表す図的表現の候補がいくつか考えられるが，今回は数直線図を用いた(1)。その後，等分除と包含除それぞれの導入における具体的操作を数直線図に近い表現で表し，統合の際にそれを活用したい。

以上のような点を考慮し，授業構成の概略を述べると次の表２のようになる(2)。

表２　小単元構成の概略

時	学習内容	児童の活動及び留意点
1	乗法を図的表現で表す	九九の範囲の乗法を用い，それを数直線図に近い図的表現で表すことを学ぶ。その際，児童の考えを生かして表現を構成することを心がける。
2	等分除の導入	等分除について，具体的操作をとおして学ぶ。その 際，操作結果を数直線図的にまとめるようにする。
3	等分除の答えの求め方	等分除の答えの求め方として，九九を使えば求めることができるということを学ぶ。その際，数直線図を活用して乗法と逆の関係にあることを引き出すようにする。
4	包含除の導入	包含除について，具体的操作をとおして学ぶ。その際，操作結果を数直線図的にまとめるようにする。
5	包含除の答えの求め方	包含除の答えの求め方として，九九を使えば求めることができるということを学ぶ。その際，数直線図を活用して乗法と逆の関係にあることを引き出すようにする。
6	等分除と包含除の統合	関係式が乗法だけれども求答式が除法になる問題を考えることで，乗法，等分除，包含除の相互関係について学ぶ。その際，数直線図を活用し，関係式は同じ乗法であるが求めるところが異なる除法であることに気づかせる。
7	問題づくり（1）	除法の式から問題をつくり，その式が等分除にも包含除にもなり，どちらも除数の九九で求めることができることを学ぶ。その際，数直線図を活用して乗法との関係に気づかせる。
8	問題づくり（2）	乗法の式（4 × 6 ＝ 24）から，未知数の位置を任意に決めて問題をつくる。その際，数直線図を活用して作成された問題の相互関係に気づかせる。

４．授業の実際

ここでは，鹿児島市内の小学校の第３学年のク

ラス（男子18名，女子17名）において，2014年7月7日から7月17日に渡って筆者の一人である宮崎が実施した授業の実際を述べていく[3]。

（１）第１時

第1時は，乗法的構造の直観的把握という観点から，乗法と除法で統一的な図的表現を用いる必要があると考え，乗法を数直線図で表すことを目標とした。そのため，はじめに「Aさんは1袋に3個入ったアメを5袋持っています。Bさんは1袋に4個入ったアメを4袋持っています。どちらが多いでしょうか」という比較の場面を設定した。それに対し，「AさんとBさんはかけ算」や「Bさんの方が多いと思います」と児童は反応した。

乗法は第2学年で学習しているので，当然児童たちにとっては簡単な問題となるが，「2年生にこのお話はかけ算で，Bさんが多いんだということを図で表して教えてほしいんです」と問いかけた。この問いかけに対し，それぞれの児童が図を考えたが，大きく図1のようなドットを用いた面積図に近いものと，図2のようなドットを用いた数直線図に近いものとに分かれた。面積図的な図については，「かけ算だということはわかりやすいけど，Bさんの方が少なくみえる」という意見が出た。他方で，数直線図的な図については，「ぱっとみて多さがわかりやすいけど，かけ算にみえにくい」という意見が出た。長所と短所が逆になっているようにそれぞれの図を認識しており，乗法としては面積図的なものをモデルとしていることがわかる。

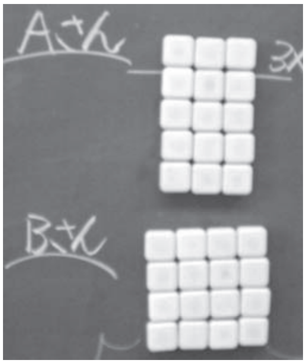

図1　面積図的な図

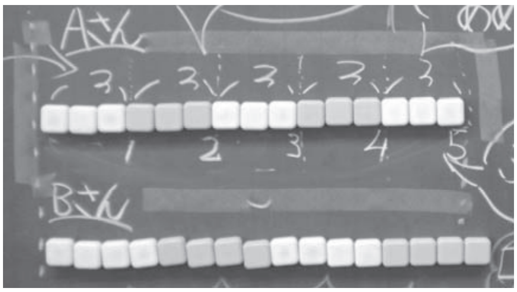

図2　数直線図的な図

「どちらが多い」という問題場面に鑑みれば数直線図の方がわかりやすいが，乗法であることがわかりにくいので，乗法であることがわかりやすいように図を変えることができないか，教師は児童たちに問いかけた。

そうすると，Aさんの「1つ分」にあたるブロックの色を変えていき，「アメの数3個」を図の上に加え，「いくつ分」にあたる「袋の数5袋」を図の下に加えることで乗法であることがわかりやすくなるという意見が出て，クラス全体でそのアイデアが共有された（図2の上の図を参照）。ただし，「いくつ分」にあたる量を図に表す際には多少時間がかかり，困難であることが垣間見えた。その後，他の乗法の問題を同様に数直線図で表した。

（２）第2時

第2時から除法の学習に入り，等分除の場面で導入した。ただし，「アメを4人で分けます。1人分は何個になるでしょうか」という「全部の数」が含まれない不確定な状況を提示することで，「配り方」に意識が向くようにした。はじめに，教師が敢えて平等ではない配り方を実演することで，「同じ数ずつ」分けなければならないということが共有された。

そのような意識が共有された後，全部の数が12個であることを提示し，具体的操作で考えることができるようにブロックを配布し，「配り方」について考えるように問いかけた。

配り方については，1個ずつ順次配っていく考えと，はじめから3個ずつ配る考えが児童から出された。しかし，後者の考えは，「3個とわかっていたらできますけど，わかってなかったらできません」と否定され，前者の配り方が共有された。その際，黒板ではブロックを用いて図3のように数直線的に表現されていた。

ここで，教師は昨日の「3 × 5」の数直線図的なものをブロックで構成し，その式を想起させてその答えを□とし，「この□はどこにかけばいい？

図3　等分除の操作後の図

もしここにかき込むとしたら」と前時では数直線図の中で明確に現れていなかった「全部の数」がどこに位置づくかを問いかけた。少し時間がかかったが，数直線図の左端から右端までの全体の数が□になるから，「いくつ分」の 5 に対応するので，その上にかき込むことがよいという考えが共有された（図 4）。

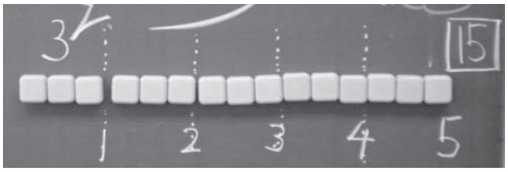

図4　全部の数が位置づいた乗法の図

この乗法に対し，今日学習している問題は除法の式「12 ÷ 4 ＝ 3」と表すことができ,「（全部の数）÷（分ける人数）＝（1 人分の数）」となることを教えた。このとき，除法の式を逆方向から，つまり右から読むと「3 × 4 ＝ 12」になっているという発言もあった。

この後に，具体的操作の観点から除法が乗法と逆の関係にあることを直観的に把握させることを意図し，除法と乗法の図を比較させ,「何か思ったこととか，気づいたことがありますか」と問いかけたところ，児童 NS が「こっち（乗法，図 4）は 3, 3, 3 のまとまりが 5, 5 個あって，こっち（除法，図 3）は 3 のまとまりが 4 個ある」と答えた。

この後，ある児童が「まとまり」ということばが共通していると発言し,「1 つ分」の意味として「まとまり」ということばが共有された。

（3）第 3 時

第 3 時は，前時で学習した等分除の答えの求め方について，乗法を用いるということだけでなく，具体的操作の観点からそれが除法と逆の関係にあることを意識させるということを意図した。前時と同様に,「ブロック○個を 3 人で同じ数ずつ分けます。1 人分は何個？」という「全部の数」が含まれない不確定な状況を提示し,「もし 1 人分の数が□個だったら，全部の数は何個？」という変数的な思考をうながした。その結果，児童たちからは「1 人分が 3 個のとき, 全部の数は 9 になる」などの乗法的な意見が出され，それを図式的にまとめた（図 5）。

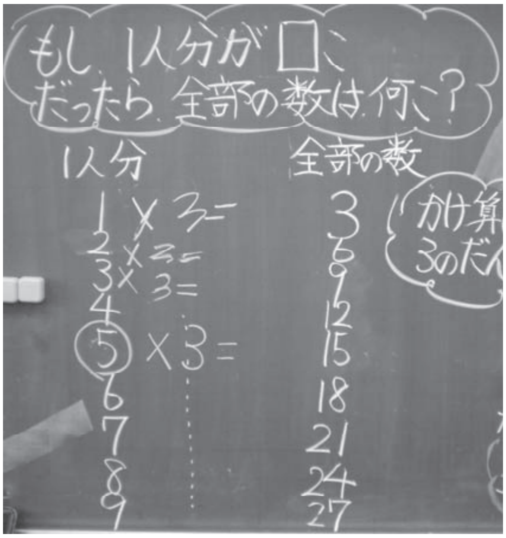

図5　変数的な思考の図式化

この図式から，児童たちは規則性を推論し,「九九の 3 の段になっている（□× 3)」と考え，この問題は全部の数が 15 であるということを教師が述べると，そうであれば 1 人分の数は 5 になるということを見いだした。

これらのことから，何か気づくことがないか児童に問いかけたところ,「分けるときには，かけ算をしてからわり算をすればいい」（児童 MY),「3 の段の答えから式ができる」（児童 KK),「1 × 3 ＝ 3 ってした答えを一番最初にもっていって÷に変えたらわり算になる」（児童 TK）という意見が出た。つまり，乗法の式を逆方向から（右から）読むと, 例えば 5 × 3 ＝ 15 であれば, 右からみると, 15, 3, 5 という数字が並ぶので,「15 ÷ 3 ＝ 5」となるという意味で，乗法と除法は「逆」であると考えた。

われわれは, 具体的な操作として「分ける」と「集める」で逆の関係にあるということに気づいてほしかったので，3 × 5 を例にして数直線図的な図

を構成し（図 6），15 ÷ 3 の図的表現（図 7）とを比較しながら「何でかけ算で答えが求められるのか，誰か説明できる人います？」と問いかけた。

図6　3×5の図

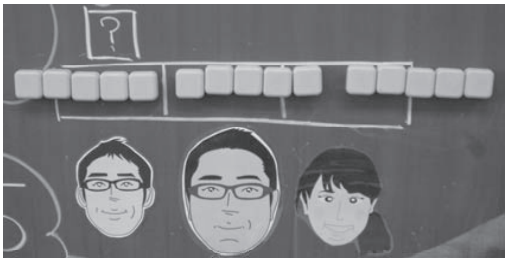

図7　15÷3の図

これに対し，児童 YO は，「かけ算とわり算は，たし算とひき算と一緒で，見直し計算（確かめ算）ができるから，かけ算で答えが出せます」と述べ，確かめ算という意味で乗法と除法は「反対」であると指摘した。これに対し，教師は「何で反対なのか」と問いかけたところ，児童 UT が先の式を読む方向という意味で反対であると述べ，また児童 HM は「3 の段で 15 の答えは何の数かっていうこと」と答えの求め方として反対であると述べた。このように，具体的操作の観点から逆の関係であることに気づいてほしかったが，式を読む方向や確かめ算，答えの求め方という式の操作の観点で逆であると児童たちはとらえていた。

（4）第 4 時

第 4 時は，「お菓子が 12 個あります。1 人に 4 個ずつ分けます。何人に分けられるでしょうか」という問題により，包含除の導入を行った。はじめに，等分除とは場面が異なることを確認し，何人に分けられるかをどのように考えればよいか問いかけた。

次に，2 人の児童が黒板でブロックを操作し，3 人に分けることができることを確認した。そして，その後に式で表すと何算になるかを問いかけたところ，半数以上の児童が除法になると答えた。その理由については，「まとまりにばらすから」と「分けているから」という具体的操作によるものであったが，等分除のときとは求めるものが異なることが指摘され，それを数直線図によって確認した。

しかし，求めるところが図で異なる場所になることから，除法になるかどうかで少し迷いがみられた。

（5）第 5 時

包含除の答えの求め方を考えるため，「ブロック 15 個を 1 人 3 個ずつ分けます」という場面を設定した。そして，「1 人だけ分けるとしたら」と仮定したところ，「まだ残っている」，「他にもまだ渡さないと」という意見が出た。そこで，第 3 時と同様に，「もし分けられる人数が□人だったら」という変数的な思考をうながした。第 3 時とは異なり，はじめに「全部の数」を示しているので，九九の 3 の段すべては発表されず，3 × 5 までの意見が出され，それを図 8 のように図式的にまとめた。

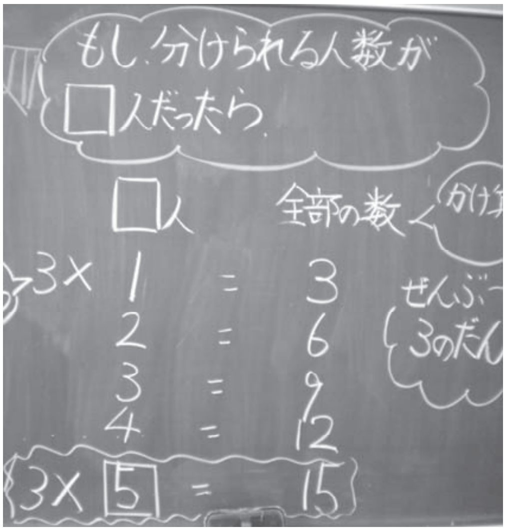

図8　変数的な思考の図式化

この図式から，児童たちは規則性として，はじめは「□× 3」という式を推論したが，乗法の意味から「3 ×□」という九九の 3 の段になっていることに修正した。そして，全部の数は 15 であるから，この問題の答えは 5 になることを確認した。このとき，第 3 時と同様に逆方向から式を読むと除法になることが指摘された。

そこで，やはり具体的操作の観点から乗法と除

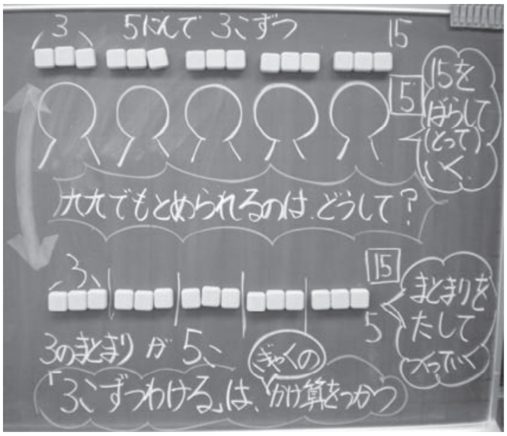

図9　除法と乗法の数直線図的な図の対比

法の関係性に気づかせようとして，15 ÷ 3 と 3 × 5 の図的表現を示し，「九九で求めることができるのはどうして？」と問いかけた（図 9）。

そうすると，第 3 時とは異なり，「わり算は 15 をまとまりにばらしていく」，「かけ算はまとまりを足してつくっていく」というように，第 2 時に出た「まとまり（1 つ分）」というアイデアに基づいた具体的操作で逆の関係にあることが理解された。つまり，この時間では，包含除は具体的操作の観点からは乗法と逆の関係にあるので，乗法を利用して包含除の答えを求めることができるというように理解できた。

（6）第 6 時

第 6 時は，等分除と包含除，そして乗法の相互関係を把握させるための時間である。問題としては，いわゆる乗除の逆思考の問題を扱った。具体的には,「1 皿に 6 個ずつかるかんが載っています。そのお皿が□皿あります。かるかんは全部で 42 個あります」というものと,「1 皿に□個ずつかるかんがあります。そのお皿が 7 皿あります。かるかんは全部で 42 個あります」という 2 題である。

はじめに前者の問題を提示し，関係式と求答式を区別するため,「何算のお話し」かを問いかけた。順思考で考えると「6 ×□＝ 42」という関係式になることを確認し，□を求めるための式は何算になるかを問いかけた。そうすると,「42 ÷ 6 ＝□」という反応が得られ，クラス全体でこの問題の場面を数直線図で表した。この後，同様に後者の問題の関係式「□× 7 ＝ 42」と求答式「42 ÷ 7 ＝□」が導かれ，その場面を数直線図で表した。どちらの問題でも，数直線図で表すときにその操作も振り返り，配り方が異なることも意識された（図 10 参照）。

最後に，この二つの問題（式と図も含む）を比べて気づくことについて考えさせた。共通点としては，どちらも乗法であるということと数直線図が同じであるということが指摘された。また，相違点として，□の場所が違うということが指摘された。

なお，共通点として乗法を挙げていたが，42 ÷ 6 の問題に対しては「6 × 7」，42 ÷ 7 の問題に対しては「7 × 6」と述べている児童が多くみられた。つまり，除法の求め方としての乗法のことを指しており，そのような意味では相違点とみなしていたといえるであろう。

（7）第 7 時・第 8 時

第 7 時のはじめは，第 6 時のまとめの時間が足りなかったので，その時間に充てた。□の場所が違うということが，結局は配り方の，求めること

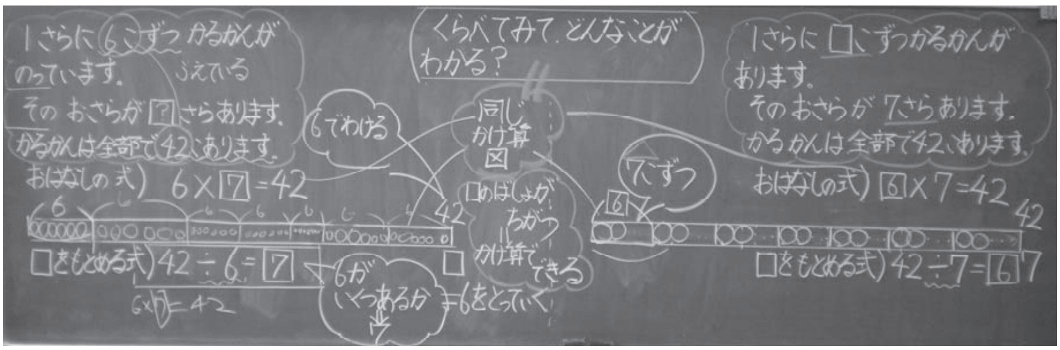

図10　第6時の板書

の違いであり，それが乗法の「1つ分」と「いくつ分」であることが確認された。

その後，式「10 ÷ 5」を示し，この式になるような問題をつくるように問いかけた。作成された問題が発表され，具体的操作を確認しながら等分除と包含除に分類された。「配り方」に着目し，同じ式だけど配り方が違い，図も異なるものになることが指摘された。

第8時は，「4 × 6 ＝ 24」の式から1ヶ所を未知数（□）として問題をつくるようにうながした。作成された問題の発表では，等分除の問題，包含除の逆思考の問題，等分除の逆思考の問題，乗法の問題が発表された。そして，それらから気づいたことを挙げさせたところ，「全部に□がある」，「お話しの答えが全部24」，「全部かけ算かわり算」，「式（求答式）が違っても図が同じ」という意見が出た。

実際に作成された問題の関係式をみてみると，次のようになっていた（児童数35人；有効回答人数25人）。

24 ÷ 6 ＝□…9人
24 ÷ 4 ＝□…9人
24 ÷□＝ 6…2人
4 × 6 ＝□…3人
4 ×□＝ 24…1人
6 ×□＝ 24…1人

求答式が乗法になるような問題をつくった児童は3人だけで，残りの児童は求答式が除法になる問題を作成した。また，求答式が等分除及び包含除になる児童は約同数であった。

最後にこれまでの授業の感想をかかせたところ，「図が違ったり，□の場所が違ったりいろいろな違いがある」（児童II），「私は最初はじめての問題でかけ算だなと思ったけど，わり算でびっくりした」（児童KK），「かけ算とわり算は仲間だな」（児童MY），「これまでの8時間で，「わり算がかけ算の逆」ということをはじめて知った」（児童NT）というような感想があった。

5．議論

ここでは，教科書教材にみられた三つの課題を中心に，授業の実際に基づきながら議論していく。

（1）乗法と除法の関係

一つ目の課題は，乗法と除法の関係が不明瞭であるということであった。そのため，第2時から第5時まで，常に除法の図的表現と乗法の図的表現を具体的操作とともに提示し，具体的操作の観点から逆の関係にあることに気づかせようとした。

第2時と第3時の等分除のときには，児童は具体的操作の観点から逆であることには気づかず，式を読む方向，確かめ算，答えを求める方法という式の操作の観点で逆になっていると考えていた。しかし，第4時と第5時の包含除のときには，具体的操作の観点から，特に「1つ分」を意識した「まとまり」に着目して「わり算はまとまりにばらす」，「かけ算はまとまりを足す」というように逆の関係にあることを理解できた。これらのことから，包含除の具体的操作によってこの観点から逆の関係にあることが，また等分除によって式の操作の観点から逆の関係にあることが理解されたといえよう。

また，第8時で作成された問題をみてみると，ほとんどの児童が「4 × 6 ＝ 24」という乗法の式から除法の問題を作成した。このことからも，乗法の「1つ分」や「いくつ分」を求めるものは除法になるという，式の観点から逆の関係を把握していることがわかる。さらに，授業後の感想にも逆の関係にあるということに言及するものがあったことから，本授業で乗法と除法が逆の関係にあるということが，具体的操作の観点からも式の操作の観点からも理解されたといえよう。

（2）等分除と包含除の関係

二つ目の課題は，等分除と包含除の統合の際に，これらが同じ乗法的構造の異なる見方であるという関係が不明瞭であるということであった。そのため，それらの統合の場面の第6時で，いわゆる乗除の逆思考の問題を扱った。

そして，求答式が等分除になるものと包含除になるものを比較した結果，関係式は同じ乗法で図的表現も同じだが，具体的操作（配り方）は異なり，□の場所が違うことが理解された。つまり，除法の逆であることが意識された乗法を媒介として，

等分除と包含除のそれぞれの操作の意味の違いが□の位置の違いにつながっていることに気づいたが，同じ乗法及び図的表現になっていることから，同じ乗法的構造の異なる見方によってそれらの違いが生じているということを直観的に把握できたといえよう。

また，第 8 時に作成した問題でも，除法の問題は等分除と包含除がそれぞれ約同数であった。このことからも，乗法の逆が除法であり，□の位置によって等分除や包含除になるということが理解されているといえよう。

（3）図的表現

上述のように，乗法的構造を直観的に把握できたことに対する図的表現の役割は大きい。これは，三つ目の課題であった。教科書では統一的な図的表現が用いられておらず，絵が用いられていることが多かったが，今回使用した数直線図は有効であることがわかった。

特に，この実践をとおして「1 つ分」としての「まとまり」ということが重要なアイデアとなっていたが，このアイデアは具体的操作から構成された数直線図によるところが大きい。第 1 時で，数直線図的な図では乗法であることがわかりにくいので，1 つ分がわかりやすいような工夫を児童たちが行っていった。それが抽象化された数直線図にも残っており，後に役立ったのであろうと思われる。

（4）残された課題

以上のように，本授業実践ははじめに挙げた三つの課題を克服できたのではないかと考える。しかし，すべてがうまくいったとは言い難い。

一つは，具体的操作の観点から逆の関係にあるということがはじめに理解されなかったことである。いうまでもなく，包含除の方が具体的に操作しやすいため，具体的操作の観点から乗法と逆の関係にあることが気づきやすかった。したがって，D 社のように包含除から導入した方がよいかもしれない。

また，二つは，児童たちのいう「逆」の意味についてである。児童たちは，等分除の段階から除法は乗法の逆であるといってはいたが，それには様々な意味があった。少なくとも，式を読む方向，確かめ算，答えを求める方法，具体的操作という意味で「逆」ということばを用いていた。乗法的構造だけでなく加法的構造にも当てはまることであるが，児童たちの乗除や加減が「逆」の関係にあるということの理解のため，これらの違いを吟味し，その理解のための道筋を明らかにする必要があろう。

三つは，図的表現についてである。本実践では数直線図を用いたが，「倍（いくつ分）」をどのように表すかで時間がかかり，児童たちは困難を示していた。他の図的表現，例えば面積図を用いても現れる困難であろうが，その意味づけをどのようにするかを考える必要があろう。

6．おわりに

本稿は，第 3 学年の除法の導入において，特に等分除と包含除の統合において，児童が乗法的構造を直観的に把握しながら乗法と除法（等分除と包含除）の相互関係を理解するような授業構成を考えることを目的としていた。そのため，まず教科書分析によって明らかになった除法の学習の課題に基づいて授業構成の視点を明確にし，授業実践を行った。その結果，本授業実践が有効であったことが，授業記録から明らかになった。

ただし最後に述べたように，実践的な課題もいくつか残されている。また，代数的推論の観点からの分析という理論的な課題も残されている。これらの課題に今後も取り組んでいきたい。

付記

本研究を実施するにあたり多大なるご協力をいただきました田中裕一先生，本田康幸先生，並びに児童の皆様に心より御礼申し上げます。なお，本研究は科研費（課題番号 24730744，15K04452）の助成を受けている。

註

（1）もちろん，例えば面積図を用いた授業展開も可能であるため，今後他の図的表現でもこのような授業を考えていく必要があろう。

（２）具体的操作の観点からは包含除で導入する方が望ましいかもしれないが，本稿では教科書の主流に則り等分除で導入することにした。
（３）なお，この授業は，2 台のビデオカメラで記録し，観察者（和田）のフィールドノートと児童のノートのコピーなどをあわせてトランスクリプトを作成して分析を行った。記号論的分析（和田，2014 を参照）及びグラウンデッド・セオリー・アプローチを用いた分析（木下, 2003 を参照）を行っているが，これらの観点からの分析結果の報告は他稿に譲りたい。

引用及び参考文献

木下康仁（2003），『グラウンデッド・セオリー・アプローチの実践』，弘文堂.
小山正孝・中原忠男ほか（2010），『小学算数 3 年上』，日本文教出版.
澤田利夫ほか（2010），『小学算数 3 上』，教育出版.
清水静海・船越俊介ほか（2010），『わくわく算数 3 上』，啓林館.
杉山吉茂（2008），「わり算は包含除－割合の理解の素地としてー」，『日本数学教育学会誌』，90 (2)，2-6.
橋本吉彦ほか（2010），『たのしい算数 3 上』，大日本図書.
早瀬尚子（2012），「文の意味について－意味論－」，西原哲雄編，『言語学入門』，94-121，朝倉書店.
一松信ほか（2010），『みんなと学ぶ小学校算数 3 年上』，学校図書.
藤井斉亮・飯高茂ほか（2010），『新しい算数 3 上』，東京書籍.
和田信哉（2014），「加法と減法の相互関係に関する研究－代数的推論の観点から－」，全国数学教育学会誌『数学教育学研究』，20 (2)，77-91.