

熱対流を長波長低次元空間へ射影する試み

Projection of Thermal Convection onto Long-Wavelength Low-Dimensional Space

三浦樹¹⁾・秦重史²⁾・秦浩起²⁾*

Itsuki MIURA¹⁾, Shigefumi HATA²⁾, Hiroki HATA²⁾

¹⁾ 鹿児島大学理学部物理科学科¹

¹⁾ Faculty of Science, Kagoshima University, Kagoshima 890-0065

²⁾ 鹿児島大学大学院理工学研究科理学専攻物理・宇宙プログラム

²⁾ Graduate School of Science Engineering, Kagoshima University, Kagoshima 890-0065

* 責任著者 e-mail address : hata@sci.kagoshima-u.ac.jp

Abstract: Numerical data of thermal convective dynamics obtained by OpenFOAM® software are projected onto three-dimensional space defined by the Lorenz system. The projection successfully conserves macroscopic properties of asymptotic behaviors of original dynamics such as approaches to a fixed point, limit cycle, or chaotic attractor. We also discuss perturbed dynamics of chaotic convection in this report.

Keywords: Thermal Convection, Lorenz System, Projection, Numerical Simulation, OpenFOAM®

1. はじめに

上が低温で下が高温である流体は、温度差が小さいと固体と同様に熱伝導を示すだけだが、温度差が大きくなると対流となり、さらにカオスや時空カオスである乱流となる。これは、容器中の水や空気などの加熱だけでなく、地球大気運動など広範な対象の理解の上でも重要である。そのため、20 世紀初頭の対流によるパターン形成（ベナール・セル）の発見[1,2]を筆頭に、多くの実験的、理論的、数値的研究[2,3]がなされている。

数値的研究と言っても、系の時間発展は後述する式 (1) のような非線形偏微分方程式である流体力学方程式に従うために、その数値シミュレーションには数値流体力学の専門的知識や経験が必要であった。だが、最近、連続体・流体シミュレーションのためのプラットフォームである OpenFOAM®[4]が整備され、詳細な知識はなくても数値シミュレーションを行うことができるようになった。

ところで、対流はカオス発見の舞台でもあった。数学の知見を持った気象学者である E. Lorenz は、流体の速度場と温度場を空間的にフーリエ展開し、対流パターンを表す上で最低限の 3 成分だけを取り出し、他は捨て去った常微分方程式である Lorenz 系(2)を構成し、それがカオスの発生を定性的に示すことを発見した[2,5]。これは、低次元カオスの発生前後では、無限次元の対流系に対し、少数次元の記述が有効であることを示唆している。

もちろん、Lorenz 系は、無視してもよいほど小さくはない多くのフーリエ成分を含んでおらず、対流系(1)の全てを表現できるわけではない。そのため、少数次元の記述がどの程度有効なのかという疑問が生じる。そこで本研究では、OpenFOAM®による高次元の数値シミュ

¹ 2022 年度現在、北海道大学大学院環境科学院地球圏科学専攻に所属。本論文は、鹿児島大学在学時（2021 年度）に三浦樹が行った特別研究での数値実験をもとにまとめたもの。

レーションを Lorenz が取り出した変数で構成した 3 次元空間 (以下, Lorenz の 3 次元空間) に射影すると, どのように見えるのか, 少数次元の記述が適切なのかを調べることにする。

2. 対流系と OpenFOAM®による数値シミュレーション

本研究では, 図 1 のような直方体の容器に流体を閉じ込め, 上下の面で温度差を設けた対流系を取り扱う (z 軸は鉛直上向き)。なお, このような奥行の短い系で対流が発生する時, その奥行 y 方向に一様となることから, 計算コストを下げるためもあると奥行を十分薄く ($0.01d$) とし y 依存性を取り除くことにする (これは Lorenz 系の設定とも対応する)。流体の熱膨張に対し, 圧力変化による体積変化を無視した Boussinesq 近似を用いると, 位置 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ で流体の速度 \mathbf{v} , 温度 θ の時間発展は

$$\begin{aligned} Pr^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) &= -\nabla p + \theta \boldsymbol{\lambda} + \nabla^2 \mathbf{v} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta &= Ra \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{v} + \nabla^2 \theta \end{aligned} \quad (1)$$

に従う [2,3]。ここで Pr はプラントル数, Ra はレイリー数, $\boldsymbol{\lambda}$ は鉛直下向きの単位ベクトルである。境界条件は, x, y 方向は周期的で, 上下の面で速度 $\mathbf{v} = 0$, 温度 $\theta = T_c, T_f < T_c$ である。なお, レイリー数は, 重力加速度 g , 熱膨張率 α , 容器の高さ d , 動粘性係数 η , 温度差 $\delta T = T_f - T_c$ より, $Ra = (g \alpha d^3 / \eta D_T) \delta T$ と定義される。

本研究では OpenFOAM®によって (1) の数値シミュレーションを実行する。空間 x, y, z 方向は $200 \times 100 \times 1$ の格子に, 時間刻みは $0.5[\text{s}]$ とし, 非定常熱流動解析ソルバー (buoyantBoussinesqPimpleFoam) を用いる。なお, この数値シミュレーションは, 各格子点で速度の x, z 成分と温度を持つので, 都合 60,000 次元の力学系である。

高さ $d = 0.05[\text{m}]$ ($Ra = 5.35 \times 10^3$) の場合に, (1) を数値シミュレーションしたものが図 2 である。速度場を矢印で, 温度場を色で図示しており, 確かに上昇流と下降流があり, 時計回り, 反時計回りの対流が形成されていることがわかる。なお, 指定したパラメータは表 1 にあり, $Ra = 5.35 \times 10^3$ となる。この条件では, この解は時間変動せず, また, どのような初期条件から始めても, ほぼ同じ解 (x 方向に並進させただけのものは同じ解とする) に至り, これが (1) の安定固定点であることがわかる。

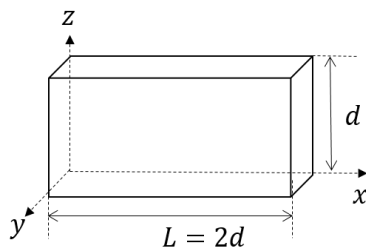


図 1 熱対流系

表 1 OpenFOAM®で指定する物性パラメータ

動粘性係数 η	$1.604 \times 10^{-5} [\text{m}^2/\text{s}]$ (空気)
体積膨張係数 α	$3.299 \times 10^{-3} [1/\text{K}]$ (空気)
プラントル数 Pr	0.7 (空気)
上面温度 T_c	300[K]
下面温度 T_f	400[K]

3. Lorenz 系

このような対流系に対し, Lorenz が得た 3 変数の常微分方程式が

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} &= -xz + rx - y \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned} \quad (2)$$

で、流体の乱れが低次元力学系の決定論的非周期運動（後にカオスと呼ばれる）から始まること、および流れの不安定性の起源を明らかにしたもので、Lorenz 系と呼ばれる。ここで x, y, z は、速度場と温度場を

$$\mathbf{v}(x, z, t) = \psi_1(t)(\pi \sin(\pi z) \sin(qx), q \cos(\pi z) \cos(qx)) + \text{高波数}, \quad q = 2\pi/L \quad (3)$$

$$\theta(x, z, t) = T_f + \Delta T z/d + \theta_1(t) \cos(\pi z) \cos(qx) + \theta_2(t) \sin(2\pi z) + \text{高波数} \quad (4)$$

とフーリエ変換した展開係数 $\psi_1(t), \theta_1(t), \theta_2(t)$ を無次元化した量で、対流の巨視的構造を取り出している[2,4]。(Lorenz 系の変数を多くの例に従い x, y, z と採ったため、空間の変数と重複している。) なお、図 1 の y 方向の一様性を仮定し、 \mathbf{v}, θ が y 依存性を持たないとしてある。また、(4) の右辺第 1, 2 項は熱伝導状態にあたり、 $\sigma = Pr, r = \{q^2/(\pi^2 + q^2)\}^3 Ra, b = (2\pi)^2/(\pi^2 + q^2)^3$ である。

一般に非線形散逸力学系のアトラクタは、パラメータに依存して変化する。このローレンツ方程式も、安定固定点、安定な周期運動であるリミットサイクルや軌道不安定な非周期運動であるカオス（図 3）を示す。

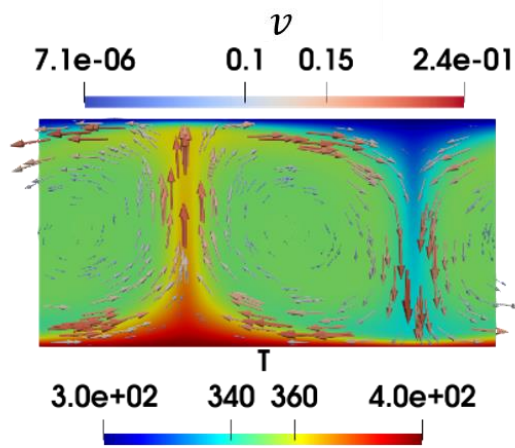


図 2 $d = 0.05[\text{m}]$ での数値シミュレーションの結果。速度場を矢印と色で温度場を色で表している。この条件では、時間的に僅かに揺らぐのみで定常対流となる。

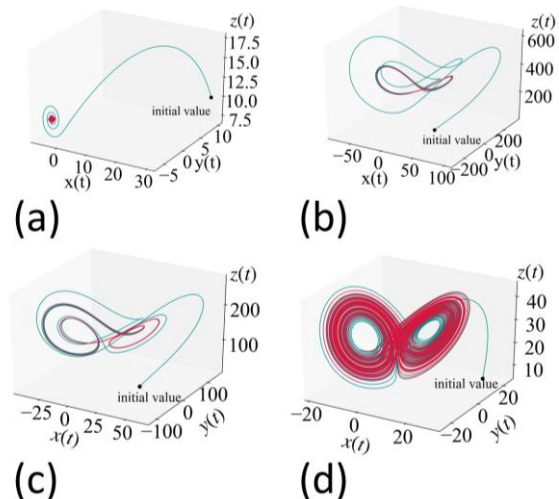


図 3 ローレンツ系(2)の軌道。初期点から出発した軌道（緑）はアトラクタ（赤）に吸引される。(a)固定点 ($r = 10$) (b)周期運動($r = 330$) (c)周期運動($r = 150$) (d)カオス($r = 28$), いずれも $\sigma = 10, b = 8/3$ 。

4. 対流の 3 次元空間への射影

2 節で述べた OpenFOAM®による対流系の数値シミュレーション結果を Lorenz の 3 次元空間に射影する。つまり、(3), (4)に倣い

$$\psi_1(t) = \iint u_z \sin\left(2\pi \frac{z}{d}\right) \cos\left(2\pi \frac{x}{L}\right) dx dz \quad (5)$$

$$\theta_1(t) = \iint T'(x, z) \sin\left(2\pi \frac{z}{d}\right) \cos\left(2\pi \frac{x}{L}\right) dx dz \quad (6)$$

$$\theta_2(t) = - \iint T'(x, z) \sin\left(4\pi \frac{z}{d}\right) dx dz \quad (7)$$

より, x, y, z を得る。但し, $T'(x, z) = T(x, z) - \Delta T z/d - T_f$ である。なお, ここでの射影とは高波長成分を捨て去ったことにあたる。

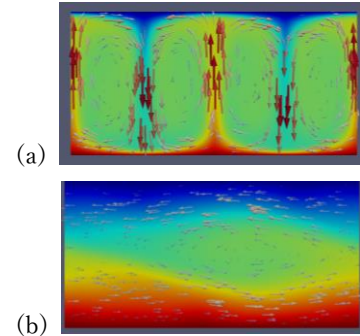
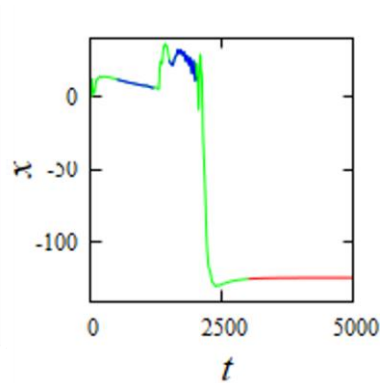
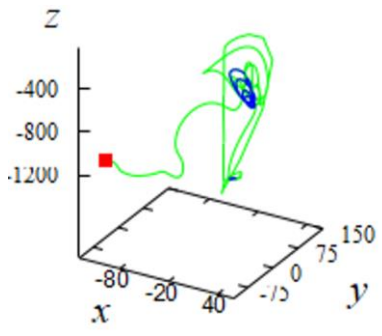


図5 図4の(a) $t = 500$, (b) $t = 2000$

図4 対流系が図2に至るまでの運動を Lorenz の3次元空間に射影した での対流のスナップショット。(a)の波軌道と, その時系列 $x(t)$ 。赤色部は $t > 3000$ で, 軌道は固定点に至って 長は図2の1/2。(b)は流れが遅く, 熱る。青色部2カ所と対応する対流のスナップショットは図5にある。 伝導に近い。

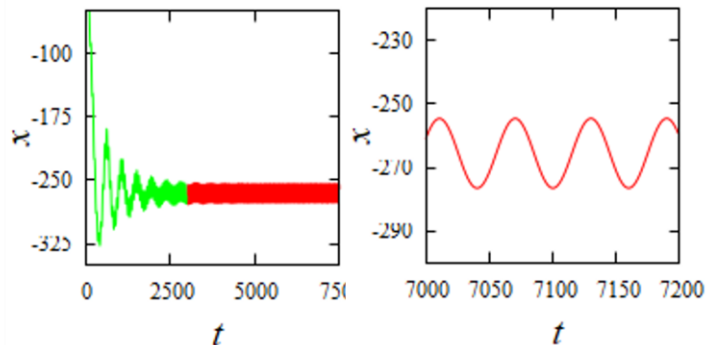
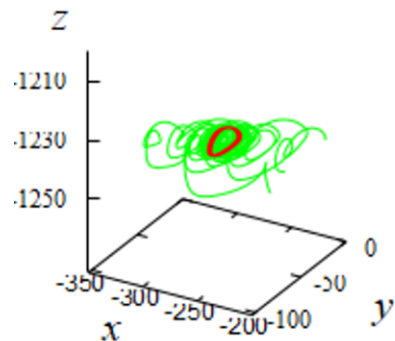


図6 $d=0.096875$ [m]の結果 (3次元空間に射影した軌道, 時系列 $x(t)$ とその拡大図)。リミットサイクル振動に至っている。

4-1. 対流の3次元空間への射影

これを用いて, 対流系シミュレーションを見ていこう。まず, 初期状態から図2の定常対流へ至る変動を Lorenz の3次元空間へ射影したものが図4である。当然のことだが, 固定点 (赤い点) に至る軌道となっている。また, 初期点からの過渡軌道を見ると, スタート直後以外に $t = 1200, 2000$ [s]過ぎの二回の大きな変動を経て固定点に至っている。そこで, $t = 500, 2000$ での対流系のスナップショット (図5)を見ると, 初期状態から, 最初に定常対流 (図2)の半分の波長の対流構造を形成し, 次に熱伝導状態に近い弱い対流となり, 定常対流に至っていることがわかる。

次に, 対流系の数値シミュレーションが, Lorenz の3次元空間においてリミットサイクルやカオスに対応する運動を示すかを探索する。その結果, 高さ $d = 0.096875$ [m] ($Ra = 3.89 \times 10^4$) 付近では, ほぼリミットサイクル軌道を描き (図6), $d = 0.2$ [m] ($Ra = 3.42 \times 10^5$) では, 非周期運動すなわちカオス軌道を描く (図7) ことがわかる。

また, アトラクタの形状を見ると, 図6は図3(b)と同様に輪状であるが, 図7はカオスと

いっても図 3(d)とは全く異なっている。これは、対流系のカオス運動が、対流の構造を変形させつつ水平にカオス的変動をするのに対し、図 3(d)は対流の回転方向（時計回り、反時計回り）も変わるカオス的変動となっているからである。なお、調べた範囲内では、図 3 (d) に対応するような軌道は見いだせなかった。ここで、対流系のスナップショットも見ておくと、カオスでは少し対流構造が変形するものの大きな違いは見られない。

なお、リミットサイクルとカオスの間である高さ $d = 0.1$ [m] ($Ra = 3.89 \times 10^4$) 付近では、図 8 のようにアトラクタがトーラスとなる準周期運動を描く。これは Lorenz 系(4)では見られない運動である。

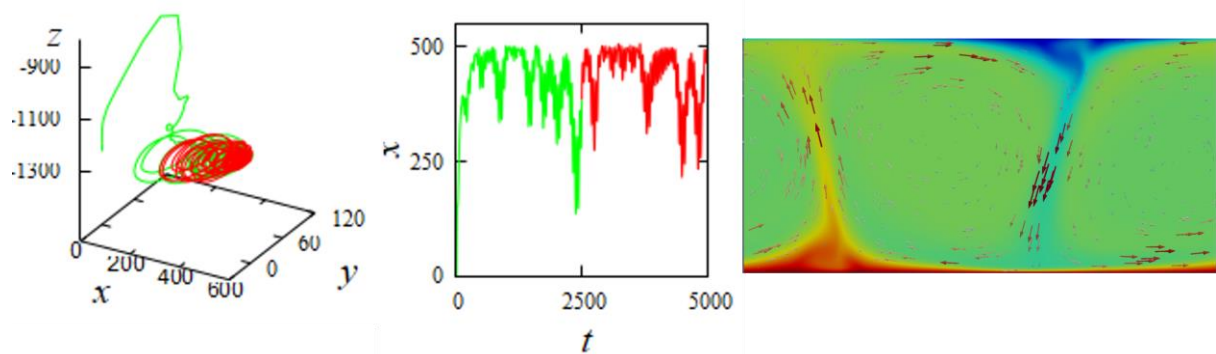


図 7 $d=0.2$ [m]の結果（3次元空間に射影した軌道，時系列 $x(t)$ ，スナップショット）。対流は Lorenz の 3 次元空間でカオスアトラクタに至っている。スナップショットを見ると，対流構造は少し変形しているが，図 2 と大きな違いはない。

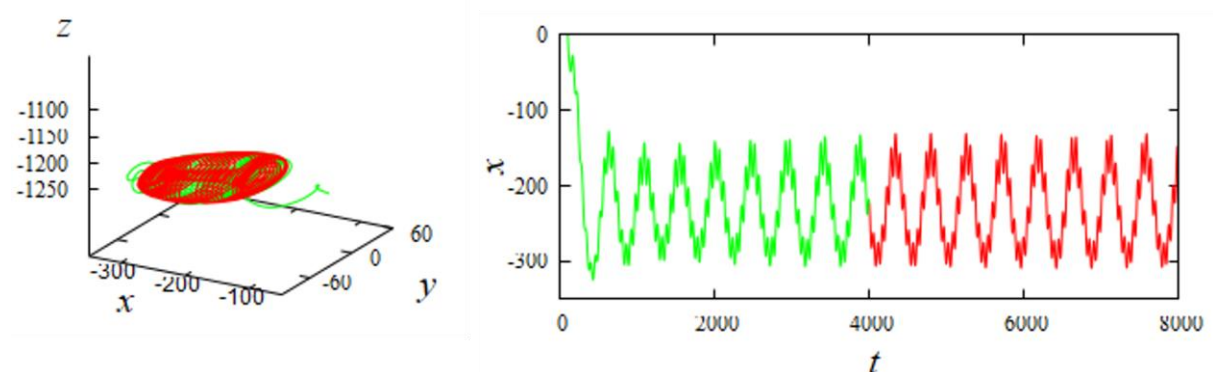


図 8 $d=0.1$ [m]の結果（3次元プロット，時系列 $x(t)$ ）。対流は Lorenz の 3 次元空間でトーラス（アトラクタ）に至っている。これは，無理比の関係にある二つの振動数を持つ準周期運動である。

4-2. 摂動の時間発展

アトラクタ上の軌道の特徴として重要なものに，軌道の不安定性（安定性）がある。これは，元の非摂動軌道 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ に対し，僅かにずらした摂動軌道 $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ がどのように離れていく（戻ってくる）かを捉えるもので，軌道間距離 $d(t) = \sqrt{|\mathbf{r}'(t) - \mathbf{r}(t)|^2}$ の指数成長率 λ ， $d(t) \sim \exp(\lambda t)$ として定量化される（ここで t は摂動を入れた時刻を 0 とする）。固定点やリミットサイクル振動では $\lambda < 0$ で軌道安定，カオスでは $\lambda > 0$ で軌道不安定である。

そこで，図 7 の数値シミュレーションにおいて，初期状態から十分な時間が経過し，アト

ラクタ上を運動していると考えられる時刻 $t=15000[s]$ について、温度場のみに、格子サイズ 5×5 の小領域に中心からの距離 r に応じて $\exp(-r^2/2)[K]$ の摂動を与え、その後の数値シミュレーションから得られる摂動軌道と非摂動軌道との距離 $d(t)$ を Lorenz の 3 次元空間で測定した。なお、この摂動を与えた領域は全領域の 0.125% 程度と局在しており、1[K] も 1% 程度と微小なものである。

リミットサイクル振動 ($d=0.096875[m]$, 図 6), カオス ($d=0.2[m]$, 図 7) それぞれの結果が図 9 (a), (b) である。(a) のリミットサイクル振動では、2 軌道の距離が指数関数的に減衰し、摂動軌道が元の軌道に戻る様子が捉えられている。また、(b) のカオスでは、2 軌道の距離は指数関数的に増大し、元の軌道とは全く異なる軌道となる様子が捉えられている。

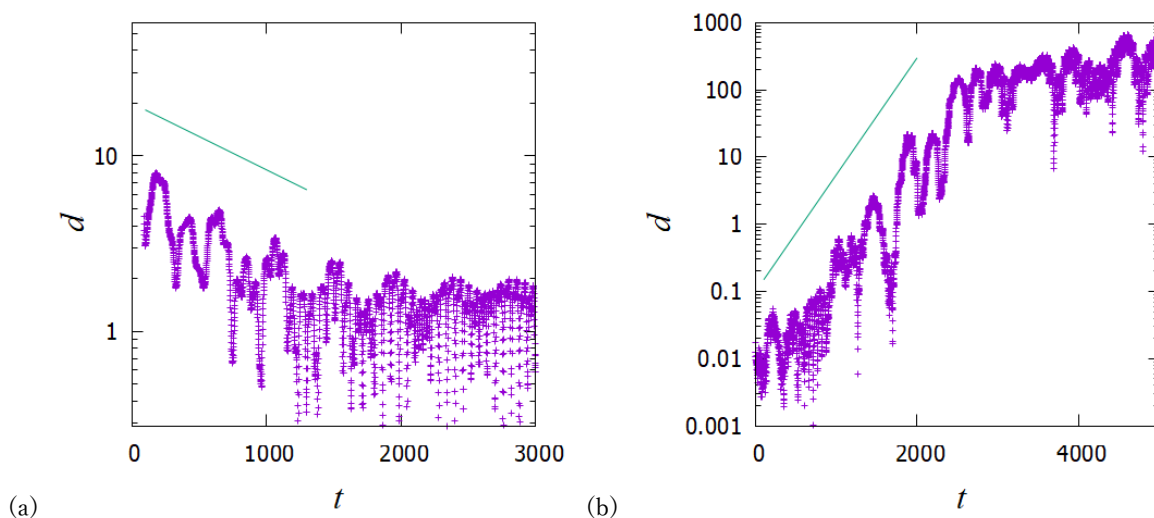


図9 オリジナルの軌道と微小摂動を与えた軌道間の距離の時間変化。(a)リミットサイクル振動 (図 6), (b)カオス (図 7)。図中に描いた直線の傾きは各々 $-7/8000$ と $1/250$ 。

5. まとめと展望

本論文は、流体力学方程式から僅か 3 個の長波長成分以外を捨て去って構成した Lorenz 系が、定常対流から乱流発生にあたるカオスの発生をある程度記述できることに着目し、OpenFOAM®を用いた対流系の数値シミュレーション (60,000 次元) の結果を Lorenz の 3 次元空間に射影して、対流運動がどのように見えるかを調べたものである。本来、60,000 次元の運動を 3 次元に縮約しているのであるから、捨て去った短波長成分の影響で軌道はぼやけるはずであるが、3 次元空間での軌道はかなり明瞭で、アトラクタも明確にとらえられた。これより、調べた領域では対流系の運動が十分に低次元化されていると考えられる。

一方、カオスは Lorenz 系のように対流の回転方向までもが変化するものではなく、水平方向に揺らぐものが見いだされた (図 7)。他にも Lorenz 系に見られない準周期運動も存在した (図 8)。これらは、Lorenz 系に収まらない短波長成分からの寄与に由来すると予想される。これより、Lorenz の 3 次元空間での軌道は、支配する決定論的運動方程式と短波長成分由来の揺らぎという形で表しうる可能性があると言える。それを流体力学方程式(1)から、どのように得るかは、流体乱流のクロージャー問題の極端なものとも言え、魅惑的だが難しいものである [3,6]。

図 4 の固定点に至る軌道では、定性的に大きく異なる対流状態を見出すことができた。つまり、数値シミュレーション結果を Lorenz の 3 次元空間に射影することが、高次元の運動の巨視的变化を的確に捉える上で有用である可能性がある。これは、アトラクタについても同様で、時間変動する高次元データを Lorenz の 3 次元空間に射影することで、運動状態を簡便

に同定できる可能性を示唆している。

一般に、軌道の（不）安定性指数を高次元データから得ると、短波長成分の（不）安定性も捉えられ、巨視的（不）安定性をとらえるのが困難とな場合がある。図9の結果は、一旦、Lorenz の3次元空間に射影した軌道の（不）安定性を見ることで、巨視的（不）安定性を容易に取り出せる可能性を示唆する。ただし、この不安定性が真の60,000次元の力学系の不安定性のどれに対応しているのかは、今のところわからない。

以上の成果は、定量的評価が不十分であることに加え、実験例も少なく、常にうまくいくかはわからない（当然、短波長成分からの揺らぎが大きいと困難と考えられる）。また、本研究は、図1の容器中で対流が形成されて弱く乱れる場面に焦点を絞ったもので、乱流が強くなり短波長成分が優位になった場合は有効ではない。また、強い乱流でなくとも、容器の形状や境界条件が異なる一般の場合では、有効な低次元空間を見出すことができないという問題もある。これらは、上記の幾つかの可能性を明らかにすることに加え、今後の課題である。

なお、対流は、地球大気の運動の基本的運動で、流体の数値シミュレーションは気象の研究や予報の上で重要である。今回調べたような方法論を基盤として、低次元空間への射影が地球大気の統計的振る舞い（平均的、長期的振る舞い）を理解するうえで有用な道具となる可能性もある。

参考文献

- [1] H. Bénard, “Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquid”. *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées*, Vol.11(1900), 1261, 1309.
- [2] P. Berge, Y. Pomeau, C. Vidal, “Order within Chaos”, Wiley-VCH(1987); 訳書 “カオスの中の秩序”, 産業図書(1992).
- [3] P. A. Davidson, “乱流”, 森北出版(2016); 巽 友正, 「流体力学」, 培風館(1982).
- [4] 一般社団法人オープン CAE 学会, “OpenFOAM による熱移動と流れの数値解析(第2版)”, 森北出版(2021).
- [5] E. Lorenz, “Deterministic Nonperiodic Flow”, *Journal of Atmospheric Sciences*, Vol.20(1963), 130.
- [6] H. Tominaga, H. Mori, R. Ishizaki, “Memory Spectra and Lorentzian Power Spectra of the Chaotic Duffing Oscillator”, *Progress of Theoretical Physics* Vol.120(2008), 635; M.Okamura, “Closure model for homogeneous isotropic turbulence in the Lagrangian specification of the flow field”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.841(2018), 521.