ローンの元利均等返済額に関する一証明

王　　鏡　凱[1]・畑　　雄　大[2]

1. はじめに

本論文は住宅ローンなどに実務でよく使われるローンの元利均等返済額について一つの証明方法を提示する。元利均等返済とは、ローンの元本と利息の合計額が返済期間内で均等となる返済方法のことであり，住宅ローンや有利子の奨学金などに用いられる。

ローンの元利均等返済額の証明方法について筆者たちが調べる限り，返済期間内ローンの元利均等返済額 (X) について DCF 法 (Discounted Cash Flow method) という等比数列の和の公式を適用することで求められるのは現状である。元利均等返済の方法について DCF 法を使った説明がなされるテキストとしては，朝岡，砂川，岡田（2022）およびリチャード・ブリーリー，スチュワート・マイヤーズ，フランクリン・アレン（2014）をあげることができる。朝岡，砂川，岡田（2022）では，DCF 法という等比数列の和の公式を使って元利均等返済の方法について説明するだけでなく，さらに元本一括返済方法との比較も行っており，大変興味深い内容である。チャード・ブリーリー，スチュワート・マイヤーズ，フランクリン・アレン（2014）では，DCF 法という等比数列の差分法を使ってローンの元利均等返済の方法について説明しており，こちらも大変興味深い内容である。

DCF 法によるローンの元利均等返済額に関する既存の証明方法の最大のメリットは，等比数列の和の公式をストレートに適用できることである。なぜなら，等比数列の分子にあたる各期間の元利均等返済額 (X) が常に同じであり，かつ分母にあたる各期間の割引ファクター ($1/(1+r)^i$) も常に $1/(1+r)$ という等比関係が成立しており，等比数列の和の公式を適用しやすいからである。しかし，この方法のデメリットは，各期間の元利均等返済額 (X) が分かっていても，その中身である利息への返済額と元本への返済額の関係性が分からないことである。これではローンの返済が進むにつれ，各期間における利息への返済額と元本への返済額がどのように変わっていくのかを学生たちに説明するには，折角の等比数列というツールが活かしきれていないと言わざるを得ない。

既存の証明方法に対して本論文が提示する新たな証明方法では，等比数列というツールを最大限に活かすことができる。なぜなら，新たな証明方法では元利均等返済額 (X) だけでなく，任意の２期間 ($i, j=i+1$) における元本への返済額 ($X-rA_i$) と ($X-rA_j$) について，$1/(1+r)$ の等比関係が導かれることによって，各期間の元利均等返済額 (X) だけでなく，その中身である利息への返済額と元

[1] 鹿児島大学法文学部，第一著者。　E-mail: kyogaiw@leh.kagoshima-u.ac.jp
[2] 鹿児島大学理学部，第一著者同等。　E-mail: k8248321@kadai.jp

本への返済額の関係性も明示的に示すことができるからである。

本論文から主に以下の結論が得られる。①ローンの返済が進むにつれ，各期間における利息への返済額の純減分 $r(X - rA_i)$ については，前の期間の $(1 + r)$ 倍の速度で逓増していくことが分かる。②各期間においてこの利息への返済額の純減分 $r(X - rA_i)$ だけが，当該期間の元本への返済額 $(X - rA_i)$ に加わっていくことで，次の期間における元本への返済額 $(X - rA_j)$ になり，その結果として，各期間の元本への返済額が $(1 + r)$ 倍の速度で逓増していくことが分かる。③以上の結果として，各期間の利息への返済額の純減分 $r(X - rA_i)$ がちょうどその次の期間の元本への返済額の純増分 $r(X - rA_i)$ になっている。よって各期間の返済額 (X) は元本への返済額と利息への返済額を合わせた額となっており，常に同じ額 (X) であり，元利均等返済額 (X) といわれる所以である。

本論文の構成は以下の通りである。第２節では，ローンの元利均等返済額 (X) について DCF 法という等比数列の和の公式を直接適用するという既存の証明方法について示す。第３節では，ローンの元利均等返済額 (X) について DCF 法という等比数列の差分法を適用するという既存の証明方法について示す。第４節では，本論文が提示する新たな証明方法により，各期間においてローンの元本 (A) への返済額について，$1/(1 + r)$ の等比関係を導く。この等比関係の成立により，各期間の元利均等返済額 (X) だけでなく，その中身である利息への返済額と元本への返済額の関係性も明らかになる。最後に全体をまとめる。

２．DCF 法：ローンの元利均等返済額に等比数列の和の公式を適用

まず，基本構造 (r, n) を持つキャッシュフロー流列の図１を使い，DCF 法を説明する。

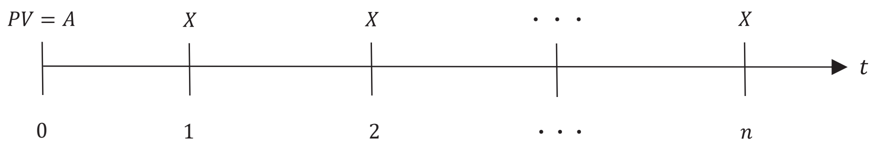

図１：基本構造 (r, n) を持つキャッシュフロー流列

図１では，返済期間が n，元本が A のローンに関する元利均等返済計画をキャッシュフロー流列の形で表現している。あるローンの投資家が期首 $(t = 0)$ において，元本 A の初期投資を行い，それを n 期間かけて各期間に同じ金額 X を回収していく。

割引率 (r) については，説明を簡潔にするために本論文では，特にこだわらない限り，金利の期間構造について所与として，債券の割引率 (r) のことを債券の最終利回りまたは満期利回り (Yield To Maturity: YTM) または債券の内部収益率 (Internal Rate of Return: IRR) とする。割引率 (r) は期間

を通して一定である。[3]

そして，以上の説明に基づき，IRR の定義に従って以下の DCF 法によるローンの現在価値を評価することができる。

$$A = \frac{X}{1+\ r} + \frac{X}{(1+\ r)^2} + \cdots + \frac{X}{(1+\ r)^n} = \frac{X}{r}\left\{1 - \frac{1}{(1+\ r)^n}\right\}$$

よって，各期間の元利均等返済額 (X) が以下のように導かれる。

$$X = \frac{rA(1+\ r)^n}{(1+\ r)^n - 1}$$

最後に，n 期間の返済なので返済総額を T とすると，以下の結果が得られる。[4]

$$T = \frac{nrA(1+\ r)^n}{(1+\ r)^n - 1}$$

3．DCF 法：ローンの元利均等返済額に等比数列の差分法を適用[5]

まず，永久債の基本構造 (r, ∞) を持つキャッシュフロー流列の図２を使い，DCF 法を説明する。

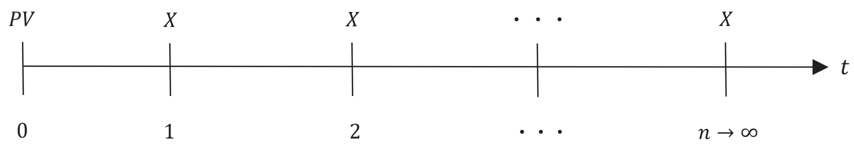

図２：永久債の基本構造 (r, ∞) を持つキャッシュフロー流列

図１との唯一の違いは期限が n から∞に変わったことである。あるローンの投資家が期首 (t = 0) において初期投資 PV を行い，それを各期間に同じ金額 X を永久に回収していく。割引率 (r) については第２節で説明した割引率 (r =YTM) と同一のものであり，期間を通して一定である。

そして，DCF 法による永久債の現在価値 PV が以下の式で表現できる。

$$PV = \frac{X}{1+\ r} + \frac{X}{(1+\ r)^2} + \cdots = \frac{X}{r}$$

3　この説明はリチャード・ブリーリー，スチュワート・マイヤーズ，フランクリン・アレン（2014),『コーポレートファイナンス』，第23章を基に筆者が加筆修正したものである。

4　Excel 表計算ソフトでは，Payment Function を使えば，所定の条件を入力するだけで元利均等返済額が計算してくれる。

5　この節の差分法の考え方についてもリチャード・ブリーリー，スチュワート・マイヤーズ，フランクリン・アレン（2014),『コーポレートファイナンス』，第３章から参照したものである。

一方，この永久債のキャッシュフローを回収するのは $(t = 1)$ 期からではなく，$(t = n+1)$ 期からなら，この永久債の現在価値 PV_{n+1} が以下のように求められる。

$$PV_{n+1} = \frac{PV}{(1+\ r)^n} = \frac{X}{r(1+\ r)^n}$$

よって，期間 n の元利均等返済ローンの現在価値 (A) は２つの等比数列の差分によって求めることができる。

$$PV - PV_{n+1} = \frac{X}{r} - \frac{X}{r(1+\ r)^n} = \frac{X}{r}\left\{1 - \frac{1}{(1+\ r)^n}\right\} = A$$

よって，各期間の元利均等返済額 (X) も第２節と同じように導かれる。

$$X = \frac{rA(1+\ r)^n}{(1+\ r)^n - 1}$$

最後に，n 期間の返済なので返済総額 (T) も第２節と同じ結果が得られる。

$$T = \frac{nrA(1+\ r)^n}{(1+\ r)^n - 1}$$

冒頭で説明した通り，DCF 法よるローンの元利均等返済額 (X) の証明方法の最大のメリットは，等比数列の和の公式をストレートに適用できることである。等比数列の分子にあたる各期間の元利均等返済額 (X) が常に同じであり，かつ分母にあたる各期間の割引ファクターも常に $1/(1+r)$ という等比関係が成立しており，等比数列の和の公式を直接適用できる。

しかし，この方法のデメリットは，各期間の元利均等返済額 (X) と返済総額 (T)，そして返済利息の総額 $(T-A)$ しか分からない。元利均等返済額 (X) の中身である利息への返済額と元本への返済額の関係性が分からないままである。これではローンの返済が進むにつれ，各期間における利息への返済額と元本への返済額が具体的にどのように変わっていくのかについては明らかではない。次節ではこの問題を解消するために新たな証明方法を提示する。

４．各期間における元本への返済額が等比関係を導く：$(X - rA_i)/(X - rA_j) = 1/(1 + r)$

この節では本論文が提示する新たな証明方法について説明する。ここでは，第２節と全く同様の基本構造 (r, n) を持つキャッシュフロー流列について，少し形を変え図３として再掲する。

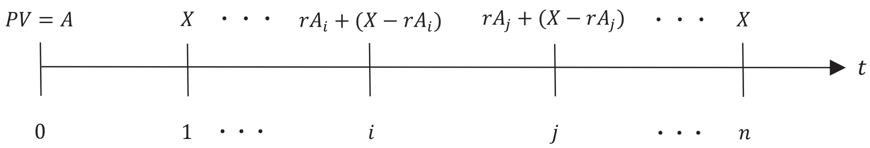

図３：基本構造 (r, n) を持つキャッシュフロー流列

図３については以下のように説明することができる。任意の期間 $i(i \in 1, 2, ..., n)$ の期首における返済残高を期首残高 A_i ($A_1 = A$, $A_{n+1} = 0$) として，期間 i において，期首残高 A_i に対する利息への返済額は rA_i になる。そして，元利均等返済額 (X) の残り部分は元本への返済額 ($X - rA_i$) になる。同様に，期間 j における元利均等返済額 (X) についても，期首残高 A_j に対する利息への返済額 rA_j と残り部分 ($X - rA_j$) は元本への返済額になる。

期首残高 A_j は，期首残高 A_i から期間 i における元本への返済額 ($X - rA_i$) を差し引いた額であるので，以下の関係式が導かれる。

$$A_j = A_i - (X - rA_i)$$

そして，上の関係式を利用して ($X - rA_j$) について以下の関係式を導くことができる。

$$X - rA_j = (1 + r)(X - rA_i)$$

最後に任意の２期間 (i, $j = i + 1$) における元本への返済額 ($X - rA_i$) と ($X - rA_j$) ついては以下の等比関係が成立する。

$$\frac{X - rA_i}{X - rA_j} = \frac{1}{(1 + r)}$$

以上の結論に基づき，各期間における元本への返済額を次の等比数列のように記述することができ，その合計額はちょうど期首残高 A になる。

$$\{(X - rA),\ (1 + r)(X - rA),\ (1 + r)^2(X - rA),\ \cdots,\ (1 + r)^{n-1}(X - rA)\}$$

$$A = (X - rA)\sum_{i=1}^{n}(1 + r)^{i-1} = (X - rA)\frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

そして，ローンの元利均等返済額 (X) と返済総額 (T) は第２節と第３節と同じように求めることができる。

$$X = \frac{rA(1 + r)^n}{(1 + r)^n - 1}, \qquad T = nX = \frac{nrA(1 + r)^n}{(1 + r)^n - 1}$$

この新たな証明方法により，任意の２期間 $(i, j = i + 1)$ におけるローンの元本 (A) への返済額 $(X - rA_i)$ と $(X - rA_j)$ について，$1/(1 + r)$ という等比関係を導くことができた。この等比関係が成立することによって，各期間の元利均等返済額 (X) だけでなく，その中身である利息への返済額と元本への返済額の関係性も明らかになる。以上のことを示すためには，期間 (i, j, k) における利息への返済額について，２本の差分式を記述することによって明らかになる。

$$rA_i - rA_j = r(X - rA_i)$$

$$rA_j - rA_k = r\left(X - rA_j\right) = r\{X - rA_i + r(X - rA_i)\} = r(1 + r)(X - rA_i)$$

以上から主に以下の結論が得られる。①ローンの返済が進むにつれ，各期間における利息への返済額の純減分 $r\,(X - rA_i)$ については，前の期間の $(1 + r)$ 倍の速度で逓増していくことが分かる。

②各期間においてこの利息への返済額の純減分 $r(X - rA_i)$ だけが，当該期間の元本への返済額 $(X - rA_i)$ に加わっていくことで，次の期間における元本への返済額 $(X - rA_j)$ になり，その結果として，各期間の元本への返済額が $(1 + r)$ 倍の速度で逓増していくことが分かる。

$$\left(X - rA_j\right) = r(X - rA_i) + (X - rA_i) = (1 + r)(X - rA_i)$$

③以上の結果として，各期間の利息への返済額の純減分 $r(X - rA_i)$ がちょうどその次の期間の元本への返済額の純増分 $r(X - rA_i)$ になっている。よって各期間の元利均等返済額 (X) は元本への返済額と利息への返済額を合わせた額となっており，常に同じ額 (X) であり，元利均等返済額 (X) といわれる所以である。

５．まとめ

本論文はローンの元利均等返済額について一つの証明方法を提示した。この新たな証明方法により，各期間の元利均等返済額 (X) の中身である利息への返済額と元本への返済額の関係性を明示することができた。

第４節で証明した通り，新たな証明方法では任意の２期間 $(i, j = i + 1)$ における元本への返済額 $(X - rA_i)$ と $(X - rA_j)$ について，$1/(1 + r)$ の等比関係が導かれることによって，各期間の元利均等返済額 (X) だけでなく，その中身である利息への返済額と元本への返済額の関係性も明らかにした。本論文から主に以下の結論が得られた。①ローンの返済が進むにつれ，各期間における利息への返済額の純減分 $r(X - rA_i)$ については，前の期間の $(1 + r)$ 倍の速度で逓増していくことが分かる。②各期間においてこの利息への返済額の純減分 $r(X - rA_i)$ だけが，当該期間の元本への返済額 $(X - rA_i)$ に加わっていくことで，次の期間における元本への返済額 $(X - rA_j)$ になり，その結果として，各期間の元本への返済額が $(1 + r)$ 倍の速度で逓増していくことが分かる。③以上の結果として，各期

間の利息への返済額の純減分 $r(X - rA_i)$ がちょうどその次の期間の元本への返済額の純増分 $r(X - rA_i)$ になっている。よって各期間の元利均等返済額 (X) は元本への返済額と利息への返済額を合わせた額となっており，常に同じ額 (X) であり，元利均等返済額 (X) といわれる所以である。

参考文献

リチャード・ブリーリー，スチュワート・マイヤーズ，フランクリン・アレン（著），藤井眞理子（訳），国枝繁樹（訳）(2014)，『コーポレートファイナンス』（上）（下），日本経済新聞社。

朝岡大輔，砂川伸幸，岡田紀子（2022)，『ゼミナール コーポレートファイナンス』，日本経済新聞社。