

正弦波による Maximum Entropy Technique の数値実験

角 田 寿 喜*

(1976年9月3日受理)

Power Spectra of Sinusoids by Maximum Entropy Technique

Toshiki KAKUTA

Abstract

Several facts are explained by numerical experiments with sinusoids, concerning the use of maximum entropy technique in the spectral analysis of a record not so long compared to its predominant period.

They are: 1) In order to estimate the predominant period with errors less than 10%, we must have a record length at least twice of the period. 2) The influence of errors in the estimation of the zero level of the time series is not always negligible. 3) The number of points of the prediction error filter must be chosen such that the mean square error is settled near a constant value at not so large number of points.

はじめに

地球物理学では、解析対象となる現象の周期に比して、相対的に長くはない記録で、周期解析をするという場面にしばしば遭遇する。地震記象の周波数解析においても、解析区間を長く取ると、異なる性質をもつ波の混入が無視できなくなるから、物理的厳密性を保つためには、解析区間は対象とする波の周期のせいぜい数倍の長さに抑えなければならない。

このような場合の解析には、普通、入力データの信号部分に、適当な幅の、適当な window をかけ、Fourier 変換をおこなう方法がとられる。しかし、信号の周期に比べて window 幅が相対的に狭ければ、分解能が悪くて希望する信号をとり出せなかったり、スペクトルに生じる frequency shift が無視できなくなるということがおこってくる。したがって、解析方法に改善をはかるか、あるいは、結果を解釈する際に方法的限界を考慮に入れることが必要になってくる。

ULRYCH (1972) は、10% の白い雑音をのせた周期1秒の正弦波について、僅か1秒の幅の window をかけた記録を maximum entropy technique により解析し、frequency shift がなく、しかも線スペクトルに近いスペクトルを得た。この結果は window 幅を 0.57 秒とした時もほとんど変わらなかったことから、彼は、この解析方法こそ、相対的に短い時系列の解析に有力な方法であるとした。これに対して、CHEN and STEGEN (1974) は、ULRYCH と同じく、白い雑音をのせた周期1秒の正弦波について解析し、maximum entropy technique によってもやはり frequency shift は起ること、そして、そのずれの大きさは正弦波の初期位相と記録の長さに依存することを示し、ULRYCH の解析は、そのうちの特殊な場合に相当すると指摘した。

* 鹿児島大学理学部地学教室

Institute of Earth Sciences, Faculty of Science, Kagoshima University, Kagoshima, Japan.

この小論では、相対的に短い時系列の解析に maximum entropy technique を使用する際の留意点を明らかにすることを目的として、CHEN and STEGEN にならい、記録の長さなどのパラメータを変えながら正弦波のスペクトルを計算し、その振舞を検討した。ただし、ここでは、理想状態での適用性をみるために、使用される正弦波に特別な雑音をのせることはしなかった。

記録の長さと初期位相の効果

maximum entropy technique では、スペクトルは次式により計算される：

$$P(f) = \frac{P_{M+1}}{2f_N} \left| 1 + \sum_{j=1}^M a_j z^j \right|^{-2} \quad (1)$$

ただし、 $z = \exp(i2\pi f \Delta t)$ 、 Δt はデータのサンプリング間隔、 $f_N = 1/2\Delta t$ は folding frequency で、 P_{M+1} は常数である。 a_j ($j=1, 2, \dots, M$) は $M+1$ 項の prediction error filter の係数で

$$\begin{pmatrix} \phi_0 & \phi_1 & \cdots & \phi_M \\ \phi_1 & \phi_0 & \cdots & \phi_{M-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_M & \phi_{M-1} & \cdots & \phi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{M+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

を満足する。 ϕ_k ($k=0, 1, \dots, M$) は自己相関関数である。

理論式の導入および具体的な計算式については、末尾の付記にまかせることにして、ここでは計算結果について述べる。

計算に使用する正弦波は

$$x_j = A \sin \left\{ \frac{2\pi}{T_0} j \Delta t + \beta \right\} \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (3)$$

とし、振幅 A は 100、周期 T_0 は 0.36 sec ($f_0 = 2.78\text{Hz}$) ととった。

まず、記録の長さと初期位相の効果調べる。Figs. 1, 2, 3 は、CHEN and STEGEN (1974) に示された図とほとんど同じものである。ただし、ここで使用した prediction error filter の項数は 11 ($M=10$) としてある。この項数の適否については、のちほど若干の検討を加えるが、計算結果からみて、ここでは妥当なようである。

Fig. 1 は、初期位相 β をゼロとして、データのサンプリング個数 N を変えた時にみられるスペクトルのピークの真の位置からのずれ、すなわち、frequency shift を示したもので、上の図が Δt を 5 msec、下の図が $\Delta t = 10$ msec とした場合を表わしている。上の図は上に、下の図は下に、それぞれの記録の長さが示してあるが、frequency shift は、データ個数よりも記録の長さに関係しており、1/4 サイクルの倍数でゼロ線を切り、記録の長さが増すと減衰振動的にずれの量は小さくなっていく。

Fig. 2 は、記録の長さを一定に保って、位相 β を変えた時の frequency shift を示している。なお、 L_0 は 1 サイクルに相当する記録の長さで、 s はデータ個数である。この図から、1/2 サイクルの倍数の長さの記録では、入力データとしての正弦波に位相変化があっても、スペクトルの最大のピークの位置には影響しないことがわかる。また、この場合は、スペクトルの形にも目立った変化は見あたらない。ULRYCH (1972) が解析した window 幅 1 秒の場合は、まさし

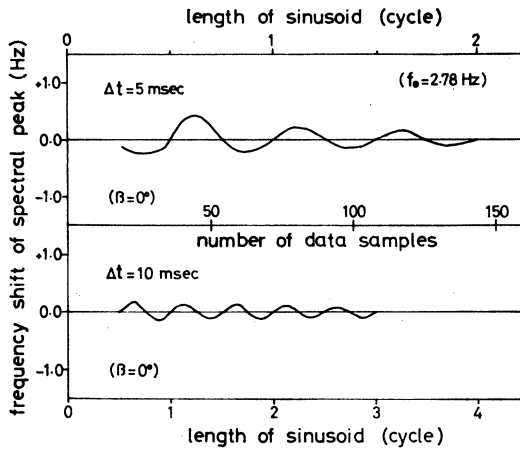


Fig. 1 Frequency shift of spectral peak for various lengths of 2.78 Hz sinusoids of zero initial phase.

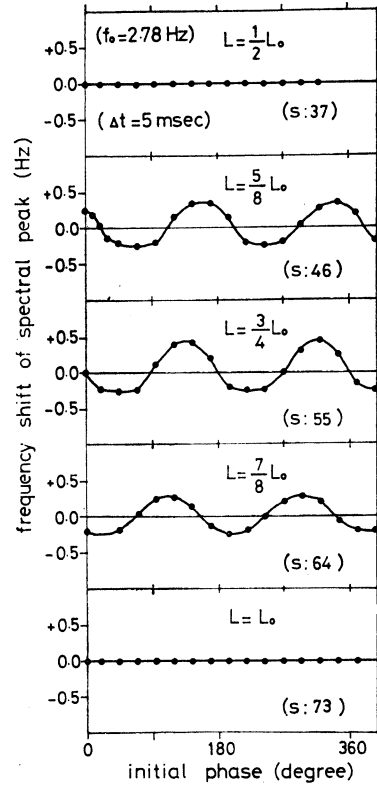


Fig. 2 Frequency shift of spectral peak as a function of initial phase. L is the record length and L_0 is the length of one cycle of a 2.78 Hz sinusoid.

く、これに相当している。

$n = 1, 2, \dots$ として、記録の長さ L を $nL_0/2 \sim (n+1)L_0/2$ の間で変化させると、 L が $(2n+1)L_0/4$ で、位相を変えたときの frequency shift が最大になる。その様子は Fig. 3 にみられるとおりであるが、Fig. 1 から推測されるように、ずれの量は、記録の長さの増加とともに減衰振動的に減少し、記録の長さが $2L_0$ を越えると、その最大値も $\pm 10\%$ の範囲におさまるようになる。

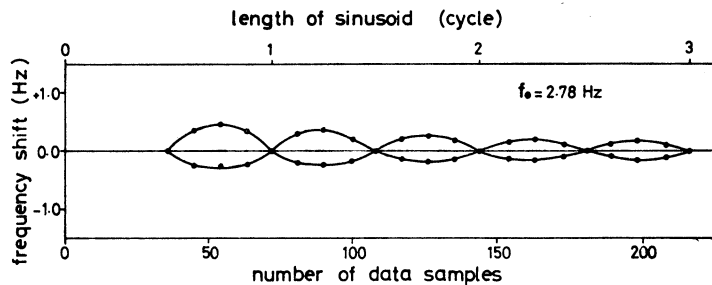


Fig. 3 Range of frequency shift as a function of the length of sinusoid.

なお、Fig. 2 および Fig. 3 をみると、正負の側で対称でないことに気づく。これは CHEN and STEGEN の図にも現われている特徴であるが、これは、フィルターの項数を固定して計算を進めたことに起因するかもしれない。

次に、記録の長さや初期位相がスペクトルの形におよぼす影響を調べてみる。Fig. 4 がその

ための図であるが、左は、初期位相 β をゼロに固定した時の、データ個数 s との関係、右は、データ個数を一定 ($s=55$, すなわち、 $L=3L_0/4$) とした時の、初期位相 β による関係を表わしている。なお、ここでは、 Δt は 5 msec とし、また、実線で真のスペクトルに相当するものを示している。いずれの図からも、ピークの位置のずれが大きくなると、スペクトルのピークも鈍化して、線スペクトルに近いとは言い難くなることがわかるであろう。

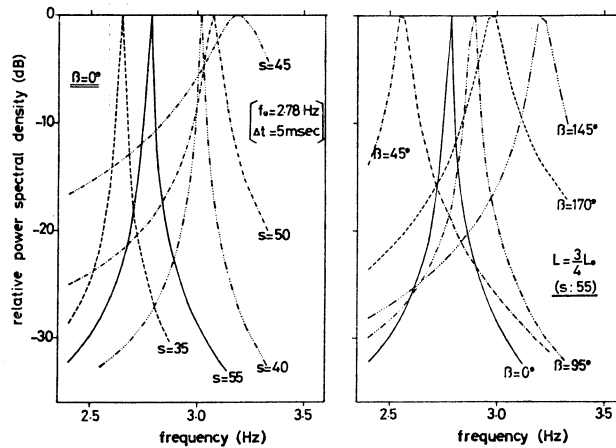


Fig. 4 Spectra for various lengths of sinusoids of zero initial phase (left) and for various initial phases of sinusoids of $3L_0/4$ length (right).

周波数のずれの大きなスペクトルでは、power density 自体も大きな値をとるようになる。これはランダムなノイズを含まない正弦波に特有のことかもしれないが、後に出てくる Fig. 7 にみるように、 P_{M+1} の減り具合の小さいことから来ている。したがって、maximum entropy technique を用いる場合は、power density の相対的な値のみでなく、最大値をもおさえておいて、値が異常ではないかを検討することも必要である。

ゼロレベルの誤差による効果

これまでの議論では、入力データのゼロレベルは既知のものとして取扱ってきた。しかし、一般には、これは未知の量であるのが普通であるから、ここでは、ゼロレベルを入力データから推定することにして、その誤差が結果におよぼす影響を考えてみよう。

x_j ($j=1, 2, \dots, N$) をゼロレベル未知の時系列とすると、これを決めるには、

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^N x_j / N \quad (4)$$

の関係を使って、 \bar{x} をこの時系列のゼロレベルとするのが、もっとも一般的である。

入力データとしては、(3) 式で与えられる時系列を使う。すなわち、この時系列の真のゼロレベルはゼロである。しかし、われわれはこのことを知らないものとし、与えられた長さの時系列について、(4) 式によりゼロレベルを決める。このようにして得られたゼロレベルを D とすると時系列 x_j は \hat{x}_j へと変換される：

$$\hat{x}_j = x_j - D \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

したがって, maximum entropy technique によるスペクトルは

$$\hat{P}(f) = \frac{\hat{P}_{M+1}}{2f_N} \left| 1 + \sum_{j=1}^M \hat{a}_j z^j \right|^{-2}$$

末尾の付記 B によれば, D があまり大きくない時には,

$$\hat{a}_j = a_j - \delta a_j \quad (j = 1, 2, \dots, M)$$

と表わされる。ただし, a_j は, ゼロレベルが正しく決められている場合の prediction error filter の係数である。この係数の誤差 δa_j は, 時系列によってはたまたまある項がゼロになることは考えられても, 一般に, $D=0$ 以外では, すべてをゼロとすることは不可能である (付記 B 参照)。

計算例として, 与えられた入力データが, $\beta=0$, $L=L_0/2$ および $3L_0/4$ の正弦波である場合を考える。これらの正弦波の振幅を 1 とし, $\Delta t=5\text{msec}$ とすると, (4) 式で計算されるゼロレベルは, $L=L_0/2$ で $D=0.62$, $L=3L_0/4$ では $D=0.20$ となる。

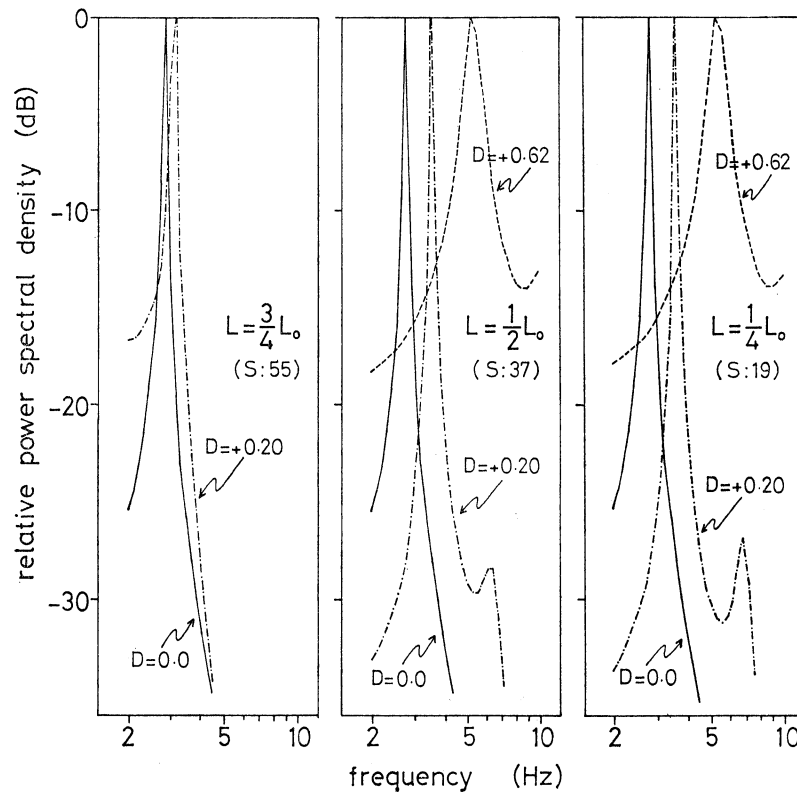


Fig. 5 Spectra for various lengths of sinusoids of zero initial phase when zero levels of the sinusoids are wrong. The solid curves of $D=0.0$ are expected spectra.

Fig. 5 には, $L=3L_0/4$, $L_0/2$ および $L_0/4$ のそれぞれについて, $D=0.0, 0.20, 0.62$ として計算されたスペクトルが示されている。ただし, prediction error filter の項数は 11 である。いずれの場合も, 実線で表わされた $D=0.0$ のスペクトルは, frequency shift は示さず, かつ, 線スペクトルに近いものとなっているが, D が大きくなると, 周波数のずれも大きくなり,

スペクトルの形も変わってくる。入力データにどれだけの直流成分がのったときに、どの程度の frequency shift が起きるかということは、データの性質、記録の長さによっても異なるので、一概には言えないが、 $L=3L_0/4$ の場合でも、 $D=0.20$ で 10% ほどの frequency shift が生じているのは、ゼロレベル推定における誤差の重要性を物語るものであろう。

一般に周波数解析では、その時系列の期待値として、 $E\{X(n)\}=0$ を仮定する。(4) 式がゼロレベルの推定に使用されるのも、この仮定があるからである。しかし、解析対象の周期に比べて、相対的に短い時系列に対してなされたこの仮定は、結果に大きな誤差をひき起こす可能性をもっている。すなわち、 $L=L_0/2$ の解析結果にみられるように、 $E\{X(n)\}=0$ という条件が成り立つよりも、ゼロレベルが正しく決められていないことの効果が、はるかに大きな影響を結果に与えるわけである。

したがって、解析すべき記録が長い記録の一部である場合には、長い記録について (4) 式を適用してゼロレベルを推定すれば、その誤差を小さくすることができる。これが不可能な場合は、解析された周期と記録の長さを比較することによって、誤差の大きさを吟味することが必要となろう。

フィルターの数

最後に、prediction error filter の項数について考えてみよう。

CHEN and STEGEN (1974) は、スペクトルの形状が妥当であるかどうかを判断の規準として、フィルターの項数を変え、それが適当かどうかを検討した。彼らは、初期位相ゼロの 1Hz の正弦波を $\Delta t=50\text{msec}$ で 24 個サンプリングし、ノイズレベル 5~160% の間で、項数を 3~24 と変化させたとき、3 項および 24 項では、いずれの場合も正常なスペクトルが得られないこと、ノイズレベルにより、適する項数が変わることを指摘した。

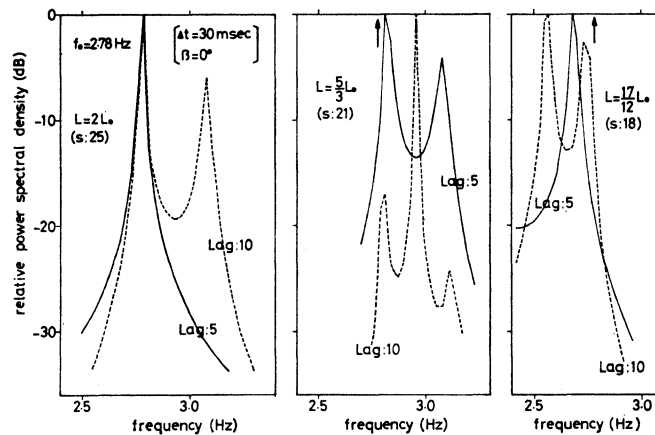


Fig. 6 Variations of spectra due to different number of points of the prediction error filter. The sampling interval is 30 msec.

Fig. 6 には、 $\Delta t=30\text{msec}$ 、 $\beta=0$ として、(3) 式で与えられる正弦波について、 M を 5 および 10 として計算されたスペクトルが示されている。左の図では、真の周波数を実線のスペクトルが示し、真中および右図では、矢印でそれを示しているが、いずれの図でも、 $M=5$ の場合の結果がまさっていることがわかるであろう。

すなわち、フィルターの項数は、多すぎても、少なすぎても良くないということが、以上の

結果から推定されよう。

このことに関して、AKAIKE (1969) は、最も適当な項数は、

$$(FPE)_M = \frac{N + M + 1}{N - M - 1} R_M \tag{5}$$

を最小にすると述べている。ただし、 R_M は出力と入力との差の平方和の平均で、

$$R_M = \sum_{j=1}^N (\hat{x}_j - x_j)^2 / N,$$

これは P_{M+1} に相当するものである。

この条件、 $(FPE)_M$ の最小が相対的に短い時系列に対して、prediction error filter の適切な項数を決定する判定規準となりうるかどうかを検討するために、項数の M を変えることによって、 $(FPE)_M$ の値とスペクトルの形との関係を調べた。ただし、ここでは、(5) 式の R_M の代りに $P_{M+1}/2f_N$ を使い、これを代入した結果 $(FPE)'_M$ を $(FPE)_M$ の代りに使った。計算は、データのサンプリング間隔 Δt を 30 msec とした時には、記録の長さ $L=5L_0/3, 2L_0, 5L_0/2, 3L_0$ の四つの場合、 $\Delta t=10$ msec では、 $L=2L_0, 3L_0$ の二つ、および $\Delta t=5$ msec では、 $L=2L_0$ の場合について、おこなわれた。そのときの M と $(FPE)'_M$ の関係を Fig. 7 に示したが、これに見るかぎり、 $(FPE)'_M$ は最小値をとらず、一定区間で定常的な値をとりながら、階段を降りるがごとくに減少する。Fig. 6 とも重複するので、スペクトルを改めて示すのは省略するが、長さが $L_0/2$ の倍数の記録については、 $\Delta t=5$ msec では、 M を 5~75 の間で変化させても、スペクトルに目立った変化は現われないのに対し、 $\Delta t=10$ msec では、 $M \geq 29$ で変化が現われ、また、 $\Delta t=30$ msec では、 $M \geq 10$ で、Fig. 6 にみられるような、顕著な変化が出てくる。 $\Delta t=30$ msec で $L=5L_0/3$ の場合には、 M を変えた時に、スペクトルの安定しないこと

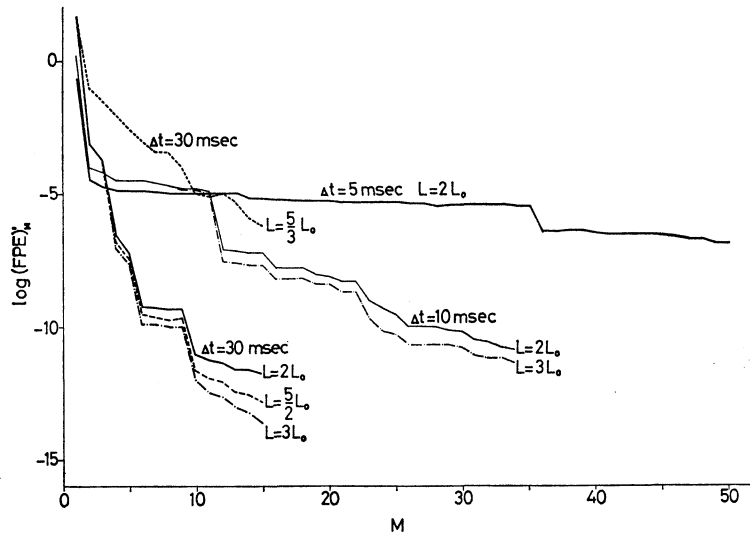


Fig. 7 $(FPE)'_M$ as a function of M for various sampling intervals, where $(FPE)'_M = \frac{N + M + 1}{N - M - 1} (P_{M+1}/2f_N)$ and $M+1$ is the number of points of the prediction error filter. N is the number of data samples.

がひとつの特徴である。この場合は、 M を多くすると、スペクトルに二つ以上のピークが現われるが、 $M=3$ ならば、それはひとつになる。ただし、これには、5%ほどの frequency shift がみられる。

ところで、maximum entropy technique でスペクトルを計算する(1)式には、項数についての制限を何ら含んでいない。したがって、理論上は、項数の違いがスペクトルに及ぼす影響は小さいはずである。当然、得られるべきスペクトルは、そのパワーも形も、 M の小さな変化に対しては安定するはずであるから、 $(FPE)'_M$ あるいは P_{M+1} が一定の値に落ち着くことが必要になる。以上の計算例を、この観点から総括してみると、フィルターの適切な項数は、 $(FPE)'_M$ あるいは P_{M+1} が定常値になるところで、 M は大きくないこと、かつ、そこでスペクトルの安定することが条件となる。

ま と め

相対的に短い時系列を白い雑音化するのはかなり難しいはずであり、maximum entropy technique によるスペクトルの推定に困難が生じるのも当然である。その意味では、適当な長さの記録のあることが、誤差を小さくする条件である。それが望むべくもない時は、正弦波による解析結果を検討しながら、適当な誤差の範囲を設定し、その上に立って、結果を考察することが必要であろう。

最後に、簡単なまとめをおこなえば、

- 1) $\pm 10\%$ 以内の許容誤差で、卓越周期を推定するためには、少なくとも、その周期の二倍の長さの記録が必要である。この際、入力データの両端を若干減らすことによって、安定したスペクトルが得られるかどうか検討するのも、誤差を小さくするひとつの工夫である。
- 2) 入力データのゼロレベルの推定誤差も、結果に影響するので、出来る限りこれを小さくする工夫も必要である。
- 3) prediction error filter の項数は、それがあまり大きくないところで、 P_{M+1} が定常的な値に落ち着くところを選ぶべきである。

謝辞 佐藤泰夫鹿大理学部教授には、草稿を読み、討論していただいた。計算には、鹿大電子計算機室 FACOM 230-45S を使用した。

付記 A. maximum entropy technique の理論と計算方法

maximum entropy technique の思想は、フィルターをかけることによって白い雑音化された時系列のスペクトルを、そのフィルターの伝達関数 (power response) で除することにより、与えられた時系列の電力スペクトルをもとめることにある [BURG (1967)]。

いま、時系列は等時間間隔 Δt で N 個与えられているとする： x_j ($j=1, 2, \dots, N$)。この時系列にフィルターをかけ、白い雑音化された時系列を

$$\tilde{x}_j = \frac{1}{2} \{ (x_{j+M} + a_1 x_{j+M-1} + \dots + a_M x_j) + (x_j + a_1 x_{j+1} + \dots + a_M x_{j+M}) \} \quad (\text{A. 1})$$

とする。ただし、 $N > M$ で、 a_k ($k=1, 2, \dots, M$) は $M+1$ 項の prediction error filter の係数である。(A. 1) の右辺は、フィルターを時間軸に沿って逆向きにかけた場合と前向きにかけた

場合の平均を表わし [BURG (1968)], 第1の小カッコと第二の小カッコとは, それぞれ独立な白い雑音を構成する。

連続関数 $x(t)$ の Fourier 変換を $X(\omega)$ とするとき, $x(t+\tau)$ の Fourier 変換は

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} x(t+\tau) dt &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t'-\tau)} x(t') dt' \\ &= e^{i\omega\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t'} x(t') dt' \\ &= e^{i\omega\tau} X(\omega) \end{aligned}$$

となることを利用すれば, (A.1) における \tilde{x}_j の Fourier 変換 $\tilde{F}(\omega)$ は, x_j の Fourier 変換を $F(\omega)$ として

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\omega) &= \frac{1}{2} F(\omega) \left\{ z^M \left(1 + \sum_{j=1}^M a_j z^{-j} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \sum_{j=1}^M a_j z^j \right) \right\}, \end{aligned}$$

ただし, $z = \exp(i2\pi f \Delta t)$, $\omega = 2\pi f$ 。

両辺の絶対値をとると,

$$|\tilde{F}(\omega)| = |F(\omega)| \left| 1 + \sum_{j=1}^M a_j z^j \right|$$

したがって, 電力スペクトルは

$$\tilde{P}(f) = P(f) \left| 1 + \sum_{j=1}^M a_j z^j \right|^2$$

左辺は, ランダムな時系列のスペクトルであるから, これを $P_{M+1}/2f_N$ とおくと,

$$P(f) = \frac{P_{M+1}}{2f_N} \left| 1 + \sum_{j=1}^M a_j z^j \right|^{-2} \quad (\text{A.2})$$

ここで, P_{M+1} は白い雑音化された時系列 \tilde{x}_j の全電力で,

$$\begin{aligned} P_{M+1} &= \frac{1}{2(N-M)} \sum_{j=1}^{N-M} \{ (x_{j+M} + a_1 x_{j+M-1} + \cdots + a_M x_j)^2 \\ &\quad + (x_j + a_1 x_{j+1} + \cdots + a_M x_{j+M})^2 \}, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$f_N = 1/2\Delta t$ はたたみこみ周波数 (folding frequency) であり, (A.2) の $\left| 1 + \sum_{j=1}^M a_j z^j \right|^2$ が, prediction error filter の伝達関数である。

一方, 時系列 x_j の電力スペクトルは, この時系列の自己相関関数を ϕ_k とするとき,

$$P(f) = \frac{1}{2f_N} \sum_{k=-N}^N \phi_k z^{-k} \quad (\text{A.4})$$

で与えられる。

したがって、(A. 2) と (A. 4) を等しいとおいて、 z の冪乗の係数を比較すれば、

$$\begin{bmatrix} \phi_0 & \phi_1 & \cdots & \phi_M \\ \phi_1 & \phi_0 & \cdots & \phi_{M-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_M & \phi_{M-1} & \cdots & \phi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{M+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A. 5})$$

これが、 $M+1$ 項の prediction error filter を表わすマトリックス方程式である。

(A. 5) の実際の計算には帰納的な方法を使う [ULRYCH (1972)]。

表現の便宜上、 $M+1$ 項の prediction error filter の係数を a_{Mj} ($j=1, 2, \dots, M$) と書く。

まず、2項の prediction error filter (two point filter) では

$$\begin{bmatrix} \phi_0 & \phi_1 \\ \phi_1 & \phi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A. 5}')$$

ただし、

$$\phi_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j^2 = P_1. \quad (\text{A. 6})$$

(A. 3) より

$$P_2 = \frac{1}{2(N-1)} \sum_{j=1}^{N-1} \{(x_{j+1} + a_{11} x_j)^2 + (x_j + a_{11} x_{j+1})^2\}$$

a_{11} は P_2 を最小にするように決める： $\partial P_2 / \partial a_{11} = 0$ 。したがって

$$a_{11} = - \frac{2 \sum_{j=1}^{N-1} x_j x_{j+1}}{\sum_{j=1}^{N-1} (x_j^2 + x_{j+1}^2)} \quad (\text{A. 5}' . 1)$$

また、(A. 5') より、

$$P_2 = P_1 (1 - a_{11}^2), \quad (\text{A. 5}' . 2)$$

$$\phi_1 = - a_{11} \phi_0. \quad (\text{A. 5}' . 3)$$

3 項の filter では、

$$\begin{bmatrix} \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_1 & \phi_0 & \phi_1 \\ \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A. 5}'')$$

これから、

$$\phi_1 + a_{21} \phi_0 + a_{22} \phi_1 = 0$$

(A. 5' . 3) を代入して、

$$a_{21} = a_{11} + a_{11} a_{22} \quad (\text{A. 5}'' . 1)$$

また, (A. 5'') から,

$$\begin{aligned}\phi_2 &= -a_{21}\phi_1 - a_{22}\phi_0 \\ &= \phi_0 \{a_{11}^2 - a_{22}(1 - a_{11}^2)\} \\ P_3 &= \phi_0 + a_{21}\phi_1 + a_{22}\phi_2 \\ &= \phi_0(1 - a_{11}^2)(1 - a_{22}^2)\end{aligned}$$

したがって, (A. 5'.2) から,

$$P_3 = P_2(1 - a_{22}^2) \quad (\text{A. 5''.2})$$

(A. 3) より

$$P_3 = \frac{1}{2(N-2)} \sum_{j=1}^{N-2} \{(x_{j+2} + a_{21}x_{j+1} + a_{22}x_j)^2 + (x_j + a_{21}x_{j+1} + a_{22}x_{j+2})^2\}$$

(A. 5''.1) の関係を使って, $\partial P_3/\partial a_{22}=0$ を計算すると,

$$a_{22} = - \frac{2 \sum_{j=1}^{N-2} (x_j + a_{11}x_{j+1})(x_{j+2} + a_{11}x_{j+1})}{\sum_{j=1}^{N-2} \{(x_j + a_{11}x_{j+1})^2 + (x_{j+2} + a_{11}x_{j+1})^2\}} \quad (\text{A. 5''.3})$$

また, (A. 5''.1) を使えば,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a_{11} + a_{22}a_{11} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a_{11} \\ 0 \end{bmatrix} + a_{22} \begin{bmatrix} 0 \\ a_{11} \\ 1 \end{bmatrix}$$

と変形できるから, これを (A. 5') に代入して,

$$\begin{bmatrix} \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_1 & \phi_0 & \phi_1 \\ \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_{11} + a_{22}a_{11} \\ 0 \end{bmatrix} + a_{22} \begin{bmatrix} 0 \\ a_{11} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_2 \\ 0 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} + a_{22} \begin{bmatrix} \Delta_2 \\ 0 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

ただし,

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= \phi_2 + a_{11}\phi_1 = -a_{22}P_2 \\ P_3 &= P_2 + a_{22}\Delta_2 = P_2(1 - a_{11}^2)\end{aligned}$$

以下, この手順を繰返せば, $M+1$ 項の filter は

$$\begin{bmatrix} \phi_0 & \phi_1 & \cdots & \phi_M \\ \phi_1 & \phi_0 & \cdots & \phi_{M-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{M-1} & \phi_{M-2} & \cdots & \phi_1 \\ \phi_M & \phi_{M-1} & \cdots & \phi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_{M-11} \\ \vdots \\ a_{M-1, M-1} \\ 0 \end{bmatrix} + a_{MM} \begin{bmatrix} 0 \\ a_{M-1, M-1} \\ \vdots \\ a_{M-11} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P_M \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \Delta_M \end{pmatrix} + a_{MM} \begin{pmatrix} \Delta_M \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ P_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{M+1} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A. 5}''')$$

ただし,

$$\begin{aligned} \Delta_M &= \phi_M + a_{M-11} \phi_{M-1} + \cdots + a_{M-1 M-1} \phi_1 \\ &= -a_{MM} P_M \end{aligned}$$

(A. 5''') から

$$P_{M+1} = P_M (1 - a_{MM}^2) \quad (\text{A. 7})$$

$$a_{Mj} = a_{M-1j} + a_{MM} a_{M-1 M-j} \quad (\text{A. 8})$$

(A. 8) を (A. 3) へ代入して, $\partial P_{M+1} / \partial a_{MM} = 0$ を計算すれば,

$a_{MM} =$

$$\frac{2 \sum_{j=1}^{N-M} (x_j + a_{M-11} x_{j+1} + \cdots + a_{M-1 M-1} x_{j+M-1}) (x_{j+M} + a_{M-11} x_{j+M-1} + \cdots + a_{M-1 M-1} x_{j+1})}{\sum_{j=1}^{N-M} \{(x_j + a_{M-11} x_{j+1} + \cdots + a_{M-1 M-1} x_{j+M-1}) + (x_{j+M} + a_{M-11} x_{j+M-1} + \cdots + a_{M-1 M-1} x_{j+1})^2\}} \quad (\text{A. 9})$$

(A. 9) の式の形をみればわかるように, $|a_{MM}| < 1$ であるから, $0 < P_{M+1} < P_M$ である。

ついでに付記すれば, maximum entropy technique では, (A. 5) 式でフィルターの係数と P_{M+1} を決めて, (A. 2) 式を解くのであるから, (A. 5) 式の相関関数のマトリックスを計算して, 連立方程式を解くことも考えられ, AKAIKE (1969) はこの方法をとっている。

付記 B. ゼロレベルの誤差の prediction error filter 係数におよぼす効果

真のゼロレベルがゼロである時系列にたいして, ゼロレベルを

$$D = \sum_{j=1}^N x_j / N \quad (\text{B. 1})$$

で与えたとする。したがって, この誤差 D を含んだ時系列は

$$\hat{x}_j = x_j - D \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (\text{B. 2})$$

この時系列を使って計算された2項のフィルターの係数は, (A. 5'.1) より,

$$\begin{aligned} \hat{a}_{11} &= - \frac{2 \sum_{j=1}^{N-1} (x_j - D) (x_{j+1} - D)}{\sum_{j=1}^{N-1} \{(x_j - D)^2 + (x_{j+1} - D)^2\}} \\ &= a_{11} - \delta a_{11} \end{aligned}$$

ただし, a_{11} は真の係数で

$$a_{11} = - \frac{2 \sum_{j=1}^{N-1} x_j x_{j+1}}{\sum_{j=1}^{N-1} \{x_j^2 + x_{j+1}^2\}},$$

$$\delta a_{11} = \frac{2 \sum_{j=1}^{N-1} (x_j - x_{j+1})^2 X_1}{\sum_{j=1}^{N-1} \{x_j^2 + x_{j+1}^2\} \left[\sum_{j=1}^{N-1} \{x_j^2 + x_{j+1}^2\} + 2X_1 \right]}$$

ここで,

$$X_1 = (x_1 + x_N)D - (N+1)D^2.$$

したがって, $D \neq 0$ の場合, δa_{11} はほとんどゼロになることはない。

3項のフィルターでは

$$\begin{aligned} \hat{a}_{22} &= - \frac{2 \sum_{j=1}^{N-2} \{(x_j - D) + \hat{a}_{11}(x_{j+1} - D)\} \{(x_{j+2} - D) + \hat{a}_{11}(x_{j+1} - D)\}}{\sum_{j=1}^{N-2} [\{(x_j - D) + \hat{a}_{11}(x_{j+1} - D)\}^2 + \{(x_{j+2} - D) + \hat{a}_{11}(x_{j+1} - D)\}^2]} \\ &= a_{22} - \delta a_{22} \end{aligned}$$

ただし,

$$a_{22} = -2C_2/G_2$$

$$\delta a_{22} = \frac{2 \sum_{j=1}^{N-2} (x_{j+2} - x_j)^2 X_2}{G_2(G_2 + 2X_2)}$$

ここで,

$$C_2 = \sum_{i=1}^{N-2} (x_i + a_{11} x_{i+1}) (x_{i+2} + a_{11} x_{i+1})$$

$$G_2 = \sum_{i=1}^{N-2} \{(x_i + a_{11} x_{i+1})^2 + (x_{i+2} + a_{11} x_{i+1})^2\}$$

$$\begin{aligned} X_2 &= \sum_{i=1}^{N-2} [\{D(1 + \hat{a}_{11}) + \delta a_{11} x_{i+1}\}^2 - \{D(1 + a_{11}) \\ &\quad + \delta a_{11} x_{i+1}\} \{x_i + x_{i+2} + 2a_{11} x_{i+1}\}] \end{aligned}$$

また, (A.5".1) から,

$$\begin{aligned} \hat{a}_{21} &= \hat{a}_{11} + \hat{a}_{22} \hat{a}_{11} \\ &= (a_{11} + a_{22} a_{11}) - \delta(a_{11} + a_{22} a_{11}) + \delta a_{11} \delta a_{22} \end{aligned}$$

2 次の微小量が無視できれば,

$$\hat{a}_{21} = a_{21} - \delta a_{21}$$

以下, 帰納的に導けば,

$$\hat{a}_{MM} = a_{MM} - \delta a_{MM}$$

$$\hat{a}_{Mj} = a_{Mj} - \delta a_{Mj} \quad (\text{B. 3})$$

ただし, δa_{MM} の分子, 分母は, 2 項および 3 項の場合ほど, 簡単化はできない。しかしながら, ここでも, $D \neq 0$ の場合には, すべての $\delta a_{Mj} (j=1, 2, \dots, M)$ をゼロにすることができないのは, 2 項の場合と同様である。

参 考 文 献

- AKAIKE, H., 1969, Fitting autoregressive models for prediction, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **21**, 243-247.
- BURG, J.P., 1967, Maximum entropy spectral analysis, paper presented at the 37th meeting, Soc. Explor. Geophys., Oklahoma City, Okal., Oct. 31, 1967.
- BURG, J.P., 1968, A new analysis technique for time series data, paper presented at NATO Advanced Study Institute on Signal Processing, August 1968, Enschede, Netherlands.
- CHEN, W.Y. and G.R. STEGEN, 1974, Experiments with maximum entropy power spectra of sinusoids, *J. Geophys. Res.*, **79**, 3019-3022.
- ULRYCH, T.J., 1972, Maximum entropy power spectrum of truncated sinusoids, *J. Geophys. Res.*, **77**, 1396-1400.