

カオスを利用した一様乱数の発生

著者	古賀 均, 白石 貞純, 井上 政義
雑誌名	鹿児島大学理学部紀要. 数学・物理学・化学
巻	14
ページ	25-30
別言語のタイトル	Generation of Uniform Random Numbers with the aid of a Chaos
URL	http://hdl.handle.net/10232/00001757

カオスを利用した一様乱数の発生

古賀 均*・白石 貞純*・井上 政義*

(1981年9月30日受理)

Generation of Uniform Random Numbers with the aid of a Chaos

Hitoshi KOGA*, Sadasumi SHIRAISHI*
and Masayoshi INOUE*

Abstract

A new method for the generation of uniform random numbers is proposed by making use of the difference equation $x_{n+1}=4x_n(1-x_n)$ which shows chaotic behavior for a certain initial value. The invariant measure of this difference equation indicates that the distribution of the random numbers, which is directly obtained by the difference equation, is not uniform. Therefore, we multiply the random number by 1000 and take the decimal fraction which is considered to be a uniform random number. A detailed comparison between this new method and a congruence method has been made and it shows that the new method is very useful.

§1. 序 論

生物の個体数の変化に関するロジスティック方程式を、オイラー法によって差分化すると、

$$x_{n+1} = ax_n(1-x_n); \quad 0 < a \leq 4, \quad (1)$$

という差分方程式を得る。この差分方程式は、パラメータ a の取り方によって、単調減少、単調増加、減衰振動、周期振動、ランダム (カオス) と全く違う解の動きをすることが、May の数値実験¹⁾ から知られている。ここで (1) を関数記号 $f(x)$ を用いて、

$$x_{n+1} = f(x_n); \quad f(x) = ax(1-x), \quad (2)$$

と書く。

次に、写像 f の周期点に関して知られている 2 つの定理を紹介する。

定理 (Sharkovski)²⁾ 全ての正の整数に対して次のような順序で並べる。

$$\begin{aligned} &3 < 5 < 7 < \dots < 2n+1 < \dots < 2 \cdot 3 < 2 \cdot 5 < 2 \cdot 7 \\ &< \dots < 2^2 \cdot 3 < 2^2 \cdot 5 < 2^2 \cdot 7 < \dots < 2^n \cdot 3 < 2^n \cdot 5 < 2^n \cdot 7 \\ &< \dots < 2^n < 2^{n-1} < \dots < 2 < 1. \end{aligned}$$

この時写像 f が p 周期点をもてば $p < q$ なるすべての q について q 周期点が存在する。

* 鹿児島大学理学部物理学教室 (Department of Physics, Faculty of Science, Kagoshima University)

定理 (Li-Yorke)³⁾ f を 1 次元の区間 I からそれ自身への連続な写像とする。 f が 2 冪以外の周期点をもてば、次の性質をもつ非可算個の非周期点の集合 S が存在する。

1) $S \ni x, y (x \neq y)$ に対して,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f^n(x) - f^n(y)| > 0,$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0.$$

2) $S \ni x$, 周期点 z に対して,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f^n(x) - f^n(z)| > 0.$$

すなわち、写像 f が 3 周期点をもつならば、ある初期値 $x_0 \in S$ から始まる写像 $x_{n+1} = f^n(x_0)$ はどのような周期点にも近づくことがない、乱雑な解を与える。しかもそのような初期値 x_0 が非可算個存在するということである。これを Li-Yorke は“カオス”と名づけた。May の数値実験によると $a = 3.8284 \dots$ の時、(2) の写像関数は 3 周期点を持つようになる。

ところで、 $a = 4$ の場合の写像関数 (2) は、 $d\mu = \frac{1}{\pi} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ を不変測度としてもつエルゴート性を示すことが知られている。

§2. 一様乱数の発生の方法

序論で述べた写像 $f(x) = 4x(1-x)$ の性質を用いて一様乱数を発生させることを我々は考えた。この写像 f で表わされる差分方程式に、ある初期値 $x_0 (0 < x_0 < 1)$ を与えることによって得られた 10000 個の乱数のヒストグラムが図 1 である。この図は、不変測度から予想されるように 0 と 1 の近傍に分布がかたよっている。これを補正するために、我々は、出てきた値を 1000 倍して、その整数部分を省き、残りの小数点以下の実数を一様乱数とした。このように

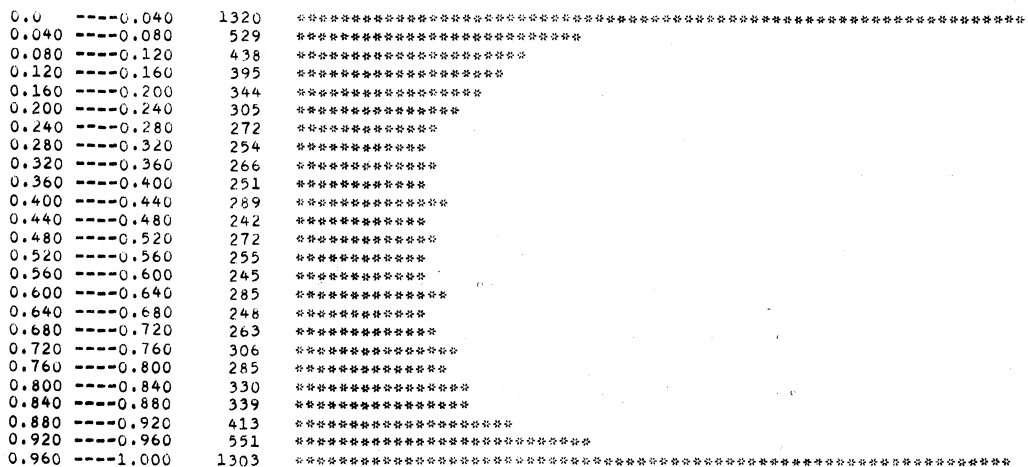


図 1. 写像 $f(x) = 4x(1-x)$ による 10000 個の乱数のヒストグラム。但し、初期値 $x_0 = 0.75324$ 。

0.0	----0.040	394	*****
0.040	----0.080	386	*****
0.080	----0.120	394	*****
0.120	----0.160	369	*****
0.160	----0.200	365	*****
0.200	----0.240	448	*****
0.240	----0.280	401	*****
0.280	----0.320	421	*****
0.320	----0.360	393	*****
0.360	----0.400	397	*****
0.400	----0.440	432	*****
0.440	----0.480	404	*****
0.480	----0.520	391	*****
0.520	----0.560	383	*****
0.560	----0.600	395	*****
0.600	----0.640	397	*****
0.640	----0.680	443	*****
0.680	----0.720	393	*****
0.720	----0.760	409	*****
0.760	----0.800	416	*****
0.800	----0.840	384	*****
0.840	----0.880	379	*****
0.880	----0.920	369	*****
0.920	----0.960	416	*****
0.960	----1.000	421	*****

図 2. カオスを利用して発生させた 10000 個の乱数のヒストグラム。
但し、初期値 $x_0=0.75324$.

して発生させた 10000 個の一様乱数のヒストグラムが図 2 である。また初期値 $x_0(0 < x_0 < 1)$ を、0.5, 0.75 等にとると、写像 f は周期解をもつ。しかし、そのような初期値のルベーグ測度は 0 である。そこでこのような例外的な周期解を省くため、我々は初期値として 1 から 9 までの数字で表わされる小数点以下 5 桁の数をとった。

§ 3. 従来の方法との比較

前章で説明した、カオスを利用する一様乱数の発生法と、従来の一様乱数の発生法の一つである混合型合同法^{注)}を比較した。調べた内容は、(1) ポーカーテスト、(2) ヒストグラム、(3) 2次元散布図、(4) 平均値、(5) 相関、(6) CPU-time である。

(1) ポーカーテストとは、区間 $(0, 1)$ を 10 等分して、それを 0 から 9 に対応させ、乱数 5 個毎の出現パターンの適合性を見るものである。ここでは 7500 個の乱数によってポーカーテストをおこなった。このテストの結果を表 1 に示してある。(但し、従来の方法の初期値 IX の意味は、注) に示してある。) この表によれば、従来の方法と我々の方法との間に優劣はない。

(2) ヒストグラムは、発生させた乱数の一様性を調べるものである。従来の方法及び我々の方法で発生させた乱数 (10000 個) のヒストグラムが、それぞれ図 3 及び図 4 である。これらの図から、各区間の出現頻度は両方法とも、ほぼ一樣であることがわかる。

(3) 2次元散布図は、 x_i の値に対して x_{i+1} がどのような値を取るかを調べるものである。従来の方法によって発生させた乱数 (200 個) による 2次元散布図が図 5 であり、同様に、

注) 混合型合同法による一様乱数発生の方法は以下の通りである。ある 1 つの整数乱数 M_n (初期値 M_0 は IX で表わす) が決まった時、それに整数 a をかけ、整数 c を加え、それを整数 μ で割った時の余りを次の整数 M_{n+1} とする。

$$M_{n+1} = aM_n + c \pmod{\mu}.$$

初期値 IX は、 μ よりも小さな整数で使用者が適当に決める。この整数乱数 M_{n+1} を実数に変換し、 μ で割ると、区間 $(0, 1)$ で一樣に分布する一様乱数が得られる。ここでは、 $a=23$, $c=11317$, $\mu=32749$ を使用した。

表 1. ポーカーテストの結果。右端の 2 例がカオスを利用した方法によるものであり、その左の 2 例が混合型合同法によるものである。また、平均値・相関・CPU-time, 及びポーカーテストの理論値もそれぞれ示している。

POKER TEST	TYPE	RIRONCHI	IX=24351	IX=997	X0=0.15749	X0=0.59743
	AAAAA	0.0001	0.0001	0.0000	0.0003	0.0004
	AAAAB	0.0045	0.0044	0.0044	0.0044	0.0045
	AAABB	0.0090	0.0098	0.0072	0.0092	0.0077
	AAABC	0.0720	0.0743	0.0694	0.0659	0.0720
	AABBC	0.1080	0.0967	0.0973	0.0918	0.0838
	AABCD	0.5040	0.5153	0.5323	0.5135	0.5295
	ABCDE	0.3024	0.2994	0.2995	0.3151	0.3025
MEAN VALUE			0.497	0.504	0.501	0.500
CORRELATION			-0.00100	-0.00118	-0.00148	-0.00015
CPU-TIME			6 S 406 MS	6 S 392 MS	5 S 833 MS	5 S 854 MS

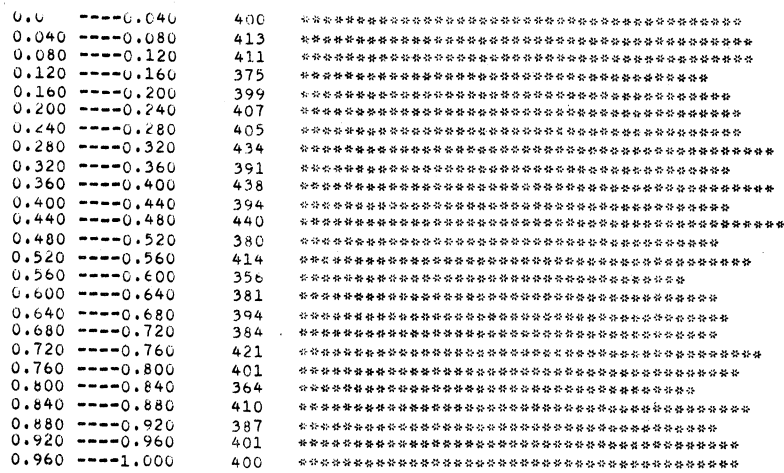


図 3. 混合型合同法によって発生させた 10000 個の乱数のヒストグラム。但し、初期値 IX=24351.

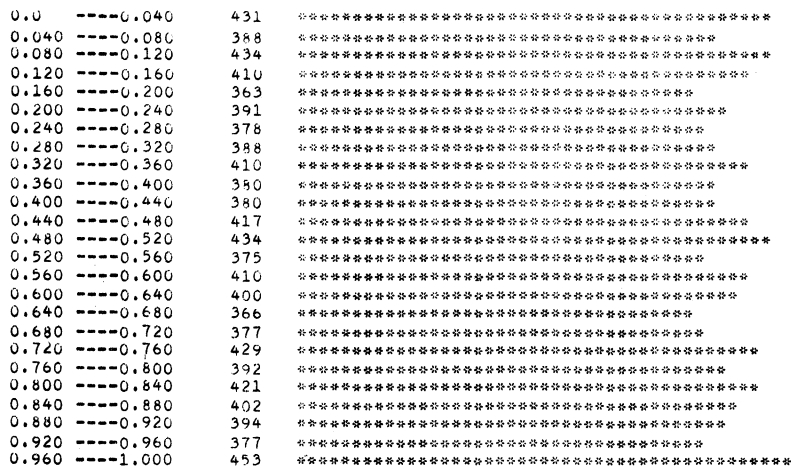


図 4. カオスを利用して発生させた 10000 個の乱数のヒストグラム。但し、初期値 $x_0=0.15749$.

我々の方法によるものが図 6 である。これらの図からわかるように、乗算合同法の 2 次元散布図にあらわれる規則的パターン⁴⁾は、両方法ともに表われていない。

(4) 平均値としては、10000 個の乱数の平均をとった。この平均値は表 1 の下に示した。そ

れによると、平均値は、発生させる方法及び初期値に多少依存しているが、それぞれ統計的なゆらぎの範囲内である。

(5) 相関 R は $R = \frac{1}{10000} \sum_{n=1}^{10000} (x_n - 0.5)(x_{n-1} - 0.5)$ という式にもとずいて計算し、それ

を表 1 の下に示した。その結果によると、相関は初期値にかなり依存していることがわかる。

また、乱数 2000 個を発生させるのに要する CPU-time を表 1 の下に示している。但し、電算機は FACOM230-45S を用いた。この結果によると、我々の方法は従来の方法より、約 9% CPU-time を節約できることがわかる。

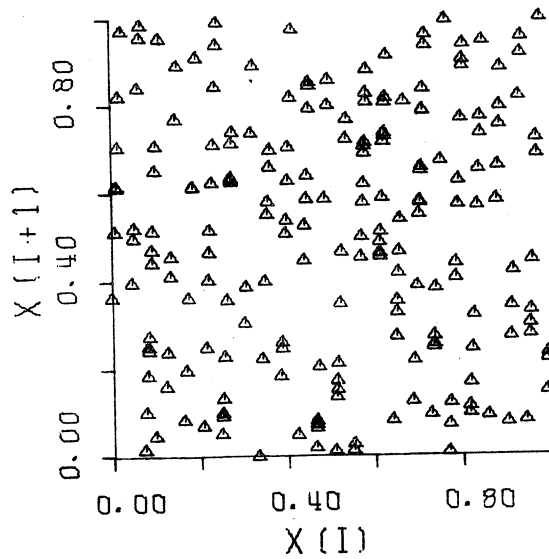


図 5. 混合型合同法によって発生させた 200 個の乱数の 2 次元散布図。但し、初期値 $IX=997$ 。

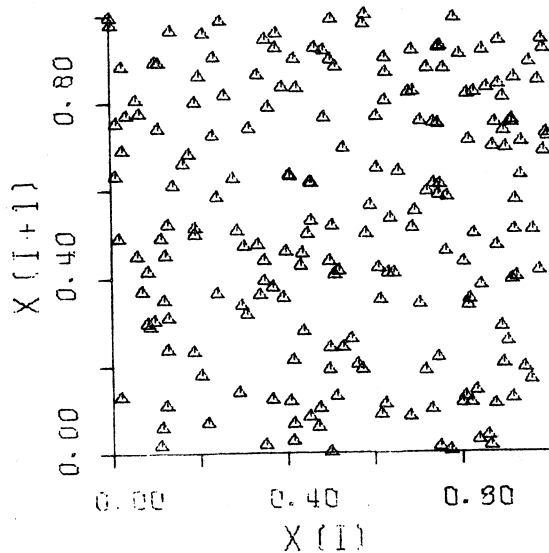


図 6. カオスを利用して発生させた 200 個の乱数の 2 次元散布図。但し、初期値 $x_0=0.59743$ 。頭切りのため、規則的パターンは表われない。

以上、従来の方法と我々の方法の比較を行なったが、ほとんど大差のないことがわかった。

しかし、両方法は周期に関して異なる性質をもつ。つまり、従来の方法による乱数発生は、必ず周期性をもっている。ところが、我々の方法では、非周期点から出発した乱数列に、理論上周期性がない。これは、我々の方法が従来の方法に比べて、すぐれている大きな特徴のひとつである。但し、電算機の数値表現の桁数が有限であることによる周期性は生ずる。また、頭切りによって、2次元散布図に表われる周期的パターンを除くことができた。なお、我々の方法は浮動小数点法であるから、プログラムを単純化することにより、CPU-timeを表1の値よりもずっと短縮することができる。そのCPU-timeの値は整数を用いている混合型合同法のCPU-timeの約10分の1になる。

文 献

- 1) R.M. May: *Nature* **261** (1976) 459.
- 2) A.N. Sharkovski: *Ukrain. Mat. Z.* **16** (1964) 61.
- 3) T.Y. Li and J.A. Yorke: *Am. Math. Mon.* **82** (1975) 985.
- 4) 例えば、十代田三知男: *数理科学* **10** (1980) 22.