Rep. Fac. Sci., Kagoshima Univ., (Math., Phys. & Chem.),
No. 20. p. 11–31, 1987.

A TABLE OF THE EXPLICIT FORMULAS FOR THE SUMS OF POWERS $S_p(n)=\sum_{k=1}^{n} k^p$ FOR $p=1(1)61$

Tadashi ORIGUCHI*, Hiroshi KIRIYAMA*, and Yoshio MATSUOKA**

(Received 10 September, 1987)

Abstract

Let $S_p(n)=\sum_{k=1}^{n} k^p$. We list the explicit formulas for $S_p(n)$ when $p=1, 2, 3, \cdots, 61$.

Introduction

Let $S_p(n)=\sum_{k=1}^{n} k^p$. Recently the various properties of $S_p(n)$ are discussed and an interesting history of the study for $S_p(n)$ in the early stages is reported, see [**1**, and **2**]. Furthermore, some new results are obtained, see [**5**, **6**, and **7**]. Incidentally, the result stated in [**5**] is contained in that of [**7**].

It is well known that $S_p(n)$ for any positive integer p is given by, see [**3**; p. 1 and pp. 1079–1080],

$$(1)\quad \begin{aligned} S_p(n)&=\frac{1}{p+1}n^{p+1}+\frac{1}{2}n^p+\frac{1}{2}\binom{p}{1}B_2n^{p-1}+\frac{1}{4}\binom{p}{3}B_4n^{p-3}+\frac{1}{6}\binom{p}{5}B_6n^{p-5}+\cdots \\ &=\frac{1}{p+1}n^{p+1}+\frac{1}{2}n^p+\frac{1}{12}pn^{p-1}-\frac{1}{720}p(p-1)(p-2)n^{p-3} \\ &\qquad +\frac{1}{30240}p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)n^{p-5}-\cdots, \end{aligned}$$

where $B_2=\frac{1}{6}$, $B_4=-\frac{1}{30}$, $B_6=\frac{1}{42}$, $\cdots$ denote the so-called Bernoulli numbers, which are, in turn, defined by

$$\frac{t}{e^t-1}=1-\frac{1}{2}t+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n}}{(2n)!}t^{2n}.$$

It seems to us, however, that even the formulas of $S_p(n)$ for slightly large values of p are not found in the literature, for example, in [**3**] we find the formulas for $S_p(n)$ when $p=1, 2, 3, \cdots, 7$. Note that the expression on the right-hand side of (1) is not factored. It is, therefore, worthwhile to publish them for large values of p in the factored form. In some cases, however, the factors appearing in the table are not irreducible over the field $\boldsymbol{Q}$ of rationals. As an example we may take $S_9(n)$. From the list below we have

*Kagoshima High School
**Department of Mathematics, Faculty of Science, Kagoshima University

$$20 S_9(n)=n^2(n+1)^2(2n^6+6n^5+n^4-8n^3+n^2+6n-3),$$

which is also witten as

$$20 S_9(n)=n^2(n+1)^2(n^2+n-1)(2n^4+4n^3-n^2-3n+3).$$

But in our table, we throughout employ the following way of representation for $S_p(n)$, see [**5**]:

$$\begin{cases} S_p(n)=n(n+1)(2n+1) \text{ (a polynomial in } n) & \text{if } p \text{ is even,} \\ S_p(n)=n^2(n+1)^2 \text{(a polynomial in } n) & \text{if } p \text{ is odd, and } p \geqq 3. \end{cases}$$

The calculation of the coefficients of $S_p(n)$ is based upon the following proposition, which allows us to make a computation in a comparatively simple manner, see [**4**, especially p. 237]:

Proposition. Let $S_p(n)=\sum_{k=1}^{p+1} c(p, k)n^k$. *Then we have*

$$\begin{cases} c(p+1, k)=\dfrac{p+1}{k}c(p, k-1) & (k=2, 3, 4, \cdots, p+2) \\ c(p+1, 1)=1-\sum_{k=2}^{p+2} c(p+1, k). \end{cases}$$

Actually, in [**4**] it is stated and proved in a somewhat different notation.

The check for the calculation is made by computing the value of the polynomial of the $62nd$ degree on the right-hand side of 18 $61860 s_{61}(n)$ for $n=2$. A straightforward evaluation shows that the resulted value is 42931 56865 13460 82233 32580 which coincides precisely with 18 61860 $(2^{61}+1)$.

T A B L E

$$2S_1(n)=n(n + 1)$$

$$6S_2(n)=n(n + 1)(2n + 1)$$

$$4S_3(n)=n^2(n + 1)^2$$

$$30S_4(n)=n(n + 1)(2n + 1)(3n^2 + 3n - 1)$$

$$12S_5(n)=n^2(n + 1)^2(2n^2 + 2n - 1)$$

$$42S_6(n)=n(n + 1)(2n + 1)(3n^4 + 6n^3 - 3n + 1)$$

$$24S_7(n)=n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)$$

$$90S_8(n)=n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3)$$

$$20S_9(n)=n^2(n+1)^2(2n^6+6n^5+n^4-8n^3+n^2+6n-3)$$

$$66S_{10}(n)=n(n+1)(2n+1)(3n^8+12n^7+8n^6-18n^5-10n^4+24n^3+2n^2-15n+5)$$

$$24S_{11}(n)=n^2(n+1)^2(2n^8+8n^7+4n^6-16n^5-5n^4+26n^3-3n^2-20n+10)$$

$$2730S_{12}(n)=n(n+1)(2n+1)(105n^{10}+525n^9+525n^8-1050n^7-1190n^6+2310n^5+1420n^4-3285n^3-287n^2+2073n-691)$$

$$420S_{13}(n)=n^2(n+1)^2(30n^{10}+150n^9+125n^8-400n^7-326n^6+1052n^5+367n^4-1786n^3+202n^2+1382n-691)$$

$$90S_{14}(n)=n(n+1)(2n+1)(3n^{12}+18n^{11}+24n^{10}-45n^9-81n^8+144n^7+182n^6-345n^5-217n^4+498n^3+44n^2-315n+105)$$

$$48S_{15}(n)=n^2(n+1)^2(3n^{12}+18n^{11}+21n^{10}-60n^9-83n^8+226n^7+203n^6-632n^5-226n^4+1084n^3-122n^2-840n+420)$$

$$510S_{16}(n)=n(n+1)(2n+1)(15n^{14}+105n^{13}+175n^{12}-315n^{11}-805n^{10}+1365n^9+2775n^8-4845n^7-6275n^6+11835n^5+7485n^4-17145n^3-1519n^2+10851n-3617)$$

$$180S_{17}(n)=n^2(n+1)^2(10n^{14}+70n^{13}+105n^{12}-280n^{11}-565n^{10}+1410n^9+2165n^8-5740n^7-5271n^6+16282n^5+5857n^4-27996n^3+3147n^2+21702n-10851)$$

$$3990S_{18}(n)=n(n+1)(2n+1)(105n^{16}+840n^{15}+1680n^{14}-2940n^{13}-9996n^{12}+16464n^{11}+48132n^{10}-80430n^9-1\,67958n^8+2\,92152n^7+3\,80576n^6-7\,16940n^5-4\,54036n^4+10\,39524n^3+92162n^2-6\,58005n+2\,19335)$$

$$840S_{19}(n)=n^2(n+1)^2(42n^{16}+336n^{15}+616n^{14}-1568n^{13}-4263n^{12}+10094n^{11}+22835n^{10}-55764n^9-87665n^8+2\,31094n^7+2\,13337n^6-6\,57768n^5-2\,36959n^4+11\,31686n^3-1\,27173n^2-8\,77340n+4\,38670)$$

$$\begin{aligned}6930S_{20}(n)={}&n(n+1)(2n+1)(165n^{18}+1485n^{17}+3465n^{16}-5940n^{15}\\&-25740n^{14}+41580n^{13}+1\ 63680n^{12}-2\ 66310n^{11}-8\ 01570n^{10}+13\\&35510n^{9}+28\ 06470n^{8}-48\ 77460n^{7}-63\ 62660n^{6}+119\ 82720n^{5}\\&+75\ 91150n^{4}-173\ 78085n^{3}-15\ 40967n^{2}+110\ 00493n-36\ 66831)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}660S_{21}(n)={}&n^{2}(n+1)^{2}(30n^{18}+270n^{17}+585n^{16}-1440n^{15}-5020n^{14}\\&+11480n^{13}+35355n^{12}-82190n^{11}-1\ 90745n^{10}+4\ 63680n^{9}+7\\&33035n^{8}-19\ 29750n^{7}-17\ 83781n^{6}+54\ 97312n^{5}+19\ 81107n^{4}-94\\&59526n^{3}+10\ 62932n^{2}+73\ 33662n-36\ 66831)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}690S_{22}(n)={}&n(n+1)(2n+1)(15n^{20}+150n^{19}+400n^{18}-675n^{17}-3615n^{16}\\&+5760n^{15}+29220n^{14}-46710n^{13}-1\ 89702n^{12}+3\ 07908n^{11}+9\\&33064n^{10}-15\ 53550n^{9}-32\ 69646n^{8}+56\ 81244n^{7}+74\ 13782n^{6}\\&-139\ 61295n^{5}-88\ 45327n^{4}+202\ 48638n^{3}+17\ 95584n^{2}-128\\&17695n+42\ 72565)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}16560S_{23}(n)={}&n^{2}(n+1)^{2}(690n^{20}+6900n^{19}+17250n^{18}-41400n^{17}-1\ 78848n^{16}\\&+3\ 99096n^{15}+15\ 91876n^{14}-35\ 82848n^{13}-113\ 42013n^{12}+262\\&66874n^{11}+613\ 28465n^{10}-1489\ 23804n^{9}-2357\ 57245n^{8}+6204\\&38294n^{7}+5736\ 91737n^{6}-17678\ 21768n^{5}-6371\ 40434n^{4}+30421\\&02636n^{3}-3418\ 23378n^{2}-23584\ 55880n+11792\ 27940)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}13650S_{24}(n)={}&n(n+1)(2n+1)(273n^{22}+3003n^{21}+9009n^{20}-15015n^{19}\\&-97097n^{18}+1\ 53153n^{17}+9\ 69969n^{16}-15\ 31530n^{15}-80\ 30022n^{14}\\&+128\ 10798n^{13}+524\ 02714n^{12}-850\ 09470n^{11}-2580\ 27882n^{10}\\&+4295\ 46558n^{9}+9043\ 76004n^{8}-15713\ 37285n^{7}-20507\ 06147n^{6}\\&+38617\ 27863n^{5}+24466\ 89429n^{4}-56008\ 98075n^{3}-4966\ 74885n^{2}\\&+35454\ 61365n-11818\ 20455)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1092S_{25}(n)={}&n^{2}(n+1)^{2}(42n^{22}+462n^{21}+1309n^{20}-3080n^{19}-16079n^{18}\\&+35238n^{17}+1\ 75833n^{16}-3\ 86904n^{15}-15\ 89210n^{14}+35\ 65324n^{13}\\&+113\ 59537n^{12}-262\ 84398n^{11}-614\ 59521n^{10}+1492\ 03440n^{9}+2362\\&79941n^{8}-6217\ 63322n^{7}-5749\ 62926n^{6}+17716\ 89174n^{5}+6385\\&48653n^{4}-30487\ 86480n^{3}+3425\ 72785n^{2}+23636\ 40910n-11818\\&20455)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}378S_{26}(n)={}&n(n+1)(2n+1)(7n^{24}+84n^{23}+280n^{22}-462n^{21}-3542n^{20}\\&+5544n^{19}+42790n^{18}-66957n^{17}-4\ 38977n^{16}+6\ 91944n^{15}+36\\&55360n^{14}-58\ 29012n^{13}-238\ 84796n^{12}+387\ 41700n^{11}+1176\\&39298n^{10}-1958\ 29797n^{9}-4123\ 42529n^{8}+7164\ 28692n^{7}+9350\\&10264n^{6}-17607\ 29742n^{5}-11155\ 57926n^{4}+25537\ 01760n^{3}+2264\end{aligned}$$

$57058n^2 - 16165\ 36467n + 5388\ 45489)$

$56S_{27}(n)=n^2(n+1)^2(2n^{24}+24n^{23}+76n^{22}-176n^{21}-1089n^{20}+2354n^{19}$
$+14321n^{18}-30996n^{17}-1\ 59536n^{16}+3\ 50068n^{15}+14\ 47750n^{14}$
$-32\ 45568n^{13}-103\ 56931n^{12}+239\ 59430n^{11}+560\ 43471n^{10}-1360$
$46372n^9-2154\ 62444n^8+5669\ 71260n^7+5243\ 05554n^6-16155$
$82368n^5-5822\ 88225n^4+27801\ 58818n^3-3123\ 88431n^2-21553$
$81956n+10776\ 90978)$

$870S_{28}(n)=n(n+1)(2n+1)(15n^{26}+195n^{25}+715n^{24}-1170n^{23}-10478n^{22}$
$+16302n^{21}+1\ 50436n^{20}-2\ 33805n^{19}-18\ 70583n^{18}+29\ 22777n^{17}$
$+193\ 12501n^{16}-304\ 30140n^{15}-1610\ 44508n^{14}+2567\ 81832n^{13}$
$+10526\ 27806n^{12}-17073\ 32625n^{11}-51848\ 37923n^{10}+86309\ 23197n^9$
$+1\ 81738\ 40941n^8-3\ 15762\ 23010n^7-4\ 12103\ 14958n^6+7\ 76035$
$83942n^5+4\ 91679\ 12016n^4-11\ 25536\ 59995n^3-99810\ 35393n^2+7$
$12483\ 83087n-2\ 37494\ 61029)$

$60S_{29}(n)=n^2(n+1)^2(2n^{26}+26n^{25}+91n^{24}-208n^{23}-1502n^{22}+3212n^{21}$
$+23353n^{20}-49918n^{19}-3\ 13712n^{18}+6\ 77342n^{17}+35\ 11303n^{16}$
$-76\ 99948n^{15}-318\ 96622n^{14}+714\ 93192n^{13}+2282\ 29813n^{12}$
$-5279\ 52818n^{11}-12350\ 45022n^{10}+29980\ 42862n^9+47482\ 28223n^8$
$-1\ 24944\ 99308n^7-1\ 15543\ 21208n^6+3\ 56031\ 41724n^5+1\ 28321$
$02985n^4-6\ 12673\ 47694n^3+68842\ 12818n^2+4\ 74989\ 22058n-2$
$37494\ 61029)$

$14322S_{30}(n)=n(n+1)(2n+1)(231n^{28}+3234n^{27}+12936n^{26}-21021n^{25}-2$
$17217n^{24}+3\ 36336n^{23}+36\ 53650n^{22}-56\ 48643n^{21}-540\ 97043n^{20}$
$+839\ 69886n^{19}+6772\ 56580n^{18}-10578\ 69813n^{17}-70030\ 32113n^{16}$
$+1\ 10334\ 83076n^{15}+5\ 84179\ 81930n^{14}-9\ 31437\ 14433n^{13}-38$
$18648\ 85017n^{12}+61\ 93691\ 84742n^{11}+188\ 09507\ 72008n^{10}-313\ 11107$
$50383n^9-659\ 31115\ 76555n^8+1145\ 52227\ 40024n^7+1495\ 02989$
$60254n^6-2815\ 30598\ 10393n^5-1783\ 71609\ 22265n^4+4083\ 22712$
$88594n^3+362\ 09254\ 55812n^2-2584\ 75238\ 28015n+861\ 58412\ 76005)$

$7392S_{31}(n)=n^2(n+1)^2(231n^{28}+3234n^{27}+12397n^{26}-28028n^{25}-2\ 33233n^{24}$
$+4\ 94494n^{23}+42\ 28301n^{22}-89\ 51096n^{21}-673\ 17019n^{20}+1435$
$85134n^{19}+9091\ 10951n^{18}-19618\ 07036n^{17}-1\ 01874\ 30547n^{16}+2$
$23366\ 68130n^{15}+9\ 25659\ 88487n^{14}-20\ 74686\ 45104n^{13}-66\ 23716$
$29682n^{12}+153\ 22119\ 04468n^{11}+358\ 43983\ 50146n^{10}-870\ 10086$
$04760n^9-1378\ 05206\ 50294n^8+3626\ 20499\ 05348n^7+3353\ 34681$
$42038n^6-10332\ 89861\ 89424n^5-3724\ 19003\ 94100n^4+17781\ 27869$

$77624n^3 - 1997\ 96632\ 80772n^2 - 13785\ 34604\ 16080n + 6892\ 67302\ 08040)$

$1\ 17810S_{32}(n) = n(n+1)(2n+1)(1785n^{30} + 26775n^{29} + 1\ 16025n^{28} - 1\ 87425n^{27} - 22\ 11615n^{26} + 34\ 11135n^{25} + 430\ 60745n^{24} - 662\ 96685n^{23} - 7481\ 92627n^{22} + 11554\ 37283n^{21} + 1\ 11577\ 17389n^{20} - 1\ 73142\ 94725n^{19} - 13\ 99166\ 11147n^{18} + 21\ 85320\ 64083n^{17} + 144\ 73303\ 68449n^{16} - 228\ 02615\ 84715n^{15} - 1207\ 44167\ 78197n^{14} + 1925\ 17559\ 59653n^{13} + 7892\ 92334\ 49419n^{12} - 12801\ 97281\ 53955n^{11} - 38878\ 31456\ 44957n^{10} + 64718\ 45825\ 44413n^9 + 1\ 36276\ 44319\ 26059n^8 - 2\ 36773\ 89391\ 61295n^7 - 3\ 09015\ 52717\ 63537n^6 + 5\ 81910\ 23772\ 25953n^5 + 3\ 68685\ 58731\ 13679n^4 - 8\ 43983\ 49982\ 83495n^3 - 74842\ 79882\ 81089n^2 + 5\ 34255\ 94815\ 63381n - 1\ 78085\ 31605\ 21127)$

$7140S_{33}(n) = n^2(n+1)^2(210n^{30} + 3150n^{29} + 13125n^{28} - 29400n^{27} - 2\ 78957n^{26} + 5\ 87314n^{25} + 58\ 28849n^{24} - 122\ 45012n^{23} - 1084\ 32253n^{22} + 2291\ 09518n^{21} + 17363\ 42717n^{20} - 37017\ 94952n^{19} - 2\ 34798\ 79093n^{18} + 5\ 06615\ 53138n^{17} + 26\ 31908\ 04617n^{16} - 57\ 70431\ 62372n^{15} - 239\ 15809\ 17883n^{14} + 536\ 02049\ 98138n^{13} + 1711\ 35856\ 71557n^{12} - 3958\ 73763\ 41252n^{11} - 9260\ 97247\ 46533n^{10} + 22480\ 68258\ 34318n^9 + 35604\ 59840\ 51297n^8 - 93689\ 87939\ 36912n^7 - 86640\ 09819\ 94453n^6 + 2\ 66970\ 07579\ 25818n^5 + 96221\ 53676\ 78237n^4 - 4\ 59413\ 14932\ 82292n^3 + 51621\ 25861\ 20019n^2 + 3\ 56170\ 63210\ 42254n - 1\ 78085\ 31605\ 21127)$

$210S_{34}(n) = n(n+1)(2n+1)(3n^{32} + 48n^{31} + 224n^{30} - 360n^{29} - 4808n^{28} + 7392n^{27} + 1\ 07256n^{26} - 1\ 64580n^{25} - 21\ 60340n^{24} + 33\ 22800n^{23} + 378\ 18560n^{22} - 583\ 89240n^{21} - 5649\ 58600n^{20} + 8766\ 32520n^{19} + 70873\ 88420n^{18} - 1\ 10693\ 98890n^{17} - 7\ 33205\ 54770n^{16} + 11\ 55155\ 31600n^{15} + 61\ 16932\ 96160n^{14} - 97\ 52977\ 10040n^{13} - 399\ 85964\ 74936n^{12} + 648\ 55435\ 67424n^{11} + 1969\ 59794\ 62232n^{10} - 3278\ 67409\ 77060n^9 - 6903\ 84503\ 48116n^8 + 11995\ 10460\ 10704n^7 + 15654\ 90951\ 32192n^6 - 29479\ 91657\ 03640n^5 - 18677\ 83013\ 51088n^4 + 42756\ 70348\ 78452n^3 + 3791\ 58051\ 26206n^2 - 27065\ 72251\ 28535n + 9021\ 90750\ 42845)$

$72S_{35}(n) = n^2(n+1)^2(2n^{32} + 32n^{31} + 144n^{30} - 320n^{29} - 3431n^{28} + 7182n^{27} + 81819n^{26} - 1\ 70820n^{25} - 17\ 57535n^{24} + 36\ 85890n^{23} + 328\ 98915n^{22} - 694\ 83720n^{21} - 5275\ 64655n^{20} + 11246\ 13030n^{19} + 71363\ 65395n^{18} - 1\ 53973\ 43820n^{17} - 7\ 99988\ 28429n^{16} + 17\ 53950\ 00678n^{15} + 72\ 69505\ 81973n^{14} - 162\ 92961\ 64624n^{13} - 520\ 19028\ 40599n^{12} + 1203$

$31018\ 45822n^{11} + 2814\ 99789\ 93355n^{10} - 6833\ 30598\ 32532n^{9} - 10822\ 50034\ 93471n^{8} + 28478\ 30668\ 19474n^{7} + 26335\ 43233\ 92579n^{6} - 81149\ 17136\ 04632n^{5} - 29247\ 84032\ 04671n^{4} + 1\ 39644\ 85200\ 13974n^{3} - 15690\ 98097\ 49917n^{2} - 1\ 08262\ 89005\ 14140n + 54131\ 44502\ 57070)$

$19\ 19190S_{36}(n)=n(n+1)(2n+1)(25935n^{34} + 4\ 40895n^{33} + 22\ 04475n^{32} - 35\ 27160n^{31} - 529\ 07400n^{30} + 811\ 24680n^{29} + 13403\ 20800n^{28} - 20510\ 43540n^{27} - 3\ 09702\ 28380n^{26} + 4\ 74808\ 64340n^{25} + 62\ 86533\ 68980n^{24} - 96\ 67204\ 85640n^{23} - 1102\ 48705\ 83272n^{22} + 1702\ 06661\ 17728n^{21} + 16476\ 66149\ 66044n^{20} - 25566\ 02555\ 07930n^{19} - 2\ 06719\ 96742\ 45342n^{18} + 3\ 22862\ 96391\ 21978n^{17} + 21\ 38612\ 90440\ 51954n^{16} - 33\ 69350\ 83856\ 38920n^{15} - 178\ 41958\ 77906\ 54392n^{14} + 284\ 47613\ 58788\ 01048n^{13} + 1166\ 31785\ 23200\ 26224n^{12} - 1891\ 71484\ 64194\ 39860n^{11} - 5744\ 96043\ 48072\ 34172n^{10} + 9563\ 29807\ 54205\ 71188n^{9} + 20137\ 26645\ 59932\ 53364n^{8} - 34987\ 54872\ 17001\ 65640n^{7} - 45662\ 53810\ 10107\ 17712n^{6} + 85987\ 58151\ 23661\ 59388n^{5} + 54479\ 85056\ 16318\ 97574n^{4} - 1\ 24713\ 56659\ 86309\ 26055n^{3} - 11059\ 35423\ 98966\ 46061n^{2} + 78945\ 81465\ 91604\ 32119n - 26315\ 27155\ 30534\ 77373)$

$1\ 03740S_{37}(n)=n^{2}(n+1)^{2}(2730n^{34} + 46410n^{33} + 2\ 24315n^{32} - 4\ 95040n^{31} - 59\ 51400n^{30} + 123\ 97840n^{29} + 1605\ 99985n^{28} - 3335\ 97810n^{27} - 39436\ 22137n^{26} + 82208\ 42084n^{25} + 8\ 52718\ 73869n^{24} - 17\ 87645\ 89822n^{23} - 159\ 86080\ 21493n^{22} + 337\ 59806\ 32808n^{21} + 2564\ 41765\ 64377n^{20} - 5466\ 43337\ 61562n^{19} - 34691\ 67363\ 18383n^{18} + 74849\ 78063\ 98328n^{17} + 3\ 88901\ 58566\ 44177n^{16} - 8\ 52652\ 95196\ 86682n^{15} - 35\ 33968\ 70055\ 12323n^{14} + 79\ 20590\ 35307\ 11328n^{13} + 252\ 88344\ 55048\ 14817n^{12} - 584\ 97279\ 45403\ 40962n^{11} - 1368\ 47322\ 16459\ 55993n^{10} + 3321\ 91923\ 78322\ 52948n^{9} + 5261\ 21252\ 98882\ 81117n^{8} - 13844\ 34429\ 76088\ 15182n^{7} - 12802\ 61511\ 68963\ 86549n^{6} + 39449\ 57453\ 14015\ 88280n^{5} + 14218\ 44294\ 39310\ 98889n^{4} - 67886\ 46041\ 92637\ 86058n^{3} + 7627\ 95865\ 65784\ 15656n^{2} + 52630\ 54310\ 61069\ 54746n - 26315\ 27155\ 30534\ 77373)$

$8190S_{38}(n)=n(n+1)(2n+1)(105n^{36} + 1890n^{35} + 10080n^{34} - 16065n^{33} - 2\ 68821n^{32} + 4\ 11264n^{31} + 76\ 74072n^{30} - 117\ 16740n^{29} - 2015\ 95044n^{28} + 3082\ 50936n^{27} + 46954\ 86768n^{26} - 71973\ 55620n^{25} - 9\ 54886\ 72580n^{24} + 14\ 68316\ 86680n^{23} + 167\ 53485\ 94780n^{22} - 258\ 64387\ 35510n^{21} - 2504\ 07049\ 29590n^{20} + 3885\ 42767\ 62140n^{19} + 31417\ 42754\ 01760n^{18} - 49068\ 85514\ 83710n^{17} - 3\ 25029\ 61674\ 41750n^{16} + 5\ 12078\ 85269\ 04480n^{15} + 27\ 11651\ 51957\ 81080n^{14} - 43\ 23516\ 70571\ 23860n^{13} - 177\ 25904\ 35343\ 87060n^{12} + 287\ 50614\ 88301\ 42520n^{11} + 873\ 12927\ 35881\ 52560n^{10} - 1453\ 44698\ 47973\ 00100n^{9} - 3060\ 49750\ 26289$

08284n^{8} + 5317 46974 63420 12476n^{7} + 6939 87361 34410 83578n^{6} − 13068 54529 33326 31605n^{5} − 8279 94441 77254 63861n^{4} + 18954 18927 32545 11594n^{3} + 1680 82029 37026 18872n^{2} − 11998 32507 71811 84105n + 3999 44169 23937 28035)

1680$S_{39}(n)=n^{2}(n+1)^{2}$(42n^{36} + 756n^{35} + 3906n^{34} − 8568n^{33} − 1 14716n^{32} + 2 38000n^{31} + 34 77096n^{30} − 71 92192n^{29} − 967 59271n^{28} + 2007 10734n^{27} + 23924 39483n^{26} − 49855 89700n^{25} − 5 18138 10155n^{24} + 10 86132 10010n^{23} + 97 17269 52295n^{22} − 205 20671 14600n^{21} − 1558 93852 13405n^{20} + 3323 08375 41410n^{19} + 21089 88650 97985n^{18} − 45502 85677 37380n^{17} − 2 36423 52151 96373n^{16} + 5 18349 89981 30126n^{15} + 21 48394 82433 06721n^{14} − 48 15139 54847 43568n^{13} − 153 73469 37960 01895n^{12} + 355 62078 30767 47358n^{11} + 831 93195 62895 61819n^{10} − 2019 48469 56558 70996n^{9} − 3198 43368 90188 62699n^{8} + 8416 35207 36935 96394n^{7} + 7783 05671 22551 06951n^{6} − 23982 46549 82038 10296n^{5} − 8643 77681 78552 25318n^{4} + 41270 01913 39142 60932n^{3} − 4637 24279 73822 18326n^{2} − 31995 53353 91498 24280n + 15997 76676 95749 12140)

94710$S_{40}(n)=n(n+1)(2n+1)$(1155n^{38} + 21945n^{37} + 1 24355n^{36} − 1 97505n^{35} − 36 64815n^{34} + 55 95975n^{33} + 1170 89115n^{32} − 1784 31660n^{31} − 34695 04500n^{30} + 52934 72580n^{29} + 9 18907 41580n^{28} − 14 04828 48660n^{27} − 214 43624 84220n^{26} + 328 67851 50660n^{25} + 4362 81093 06320n^{24} − 6708 55565 34810n^{23} − 76553 85611 63926n^{22} + 1 18185 06200 13294n^{21} + 11 44247 06212 46522n^{20} − 17 75463 12418 76430n^{19} − 143 56434 34470 33586n^{18} + 224 22383 07914 88594n^{17} + 1485 24993 50088 02402n^{16} − 2339 98681 79089 47900n^{15} − 12391 12194 23327 76676n^{14} + 19756 67632 24536 38964n^{13} + 81000 03177 41228 70332n^{12} − 1 31378 38582 24111 24980n^{11} − 3 98983 87502 70044 27556n^{10} + 6 64165 00545 17122 03824n^{9} + 13 98520 46432 48362 04642n^{8} − 24 29863 19921 31104 08875n^{7} − 31 71234 50195 53886 75261n^{6} + 59 71783 35253 96382 17329n^{5} + 37 83591 29799 62999 67787n^{4} − 86 61278 62326 42690 60345n^{3} − 7 68065 18452 88646 88599n^{2} + 54 82737 08842 54315 63071n − 18 27579 02947 51438 54357)

5 68260$S_{41}(n)=n^{2}(n+1)^{2}$(13530n^{38} + 2 57070n^{37} + 14 13885n^{36} − 30 84840n^{35} − 457 24635n^{34} + 945 34110n^{33} + 15465 48905n^{32} − 31876 31920n^{31} − 4 84028 98500n^{30} + 9 99934 28920n^{29} + 135 66450 87985n^{28} − 281 32836 04890n^{27} − 3359 99966 15493n^{26} + 7001 32768 35876n^{25} + 72797 21589 71541n^{24} − 1 52595 75947 78958n^{23} − 13 65381 07357 97727n^{22} + 28 83357 90663 74412n^{21} + 219 05243 66520 81153n^{20} − 466 93845

23705 36718n^{19} − 2963 43585 28027 66137n^{18} + 6393 81015 79760 68992n^{17} + 33220 98186 98745 83253n^{16} − 72835 77389 77252 35498n^{15} − 3 01881 14425 39999 05807n^{14} + 6 76598 06240 57250 47112n^{13} + 21 60199 19200 66357 30113n^{12} − 49 96996 44641 89965 07338n^{11} − 116 89871 11586 80257 50517n^{10} + 283 76738 67815 50480 08372n^{9} + 449 42711 19410 29238 94373n^{8} − 1182 62161 06636 08957 97118n^{7} − 1093 63427 23712 28326 63760n^{6} + 3369 89015 54060 65611 24638n^{5} + 1214 57814 31933 55822 17709n^{4} − 5799 04644 17927 77255 60056n^{3} + 651 60101 46419 61686 94117n^{2} + 4495 84441 25088 53881 71822n − 2247 92220 62544 26940 85911)

99330$S_{42}(n)=n(n+1)(2n+1)($1155n^{40} + 23100n^{39} + 1 38600n^{38} − 2 19450n^{37} − 44 91410n^{36} + 68 46840n^{35} + 1596 27930n^{34} − 2428 65315n^{33} − 52983 43743n^{32} + 80689 48272n^{31} + 15 83125 42976n^{30} − 24 15032 88600n^{29} − 420 11049 34152n^{28} + 642 24090 45528n^{27} + 9808 25879 83884n^{26} − 15033 50864 98590n^{25} − 1 99576 26406 13350n^{24} + 3 06881 15041 69320n^{23} + 35 02042 06488 13040n^{22} − 54 06503 67253 04220n^{21} − 523 45208 07870 43660n^{20} + 812 21063 95432 17600n^{19} + 6567 56517 18105 24980n^{18} − 10257 45307 74873 96270n^{17} − 67945 00012 24676 94310n^{16} + 1 07046 22672 24452 39600n^{15} + 5 66850 62478 51627 32000n^{14} − 9 03799 05053 89667 17800n^{13} − 37 05469 10229 67445 36096n^{12} + 60 10103 17871 46001 63044n^{11} + 182 52121 57275 56870 72582n^{10} − 303 83233 94849 08306 90395n^{9} − 639 77436 57195 45152 49535n^{8} + 1111 57771 83217 71882 19500n^{7} + 1450 72924 85639 87211 12280n^{6} − 2731 88273 20068 66757 78170n^{5} − 1730 86113 85553 54335 83474n^{4} + 3962 23307 38364 64882 64296n^{3} + 351 36305 03643 89588 74578n^{2} − 2508 16111 24648 16824 44015n + 836 05370 41549 38941 48005)

9240$S_{43}(n)=n^2(n+1)^2($210n^{40} + 4200n^{39} + 24500n^{38} − 53200n^{37} − 8 68357n^{36} + 17 89914n^{35} + 325 83789n^{34} − 669 57492n^{33} − 11392 97194n^{32} + 23455 51880n^{31} + 3 59227 33084n^{30} − 7 41910 18048n^{29} − 100 85915 95879n^{28} + 209 13742 09806n^{27} + 2499 00162 65627n^{26} − 5207 14067 41060n^{25} − 54148 26246 03305n^{24} + 1 13503 66559 47670n^{23} + 10 15625 74926 34225n^{22} − 21 44755 16412 16120n^{21} − 162 94096 27270 66475n^{20} + 347 32947 70953 49070n^{19} + 2204 33840 51661 24535n^{18} − 4756 00628 74275 98140n^{17} − 24711 28469 14283 38745n^{16} + 54178 57567 02842 75630n^{15} + 2 24553 00659 86805 62705n^{14} − 5 03284 58886 76454 01040n^{13} − 16 06855 01171 96963 84023n^{12} + 37 16994 61230 70381 69086n^{11} + 86 95461 09549 37429 31051n^{10} − 211 07916 80329 45240 31188n^{9} − 334 30445 29444 66400 34566n^{8} + 879 68807 39218 78041

$00320n^7 + 813\ 49521\ 96502\ 08284\ 87336n^6 - 2506\ 67851\ 32222\ 94610\ 74992n^5 - 903\ 45880\ 54892\ 79930\ 31941n^4 + 4313\ 59612\ 42008\ 54471\ 38874n^3 - 484\ 69065\ 37905\ 49352\ 73427n^2 - 3344\ 21481\ 66197\ 55765\ 92020n + 1672\ 10740\ 83098\ 77882\ 96010)$

$2\ 17350S_{44}(n) = n(n+1)(2n+1)(2415n^{42} + 50715n^{41} + 3\ 21195n^{40} - 5\ 07150n^{39} - 113\ 93970n^{38} + 173\ 44530n^{37} + 4480\ 21140n^{36} - 6807\ 03975n^{35} - 1\ 65549\ 86805n^{34} + 2\ 51728\ 32195n^{33} + 55\ 41775\ 09935n^{32} - 84\ 38526\ 81000n^{31} - 1659\ 14261\ 02440n^{30} + 2530\ 90654\ 94160n^{29} + 44049\ 21010\ 59780n^{28} - 67339\ 26843\ 36750n^{27} - 10\ 28528\ 91202\ 91850n^{26} + 15\ 76463\ 00226\ 06150n^{25} + 209\ 28862\ 29748\ 23350n^{24} - 321\ 81524\ 94735\ 38100n^{23} - 3672\ 49347\ 35761\ 99468n^{22} + 5669\ 64783\ 51010\ 68252n^{21} + 54893\ 04390\ 83060\ 11856n^{20} - 85174\ 38978\ 00095\ 51910n^{19} - 6\ 88723\ 56636\ 16748\ 65138n^{18} + 10\ 75672\ 54443\ 25170\ 73662n^{17} + 71\ 25217\ 01420\ 29697\ 78726n^{16} - 112\ 25661\ 79352\ 07132\ 04920n^{15} - 594\ 44165\ 05965\ 21020\ 00128n^{14} + 947\ 79078\ 48623\ 85096\ 02652n^{13} + 3885\ 83002\ 93985\ 85261\ 35486n^{12} - 6302\ 64043\ 65290\ 70440\ 04555n^{11} - 19140\ 52990\ 94194\ 99757\ 80033n^{10} + 31862\ 11508\ 23937\ 84856\ 72327n^9 + 67091\ 49035\ 65159\ 08746\ 66951n^8 - 1\ 16568\ 29307\ 59707\ 55548\ 36590n^7 - 1\ 52134\ 24077\ 06123\ 20900\ 17458n^6 + 2\ 86485\ 50769\ 39038\ 59124\ 44482n^5 + 1\ 81510\ 95075\ 45321\ 89464\ 42956n^4 - 4\ 15509\ 17997\ 87502\ 13758\ 86675n^3 - 36846\ 53835\ 66797\ 14761\ 02265n^2 + 2\ 63024\ 39752\ 43946\ 79020\ 96735n - 87674\ 79917\ 47982\ 26340\ 32245)$

$9660S_{45}(n) = n^2(n+1)^2(210n^{42} + 4410n^{41} + 27195n^{40} - 58800n^{39} - 10\ 51890n^{38} + 21\ 62580n^{37} + 435\ 60825n^{36} - 892\ 84230n^{35} - 16915\ 22070n^{34} + 34723\ 28370n^{33} + 5\ 95978\ 94755n^{32} - 12\ 26681\ 17880n^{31} - 188\ 25106\ 43580n^{30} + 388\ 76894\ 05040n^{29} + 5287\ 71301\ 14725n^{28} - 10964\ 19496\ 34490n^{27} - 1\ 31027\ 75103\ 48023n^{26} + 2\ 73019\ 69703\ 30536n^{25} + 28\ 39172\ 97766\ 27901n^{24} - 59\ 51365\ 65235\ 86338n^{23} - 532\ 52934\ 53908\ 54447n^{22} + 1124\ 57234\ 73052\ 95232n^{21} + 8543\ 59613\ 81418\ 49733n^{20} - 18211\ 76462\ 35889\ 94698n^{19} - 1\ 15581\ 63581\ 41522\ 57987n^{18} + 2\ 49375\ 03625\ 18935\ 10672n^{17} + 12\ 95704\ 37284\ 45468\ 27973n^{16} - 28\ 40783\ 78194\ 09871\ 66618n^{15} - 117\ 74147\ 75181\ 40584\ 76547n^{14} + 263\ 89079\ 28556\ 91041\ 19712n^{13} + 842\ 53373\ 71552\ 34101\ 21973n^{12} - 1948\ 95826\ 71661\ 59243\ 63658n^{11} - 4559\ 35307\ 41125\ 76410\ 28692n^{10} + 11067\ 66441\ 53913\ 12064\ 21042n^9 + 17528\ 82358\ 51288\ 97666\ 15083n^8 - 46125\ 31158\ 56491\ 07396\ 51208n^7 - 42654\ 57449\ 63548\ 82812\ 88214n^6 + 1\ 31434\ 46057\ 83588\ 73022\ 27636n^5 + 47371\ 69929\ 46780\ 45618\ 83417n^4 - 2\ 26177\ 85916\ 77149\ 64259\ 94470n^3 + 25414\ 13040\ 90592\ 55789\ 64990n^2 + 1\ 75349\ 59834\ 95964\ 52680\ 64490n - 87674\ 79917\ 47982$

$26340 32245)$

$9870 S_{46}(n)=n(n + 1)(2n + 1)(105n^{44} + 2310n^{43} + 15400n^{42} - 24255n^{41} - 5$
$95595n^{40} + 9 05520n^{39} + 257 83450n^{38} - 391 27935n^{37} - 10548$
$01055n^{36} + 16017 65550n^{35} + 3 93139 19540n^{34} - 5 97717 62085n^{33}$
$- 131 86807 77721n^{32} + 200 79070 47624n^{31} + 3949 88422 29812n^{30}$
$- 6025 22168 68530n^{29} - 1 04879 30496 28354n^{28} + 1 60331 56828$
$76796n^{27} + 24 48953 97543 99408n^{26} - 37 53596 74730 37510n^{25} - 498$
$32510 84284 90910n^{24} + 766 25564 63792 55120n^{23} + 8744 37788 27652$
$53380n^{22} - 13499 69464 73375 07630n^{21} - 1 30702 94565 27645 10670n^{20}$
$+ 2 02804 26580 28155 19820n^{19} + 16 39883 69431 51717 08760n^{18} - 25$
$61227 67437 41653 23050n^{17} - 169 65482 29122 84389 52570n^{16} + 267$
$28837 27402 97410 90380n^{15} + 1415 39399 15038 82935 63890n^{14} - 2256$
$73517 36259 73108 91025n^{13} - 9252 34710 03334 50385 38729n^{12} + 15006$
$88823 73131 62132 53606n^{11} + 45574 51692 74489 21727 01968n^{10}$
$- 75865 21950 98299 63656 79755n^{9} - 1 59748 04655 70993 97067$
$79111n^{8} + 2 77554 67959 05640 77430 08544n^{7} + 3 62238 90166 41992$
$88831 75202n^{6} - 6 82135 69229 15809 71962 67075n^{5} - 4 32186 25280$
$11248 63203 01635n^{4} + 9 89347 22534 74777 80785 85990n^{3} + 87733$
$36966 65792 54032 61940n^{2} - 6 26273 66717 36077 71441 85905n + 2$
$08757 88905 78692 57147 28635)$

$10080 S_{47}(n)=n^{2}(n + 1)^{2}(210n^{44} + 4620n^{43} + 30030n^{42} - 64680n^{41} - 12 62730n^{40}$
$+ 25 90140n^{39} + 574 40010n^{38} - 1174 70160n^{37} - 24639 42648n^{36}$
$+ 50453 55456n^{35} + 9 64300 75536n^{34} - 19 79055 06528n^{33} - 340$
$37696 25356n^{32} + 700 54447 57240n^{31} + 10756 14328 04676n^{30} - 22212$
$83103 66592n^{29} - 3 02157 06735 20221n^{28} + 6 26526 96574 07034n^{27}$
$+ 74 87540 49711 87513n^{26} - 156 01607 95997 82060n^{25} - 1622 44652$
$49516 71865n^{24} + 3400 90912 95031 25790n^{23} + 30431 45459 74650$
$16365n^{22} - 64263 81832 44331 58520n^{21} - 4 88225 01267 81512 81025n^{20}$
$+ 10 40713 84368 07357 20570n^{19} + 66 04929 48615 89172 20925n^{18}$
$- 142 50572 81599 85701 62420n^{17} - 740 43217 24119 58620 93357n^{16}$
$+ 1623 37007 29839 02943 49134n^{15} + 6728 35410 19544 82639 18689n^{14}$
$- 15080 07827 68928 68221 86512n^{13} - 48146 71473 82915 57681$
$05594n^{12} + 1 11373 50775 34759 83583 97700n^{11} + 2 60544 90425 93528$
$91540 27994n^{10} - 6 32463 31627 21817 66664 53688n^{9} - 10 01687 21057$
$99484 11727 02694n^{8} + 26 35837 73743 20785 90118 59076n^{7} + 24 37501$
$95432 21500 13342 49782n^{6} - 75 10841 64607 63786 16803 58640n^{5} - 27$
$07062 74704 61529 00509 08260n^{4} + 129 24967 14016 86844 17821$
$75160n^{3} - 14 52294 23269 54800 37376 00340n^{2} - 100 20378 67477$
$77243 43069 74480n + 50 10189 33738 88621 71534 87240)$

$$3\ 24870 S_{48}(n) = n(n+1)(2n+1)(3315n^{46} + 76245n^{45} + 5\ 33715n^{44} - 8\ 38695n^{43} - 224\ 21113n^{42} + 340\ 51017n^{41} + 10638\ 56651n^{40} - 16128\ 10485n^{39} - 4\ 79457\ 88891n^{38} + 7\ 27250\ 88579n^{37} + 197\ 86793\ 30277n^{36} - 300\ 43815\ 39705n^{35} - 7389\ 86311\ 49759n^{34} + 11235\ 01374\ 94491n^{33} + 2\ 47994\ 91238\ 66123n^{32} - 3\ 77609\ 87545\ 46430n^{31} - 74\ 29154\ 29098\ 28322n^{30} + 113\ 32536\ 37420\ 15698n^{29} + 1972\ 68395\ 13017\ 07774n^{28} - 3015\ 68860\ 88235\ 69510n^{27} - 46062\ 91721\ 57178\ 26970n^{26} + 70602\ 22012\ 79885\ 25210n^{25} + 9\ 37312\ 35683\ 92245\ 54110n^{24} - 14\ 41269\ 64532\ 28310\ 93770n^{23} - 164\ 47529\ 47536\ 77225\ 14198n^{22} + 253\ 91929\ 03571\ 29993\ 18182n^{21} + 2458\ 42620\ 15852\ 61281\ 16106n^{20} - 3814\ 59894\ 75564\ 56918\ 33250n^{19} - 30845\ 00597\ 70154\ 99977\ 41030n^{18} + 48174\ 80843\ 93014\ 78425\ 28170n^{17} + 3\ 19108\ 24377\ 20418\ 57703\ 41660n^{16} - 5\ 02749\ 76987\ 77135\ 25767\ 76575n^{15} - 26\ 62251\ 99922\ 00385\ 62794\ 82737n^{14} + 42\ 44752\ 88376\ 89146\ 07076\ 12393n^{13} + 174\ 02984\ 41323\ 45332\ 60418\ 03999n^{12} - 282\ 26853\ 06173\ 62571\ 94165\ 12195n^{11} - 857\ 22314\ 47647\ 79445\ 23152\ 67229n^{10} + 1426\ 96898\ 24558\ 50453\ 81811\ 56941n^{9} + 3004\ 74326\ 60549\ 94512\ 58225\ 03943n^{8} - 5220\ 59939\ 03104\ 16995\ 78243\ 34385n^{7} - 6813\ 44732\ 49531\ 76155\ 30469\ 89151n^{6} + 12830\ 47068\ 25849\ 72730\ 84826\ 50919n^{5} + 8129\ 10555\ 57574\ 17148\ 40300\ 28257n^{4} - 18608\ 89367\ 49286\ 12088\ 02863\ 67845n^{3} - 1650\ 20015\ 82874\ 07398\ 07256\ 63043n^{2} + 11779\ 74707\ 48954\ 17141\ 12316\ 78487n - 3926\ 58235\ 82984\ 72380\ 37438\ 92829)$$

$$66300 S_{49}(n) = n^{2}(n+1)^{2}(1326n^{46} + 30498n^{45} + 2\ 08403n^{44} - 4\ 47304n^{43} - 94\ 93055n^{42} + 194\ 33414n^{41} + 4723\ 18327n^{40} - 9640\ 70068n^{39} - 2\ 22742\ 14521n^{38} + 4\ 55124\ 99110n^{37} + 96\ 31462\ 50651n^{36} - 197\ 18050\ 00412n^{35} - 3776\ 47277\ 20447n^{34} + 7750\ 12604\ 41306n^{33} + 1\ 33360\ 94371\ 33935n^{32} - 2\ 74472\ 01347\ 09176n^{31} - 42\ 14753\ 18028\ 41998n^{30} + 87\ 03978\ 37403\ 93172n^{29} + 1184\ 02185\ 52344\ 41379n^{28} - 2455\ 08349\ 42092\ 75930n^{27} - 29340\ 59363\ 56841\ 07751n^{26} + 61136\ 27076\ 55774\ 91432n^{25} + 6\ 35771\ 07240\ 69208\ 59487n^{24} - 13\ 32678\ 41557\ 94192\ 10406n^{23} - 119\ 24858\ 67581\ 14338\ 83135n^{22} + 251\ 82395\ 76720\ 22869\ 76676n^{21} + 1913\ 15691\ 28674\ 99981\ 26683n^{20} - 4078\ 13778\ 34070\ 22832\ 30042n^{19} - 25882\ 05525\ 29239\ 58602\ 41919n^{18} + 55842\ 24828\ 92549\ 40037\ 13880n^{17} + 2\ 90145\ 51211\ 69004\ 03880\ 77559n^{16} - 6\ 36133\ 27252\ 30557\ 47798\ 68998n^{15} - 26\ 36570\ 66946\ 03310\ 44499\ 80418n^{14} + 59\ 09274\ 61144\ 37178\ 36798\ 29834n^{13} + 188\ 66756\ 12067\ 02527\ 32946\ 72275n^{12} - 436\ 42786\ 85278\ 42233\ 02691\ 74384n^{11} - 1020\ 97042\ 21862\ 33256\ 76407\ 99967n^{10} + 2478\ 36871\ 29003\ 08746\ 55507\ 74318n^{9} + 3925\ 20827\ 53129\ 16548\ 14335\ 94231n^{8} - 10328\ 78526\ 35261\ 41842\ 84179\ 62780n^{7} - 9551\ 58730\ 30432\ 41647\ 83421\ 46185n^{6} + 29431\ 95986\ 96126$$

$25138\ 51022\ 55150n^5 + 10607\ 88735\ 67137\ 11788\ 37139\ 11035n^4 - 50647\ 73458\ 30400\ 48715\ 25300\ 77220n^3 + 5690\ 95550\ 00276\ 62455\ 75455\ 74465n^2 + 39265\ 82358\ 29847\ 23803\ 74389\ 28290n - 19632\ 91179\ 14923\ 61901\ 87194\ 64145)$

$43758S_{50}(n)=n(n+1)(2n+1)(429n^{48} + 10296n^{47} + 75504n^{46} - 1\ 18404n^{45} - 34\ 33716n^{44} + 52\ 09776n^{43} + 1778\ 55964n^{42} - 2693\ 88834n^{41} - 87905\ 56346n^{40} + 1\ 33205\ 28936n^{39} + 39\ 96901\ 20544n^{38} - 60\ 61954\ 45284n^{37} - 1652\ 89021\ 29916n^{36} + 2509\ 64509\ 17516n^{35} + 61761\ 92152\ 26134n^{34} - 93897\ 70482\ 97959n^{33} - 20\ 72907\ 21345\ 82867n^{32} + 31\ 56309\ 67260\ 23280n^{31} + 620\ 99683\ 64344\ 49376n^{30} - 947\ 27680\ 30146\ 85704n^{29} - 16489\ 62159\ 06734\ 41320n^{28} + 25208\ 07078\ 75175\ 04832n^{27} + 3\ 85039\ 59547\ 57661\ 05512n^{26} - 5\ 90163\ 42860\ 74079\ 10684n^{25} - 78\ 34990\ 69817\ 10415\ 13900n^{24} + 120\ 47567\ 76156\ 02662\ 26192n^{23} + 1374\ 84855\ 64267\ 15926\ 27616n^{22} - 2122\ 51067\ 34478\ 75220\ 54520n^{21} - 20549\ 97867\ 94921\ 24293\ 83888n^{20} + 31886\ 22335\ 59621\ 24051\ 03092n^{19} + 2\ 57833\ 33201\ 06135\ 60276\ 01406n^{18} - 4\ 02693\ 10969\ 39014\ 02439\ 53655n^{17} - 26\ 67425\ 05880\ 27412\ 68456\ 10963n^{16} + 42\ 02484\ 14305\ 10626\ 03903\ 93272n^{15} + 222\ 53758\ 20438\ 98588\ 73884\ 97936n^{14} - 354\ 81879\ 37811\ 03196\ 12779\ 43540n^{13} - 1454\ 71505\ 81890\ 31215\ 21502\ 57764n^{12} + 2359\ 48198\ 41740\ 98420\ 88643\ 58416n^{11} + 7165\ 52625\ 30103\ 26664\ 28367\ 95708n^{10} - 11928\ 03037\ 16025\ 39206\ 86873\ 72770n^9 - 25116\ 64190\ 12752\ 67699\ 90040\ 54970n^8 + 43638\ 97803\ 77141\ 71153\ 28497\ 68840n^7 + 56953\ 59018\ 10418\ 64552\ 21172\ 12000n^6 - 1\ 07249\ 87429\ 04198\ 82404\ 96007\ 02420n^5 - 67951\ 17424\ 11895\ 27607\ 99019\ 86300n^4 + 1\ 55551\ 69850\ 69942\ 32614\ 46533\ 30660n^3 + 13794\ 01924\ 59690\ 83814\ 81940\ 87930n^2 - 98466\ 87812\ 24507\ 42029\ 46177\ 97225n + 32822\ 29270\ 74835\ 80676\ 48725\ 99075)$

$3432S_{51}(n)=n^2(n+1)^2(66n^{48} + 1584n^{47} + 11352n^{46} - 24288n^{45} - 5\ 58371n^{44} + 11\ 41030n^{43} + 302\ 68271n^{42} - 616\ 77572n^{41} - 15624\ 97057n^{40} + 31866\ 71686n^{39} + 7\ 42892\ 74785n^{38} - 15\ 17652\ 21256n^{37} - 321\ 84288\ 79787n^{36} + 658\ 86229\ 80830n^{35} + 12625\ 15914\ 52327n^{34} - 25909\ 18058\ 85484n^{33} - 4\ 45889\ 64462\ 18412n^{32} + 9\ 17688\ 46983\ 22308n^{31} + 140\ 92323\ 18627\ 95646n^{30} - 291\ 02334\ 84239\ 13600n^{29} - 3958\ 88612\ 92595\ 29743n^{28} + 8208\ 79560\ 69429\ 73086n^{27} + 98103\ 13247\ 84950\ 88131n^{26} - 2\ 04415\ 06056\ 39331\ 49348n^{25} - 21\ 25763\ 30944\ 89917\ 40055n^{24} + 44\ 55941\ 67946\ 19166\ 29458n^{23} + 398\ 71945\ 16157\ 94573\ 14971n^{22} - 841\ 99832\ 00262\ 08312\ 59400n^{21} - 6396\ 82961\ 53802\ 37668\ 46791n^{20} + 13635\ 65755\ 07866\ 83649\ 52982n^{19} + 86539\ 21549\ 73743\ 91898\ 73227n^{18} - 1\ 86714\ 08854\ 55354\ 67446\ 99436n^{17} - 9\ 70130\ 26134$

$16180\ 93795\ 70652n^{16} + 21\ 26974\ 61122\ 87716\ 55038\ 40740n^{15} + 88$
$15635\ 21202\ 41112\ 92835\ 70222n^{14} - 197\ 58245\ 03527\ 69942\ 40709$
$81184n^{13} - 630\ 82868\ 03340\ 69585\ 63280\ 69907n^{12} + 1459\ 23981\ 10209$
$09113\ 67271\ 20998n^{11} + 3413\ 71574\ 41076\ 56322\ 86213\ 73311n^{10} - 8286$
$67129\ 92362\ 21759\ 39698\ 67620n^{9} - 13124\ 32270\ 04178\ 21589\ 44261$
$15585n^{8} + 34535\ 31670\ 00718\ 64938\ 28220\ 98790n^{7} + 31936\ 67832\ 98544$
$81658\ 62937\ 88225n^{6} - 98408\ 67335\ 97808\ 28255\ 54096\ 75240n^{5} - 35468$
$52219\ 65912\ 44086\ 87188\ 71675n^{4} + 1\ 69345\ 71775\ 29633\ 16429\ 28474$
$18590n^{3} - 19028\ 27346\ 15144\ 96861\ 66785\ 11145n^{2} - 1\ 31289\ 17082$
$99343\ 22705\ 94903\ 96300n + 65644\ 58541\ 49671\ 61352\ 97451\ 98150)$

$17490S_{52}(n) = n(n + 1)(2n + 1)(165n^{50} + 4125n^{49} + 31625n^{48} - 49500n^{47} - 15$
$52100n^{46} + 23\ 52900n^{45} + 874\ 36800n^{44} - 1323\ 31650n^{43} - 47199$
$95830n^{42} + 71461\ 59570n^{41} + 23\ 53795\ 03810n^{40} - 35\ 66423\ 35500n^{39}$
$- 1072\ 45867\ 68060n^{38} + 1626\ 52013\ 19840n^{37} + 44373\ 06229\ 62770n^{36}$
$- 67372\ 85351\ 04075n^{35} - 16\ 58248\ 25579\ 10665n^{34} + 25\ 21058\ 81044$
$18035n^{33} + 556\ 57247\ 02009\ 53855n^{32} - 847\ 46399\ 93536\ 39800n^{31}$
$- 16673\ 79542\ 50822\ 70920n^{30} + 25434\ 42513\ 73002\ 26280n^{29} + 4\ 42747$
$95281\ 67069\ 04240n^{28} - 6\ 76839\ 14179\ 37104\ 69500n^{27} - 103\ 38355$
$41882\ 23770\ 91220n^{26} + 158\ 45952\ 69913\ 04208\ 71580n^{25} + 2103\ 70383$
$49274\ 12829\ 96860n^{24} - 3234\ 78551\ 58867\ 71349\ 31080n^{23} - 36914\ 83970$
$38629\ 05909\ 70096n^{22} + 56989\ 65231\ 37377\ 44539\ 20684n^{21} + 5\ 51769$
$26226\ 49203\ 40608\ 45022n^{20} - 8\ 56148\ 71955\ 42493\ 83182\ 27875n^{19} - 69$
$22854\ 26794\ 05713\ 03854\ 74001n^{18} + 108\ 12355\ 76168\ 79816\ 47373$
$24939n^{17} + 716\ 20666\ 01465\ 17256\ 78655\ 77967n^{16} - 1128\ 37176\ 90282$
$15793\ 41670\ 29420n^{15} - 5975\ 15937\ 25201\ 29489\ 51649\ 63796n^{14} + 9526$
$92494\ 32943\ 02130\ 98309\ 60404n^{13} + 39059\ 26466\ 26880\ 22068\ 69393$
$58992n^{12} - 63352\ 35946\ 56791\ 84168\ 53245\ 18690n^{11} - 1\ 92395\ 19436$
$42633\ 62786\ 32631\ 53046n^{10} + 3\ 20268\ 97127\ 92346\ 36263\ 75569\ 88914n^{9}$
$+ 6\ 74384\ 68993\ 77707\ 87707\ 71436\ 20802n^{8} - 11\ 71711\ 52054\ 62734$
$99693\ 44939\ 25660n^{7} - 15\ 29210\ 37000\ 33129\ 78698\ 18184\ 21436n^{6}$
$+ 28\ 79671\ 31527\ 81062\ 17893\ 99745\ 94984n^{5} + 18\ 24496\ 75206\ 11069$
$02233\ 65777\ 04342n^{4} - 41\ 76580\ 78573\ 07134\ 62297\ 48538\ 54005n^{3} - 3$
$70370\ 98465\ 45067\ 52066\ 27318\ 69431n^{2} + 26\ 43846\ 86984\ 71168\ 59248$
$15247\ 31149n - 8\ 81282\ 28994\ 90389\ 53082\ 71749\ 10383)$

$5940S_{53}(n) = n^{2}(n + 1)^{2}(110n^{50} + 2750n^{49} + 20625n^{48} - 44000n^{47} - 10\ 92212n^{46}$
$+ 22\ 28424n^{45} + 642\ 77939n^{44} - 1307\ 84302n^{43} - 36177\ 50565n^{42}$
$+ 73662\ 85432n^{41} + 18\ 83077\ 89451n^{40} - 38\ 39818\ 64334n^{39} - 897$
$05102\ 20273n^{38} + 1832\ 50023\ 04880n^{37} + 38881\ 00240\ 13163n^{36} - 79594$
$50503\ 31206n^{35} - 15\ 25385\ 57593\ 26386n^{34} + 31\ 30365\ 65689\ 83978n^{33}$

+ 538 74365 36999 84005n^{32} − 1108 79096 39689 51988n^{31} − 17027
08486 70691 72174n^{30} + 35162 96069 81072 96336n^{29} + 4 78334 19288
22352 01227n^{28} − 9 91831 34646 25776 98790n^{27} − 118 53359 68608
25870 15667n^{26} + 246 98550 71862 77517 30124n^{25} + 2568 46431 60428
87309 59359n^{24} − 5383 91413 92720 52136 48842n^{23} − 48175 48135 16625
07447 10071n^{22} + 1 01734 87684 25970 67030 68984n^{21} + 7 72900 20899
18616 30079 33603n^{20} − 16 47535 29482 63203 27189 36190n^{19} − 104
56144 97302 20149 52957 95718n^{18} + 225 59825 24087 03502 33105
27626n^{17} + 1172 16485 03306 54569 82766 31541n^{16} − 2569 92795 30700
12641 98637 90708n^{15} − 10651 53633 61690 18388 35144 88010n^{14}
+ 23873 00062 54080 49418 68927 66728n^{13} + 76220 19796 59340 93221
89614 19379n^{12} − 1 76313 39655 72762 35862 48156 05486n^{11} − 4 12463
95087 50796 64937 79079 98197n^{10} + 10 01241 29830 74355 65738 06316
01880n^{9} + 15 85753 00328 36817 15592 21873 77387n^{8} − 41 72747 30487
47989 96922 50063 56654n^{7} − 38 58765 49460 78999 25531 41296 62369n^{6}
+ 118 90278 29409 05988 47985 32656 81392n^{5} + 42 85502 33632 14460
58325 79350 37035n^{4} − 204 61282 96673 34909 64636 91357 55462n^{3}
+ 22 99100 87382 53949 04573 99936 84284n^{2} + 158 63081 21908 27011
55488 91483 86894n − 79 31540 60954 13505 77744 45741 93447)

43890$S_{54}(n)=n(n+1)(2n+1)($399n^{52} + 10374n^{51} + 82992n^{50} − 1 29675n^{49}
− 43 83015n^{48} + 66 39360n^{47} + 2676 34380n^{46} − 4047 71250n^{45} − 1
57202 92770n^{44} + 2 37828 24780n^{43} + 85 62928 12440n^{42} − 129 63306
31050n^{41} − 4279 19795 01930n^{40} + 6483 61345 68420n^{39} + 1 95071
88347 60010n^{38} − 2 95849 63194 24225n^{37} − 80 72117 13299 65185n^{36}
+ 122 56100 51546 59890n^{35} + 3016 69133 90190 95520n^{34} − 4586 31751
11059 73225n^{33} − 1 01252 63130 83010 13149n^{32} + 1 54172 10571 80045
06336n^{31} + 30 33331 47124 59447 78408n^{30} − 46 27083 25972 79194
20780n^{29} − 805 45663 20512 91154 77324n^{28} + 1231 32036 43755 76329
26376n^{27} + 18807 76141 92604 18551 45168n^{26} − 28827 30231 10784
15991 80940n^{25} − 3 82710 39539 76667 71209 92100n^{24} + 5 88479 24425
20393 64810 78620n^{23} + 67 15628 29229 74125 26803 82890n^{22} − 103
67682 06057 21384 72611 13645n^{21} − 1003 79069 88397 38637 05043
48445n^{20} + 1557 52445 85624 68647 93870 79490n^{19} + 12594 20776 30456
59883 73895 20200n^{18} − 19670 07387 38497 24149 57778 20045n^{17} − 1
30293 88068 65213 29293 71651 27825n^{16} + 2 05275 85796 67068 56015
36366 01760n^{15} + 10 87014 05013 88441 53997 29439 39660n^{14} − 17
33159 00419 16196 59003 62342 10370n^{13} − 71 05746 78089 71765 66256
62052 58482n^{12} + 115 25199 67344 15746 78886 74249 92908n^{11} + 350
00954 18645 41416 36724 77917 01304n^{10} − 582 64031 11640 19997 94530
54000 48410n^{9} − 1226 85536 47900 82831 86107 21614 28842n^{8} + 2131

$60320\ 27671\ 34246\ 76426\ 09421\ 67468n^7 + 2781\ 97292\ 18710\ 08261\ 16039\ 37984\ 76694n^6 - 5238\ 76098\ 41900\ 79515\ 12272\ 11687\ 98775n^5 - 3319\ 16436\ 07966\ 25033\ 31271\ 49155\ 43927n^4 + 7598\ 12703\ 32899\ 77307\ 53043\ 29577\ 15278n^3 + 673\ 78698\ 87406\ 75763\ 84584\ 93001\ 57584n^2 - 4809\ 74399\ 97560\ 02299\ 53399\ 04290\ 94015n + 1603\ 24799\ 99186\ 67433\ 17799\ 68096\ 98005)$

$6384S_{55}(n) = n^2(n+1)^2(114n^{52} + 2964n^{51} + 23218n^{50} - 49400n^{49} - 13\ 20120n^{48} + 26\ 89640n^{47} + 840\ 69452n^{46} - 1708\ 28544n^{45} - 51402\ 89849n^{44} + 1\ 04514\ 08242n^{43} + 29\ 17529\ 17965n^{42} - 59\ 39572\ 44172n^{41} - 1521\ 59580\ 81361n^{40} + 3102\ 58734\ 06894n^{39} + 72519\ 35624\ 52973n^{38} - 1\ 48141\ 29983\ 12840n^{37} - 31\ 43579\ 01225\ 15900n^{36} + 64\ 35299\ 32433\ 44640n^{35} + 1233\ 32865\ 04089\ 22520n^{34} - 2531\ 01029\ 40611\ 89680n^{33} - 43559\ 64668\ 69311\ 76594n^{32} + 89650\ 30366\ 79235\ 42868n^{31} + 13\ 76712\ 36366\ 58139\ 87958n^{30} - 28\ 43075\ 03099\ 95515\ 18784n^{29} - 386\ 75373\ 48121\ 57220\ 60035n^{28} + 801\ 93821\ 99343\ 09956\ 38854n^{27} + 9583\ 95124\ 15025\ 43957\ 40231n^{26} - 19969\ 84070\ 29393\ 97871\ 19316n^{25} - 2\ 07671\ 39449\ 54261\ 40170\ 39271n^{24} + 4\ 35312\ 62969\ 37916\ 78211\ 97858n^{23} + 38\ 95195\ 03417\ 03893\ 61232\ 61875n^{22} - 82\ 25702\ 69803\ 45704\ 00677\ 21608n^{21} - 624\ 92308\ 85722\ 34919\ 93583\ 70304n^{20} + 1332\ 10320\ 41248\ 15543\ 87844\ 62216n^{19} + 8454\ 24329\ 95731\ 44586\ 44934\ 20572n^{18} - 18240\ 58980\ 32711\ 04716\ 77713\ 03360n^{17} - 94774\ 57378\ 56494\ 03613\ 86604\ 92086n^{16} + 2\ 07789\ 73737\ 45699\ 11944\ 50922\ 87532n^{15} + 8\ 61222\ 56281\ 04151\ 56056\ 83126\ 08922n^{14} - 19\ 30234\ 86299\ 54002\ 24058\ 17175\ 05376n^{13} - 61\ 62731\ 09893\ 47986\ 85703\ 89622\ 02377n^{12} + 142\ 55697\ 06086\ 49975\ 95465\ 96419\ 10130n^{11} + 333\ 49485\ 89853\ 95639\ 19830\ 91944\ 52317n^{10} - 809\ 54668\ 85794\ 41254\ 35127\ 80308\ 14764n^9 - 1282\ 14956\ 26316\ 35957\ 95629\ 49536\ 90529n^8 + 3373\ 84581\ 38427\ 13170\ 26386\ 79381\ 95822n^7 + 3119\ 97800\ 47488\ 78762\ 03055\ 76869\ 20445n^6 - 9613\ 80182\ 33404\ 70694\ 32498\ 33120\ 36712n^5 - 3465\ 01311\ 03604\ 17724\ 21379\ 06018\ 54506n^4 + 16543\ 82804\ 40613\ 06142\ 75256\ 45157\ 45724n^3 - 1858\ 92202\ 23559\ 83338\ 66429\ 50190\ 80842n^2 - 12825\ 98399\ 93493\ 39465\ 42397\ 44775\ 84040n + 6412\ 99199\ 96746\ 69732\ 71198\ 72387\ 92020)$

$49590S_{56}(n) = n(n+1)(2n+1)(435n^{54} + 11745n^{53} + 97875n^{52} - 1\ 52685n^{51} - 55\ 47555n^{50} + 83\ 97675n^{49} + 3660\ 19875n^{48} - 5532\ 28650n^{47} - 2\ 33131\ 33350n^{46} + 3\ 52463\ 14350n^{45} + 138\ 18638\ 86650n^{44} - 209\ 04189\ 87150n^{43} - 7543\ 05484\ 46010n^{42} + 11419\ 10321\ 62590n^{41} + 3\ 77146\ 09093\ 00620n^{40} - 5\ 71428\ 68800\ 32225n^{39} - 171\ 94770\ 02828\ 89095n^{38} + 260\ 77869\ 38643\ 49755n^{37} + 7115\ 45322\ 40410\ 31665n^{36} - 10803\ 56918\ 29937\ 22375n^{35} - 2\ 65918\ 95799\ 59139\ 26105n^{34} + 4\ 04280\ 22158$

$53677\ 50345n^{33} + 89\ 25356\ 23343\ 28696\ 98085n^{32} - 135\ 90174\ 46094\ 19884\ 22300n^{31} - 2673\ 86399\ 19960\ 37527\ 10980n^{30} + 4078\ 74686\ 02987\ 66232\ 77620n^{29} + 71000\ 54020\ 15687\ 06391\ 27580n^{28} - 1\ 08540\ 18373\ 25024\ 42703\ 30180n^{27} - 16\ 57893\ 42945\ 05486\ 28806\ 01060n^{26} + 25\ 41110\ 23604\ 20741\ 64560\ 66680n^{25} + 337\ 35703\ 04755\ 48993\ 86200\ 70310n^{24} - 518\ 74109\ 68935\ 33861\ 61581\ 38805n^{23} - 5919\ 78804\ 19611\ 08883\ 23966\ 26259n^{22} + 9139\ 05261\ 13884\ 30255\ 66740\ 08791n^{21} + 88483\ 57769\ 89845\ 44451\ 76270\ 60693n^{20} - 1\ 37294\ 89285\ 41710\ 31805\ 47775\ 95435n^{19} - 11\ 10172\ 23267\ 03555\ 76434\ 86402\ 33189n^{18} + 17\ 33905\ 79543\ 26188\ 80555\ 03491\ 47501n^{17} + 114\ 85331\ 28480\ 85896\ 17501\ 00848\ 42093n^{16} - 180\ 94949\ 82492\ 91938\ 66529\ 03018\ 36890n^{15} - 958\ 19668\ 67030\ 77107\ 83282\ 92015\ 13654n^{14} + 1527\ 76977\ 91792\ 61631\ 08188\ 89531\ 88926n^{13} + 6263\ 67526\ 81761\ 86368\ 92712\ 91539\ 91338n^{12} - 10159\ 39779\ 18539\ 10368\ 93163\ 82075\ 81470n^{11} - 30853\ 14152\ 90083\ 21090\ 50209\ 54224\ 49114n^{10} + 51359\ 41118\ 94394\ 36820\ 21896\ 22374\ 64406n^{9} + 1\ 08146\ 60081\ 50795\ 99765\ 00757\ 68634\ 54248n^{8} - 1\ 87899\ 60681\ 73391\ 18057\ 62084\ 64139\ 13575n^{7} - 2\ 45229\ 32669\ 52660\ 64607\ 87484\ 10035\ 37649n^{6} + 4\ 61793\ 79345\ 15686\ 55940\ 62268\ 47122\ 63261n^{5} + 2\ 92582\ 44571\ 32587\ 54238\ 91509\ 94042\ 24183n^{4} - 6\ 69770\ 56529\ 56724\ 59328\ 68399\ 14624\ 67905n^{3} - 59393\ 93884\ 31503\ 63477\ 24273\ 05007\ 85471n^{2} + 4\ 23976\ 19091\ 25617\ 74880\ 20609\ 14824\ 12159n - 1\ 41325\ 39697\ 08539\ 24960\ 06869\ 71608\ 04053)$

$1740S_{57}(n)=n^2(n+1)^2(30n^{54} + 810n^{53} + 6615n^{52} - 14040n^{51} - 4\ 02805n^{50} + 8\ 19650n^{49} + 276\ 74475n^{48} - 561\ 68600n^{47} - 18321\ 34586n^{46} + 37204\ 37772n^{45} + 11\ 29809\ 91667n^{44} - 22\ 96824\ 21106n^{43} - 642\ 53765\ 82795n^{42} + 1308\ 04355\ 86696n^{41} + 33526\ 74311\ 65903n^{40} - 68361\ 52979\ 18502n^{39} - 15\ 98074\ 16113\ 56244n^{38} + 32\ 64509\ 85206\ 30990n^{37} + 692\ 75528\ 60397\ 05439n^{36} - 1418\ 15567\ 06000\ 41868n^{35} - 27179\ 24238\ 25642\ 52633n^{34} + 55776\ 64043\ 57285\ 47134n^{33} + 9\ 59938\ 97115\ 69920\ 87315n^{32} - 19\ 75654\ 58274\ 97127\ 21764n^{31} - 303\ 39098\ 36733\ 99549\ 37362n^{30} + 626\ 53851\ 31742\ 96225\ 96488n^{29} + 8523\ 03001\ 93271\ 61719\ 55451n^{28} - 17672\ 59855\ 18286\ 19665\ 07390n^{27} - 2\ 11204\ 95757\ 54723\ 14344\ 78343n^{26} + 4\ 40082\ 51370\ 27732\ 48354\ 64076n^{25} + 45\ 76528\ 74258\ 31738\ 63155\ 31591n^{24} - 95\ 93139\ 99886\ 91209\ 74665\ 27258n^{23} - 858\ 39805\ 23813\ 16269\ 71246\ 00046n^{22} + 1812\ 72750\ 47513\ 23749\ 17157\ 27350n^{21} + 13771\ 65347\ 53931\ 08003\ 64331\ 05471n^{20} - 29356\ 03445\ 55375\ 39756\ 45819\ 38292n^{19} - 1\ 86309\ 18149\ 19761\ 83384\ 76316\ 09977n^{18} + 4\ 01974\ 39743\ 94899\ 06525\ 98451\ 58246n^{17} + 20\ 88581\ 15893\ 74644\ 00356\ 01989\ 82835n^{16} - 45\ 79136\ 71531\ 44187\ 07238\ 02431\ 23916n^{15} - 189\ 79069\ 45393\ 02284\ 91285\ 74042\ 56768n^{14} + 425\ 37275\ 62317\ 48756\ 89809\ 50516$

37452n^{13} + 1358 10308 04741 89836 52505 42967 36339n^{12} − 3141 57891
71801 28429 94820 36451 10130n^{11} − 7349 34541 25999 59679 32464
36227 51979n^{10} + 17840 26974 23800 47788 59749 08906 14088n^{9}
+ 28255 18820 60847 28918 82465 26776 65903n^{8} − 74350 64615 45495
05626 24679 62459 45894n^{7} − 68756 07050 24796 94391 05198 90628
46470n^{6} + 2 11862 78715 95088 94408 35077 43716 38834n^{5} + 76359
73245 49512 58497 30629 33049 93927n^{4} − 3 64582 25206 94114 11402
96336 09816 26688n^{3} + 40965 72906 38517 80741 41298 33300 09291n^{2}
+ 2 82650 79394 17078 49920 13739 43216 08106n − 1 41325 39697
08539 24960 06869 71608 04053)

1770$S_{58}(n)=n(n+1)(2n+1)($15n^{56} + 420n^{55} + 3640n^{54} − 5670n^{53} − 2
20878n^{52} + 3 34152n^{51} + 157 01166n^{50} − 237 18825n^{49} − 10810
08045n^{48} + 16333 71480n^{47} + 6 94863 06240n^{46} − 10 50461 45100n^{45}
− 412 75342 07460n^{44} + 624 38243 83740n^{43} + 22542 21707 46270n^{42}
− 34125 51683 11275n^{41} − 11 27233 50978 55215n^{40} + 17 07913 02309
38460n^{39} + 513 94210 32599 23080n^{38} − 779 45272 00053 53850n^{37}
− 21267 85745 65674 84930n^{36} + 32291 51254 48539 04320n^{35} + 7 94824
60003 40733 02310n^{34} − 12 08382 65632 35369 05625n^{33} − 266 77661
81752 11728 54445n^{32} + 406 20684 05444 35277 34480n^{31} + 7992 11210
36973 00261 96000n^{30} − 12191 27157 58181 68031 61240n^{29} − 2 12218
83183 21269 00105 61344n^{28} + 3 24423 88353 60994 34174 22636n^{27} + 49
55401 86530 81493 79578 86418n^{26} − 75 95314 73973 02737 86455
40945n^{25} − 1008 35170 17683 48678 69140 62445n^{24} + 1550 50412 63511
74386 96938 64140n^{23} + 17694 09797 17244 51052 97493 87960n^{22}
− 27316 39902 07622 63772 94710 14010n^{21} − 2 64475 19434 01934
19839 85242 70450n^{20} + 4 10370 99102 06712 61646 25219 12680n^{19} + 33
18276 95747 58425 26292 69841 15530n^{18} − 51 82600 93172 40994 20262
17371 29635n^{17} − 343 29367 12882 74165 75356 78284 62895n^{16} + 540
85351 15910 31745 73166 26112 59160n^{15} + 2864 02586 25371 40018
95854 97840 93120n^{14} − 4566 46554 96012 25901 30365 59817 69260n^{13}
− 18721 96826 76225 83672 82591 75979 89940n^{12} + 30366 18517 62344
88459 89070 43878 69540n^{11} + 92219 26615 47075 21615 23091 98838
20810n^{10} − 1 53511 99182 01785 26652 79173 20196 65985n^{9} − 3 23247
47724 36379 99317 45217 11736 50925n^{8} + 5 61627 21177 55462 62302
57412 27703 09380n^{7} + 7 32984 30651 50480 40785 66464 17724 77080n^{6}
− 13 80290 06566 03451 92329 78402 40438 70310n^{5} − 8 74521 59152
28038 91217 10194 72752 01598n^{4} + 20 01927 42011 43784 32990 54493
29347 37552n^{3} + 1 77526 99345 06742 74290 28611 56287 81026n^{2} − 12
67254 20023 32006 27930 70163 99105 40315n + 4 22418 06674 44002
09310 23387 99701 80105)

360 $S_{59}(n)=n^2(n+1)^2(6n^{56}$ + 168n^{55} + 1428n^{54} − 3024n^{53} − 92907n^{52} + 1
88838n^{51} + 68 67211n^{50} − 139 23260n^{49} − 4907 44860n^{48} + 9954
12980n^{47} + 3 27699 31430n^{46} − 6 65352 75840n^{45} − 202 48795 15745n^{44}
+ 411 62943 07330n^{43} + 11521 35814 49685n^{42} − 23454 34572 06700n^{41}
− 6 01240 30842 81190n^{40} + 12 25934 96257 69080n^{39} + 286 59349
30084 01980n^{38} − 585 44633 56425 73040n^{37} − 12423 74011 26905
88399n^{36} + 25432 92656 10237 49838n^{35} + 4 87428 16496 31086 14823n^{34}
− 10 00289 25648 72409 79484n^{33} − 172 15398 65331 49210 30340n^{32}
+ 354 31086 56311 70830 40164n^{31} + 5440 96805 91011 70359 17422n^{30}
− 11236 24698 38335 11548 75008n^{29} − 1 52850 73644 94382 73778
21309n^{28} + 3 16937 71988 27100 59105 17626n^{27} + 37 87717 91644 10062
20197 77817n^{26} − 78 92373 55276 47224 99500 73260n^{25} − 820 74777
68557 68788 14654 29000n^{24} + 1720 41928 92391 84801 28809 31260n^{23}
+ 15394 38148 48700 49918 57033 99970n^{22} − 32509 18225 89792 84638
42877 31200n^{21} − 2 46978 76085 23860 70614 49840 35055n^{20} + 5 26466
70396 37514 25867 42558 01310n^{19} + 33 41240 82220 13407 19434 72049
95335n^{18} − 72 08948 34836 64328 64736 86657 91980n^{17} − 374 56300
18267 92483 21085 42039 30874n^{16} + 821 21548 71372 49295 06907 70736
53728n^{15} + 3403 67775 32583 61299 31171 31056 23968n^{14} − 7628 57099
36539 71893 69250 32849 01664n^{13} − 24356 01625 70841 96284 87989
65537 16545n^{12} + 56340 60350 78223 64463 45229 63923 34754n^{11} + 1
31802 05458 75788 31589 95361 97689 84437n^{10} − 3 19944 71268 29800
27643 35953 59303 03628n^{9} − 5 06724 29301 47228 33281 28316 64308
56176n^{8} + 13 33393 29871 24256 94205 92586 87920 15980n^{7} + 12 33061
02092 55876 87863 35080 56655 01866n^{6} − 37 99515 34056 36010 69932
62748 01230 19712n^{5} − 13 69423 95006 57785 25954 93283 27837 68011n^{4}
+ 65 38363 24069 51581 21842 49314 56905 55734n^{3} − 7 34673 21988
11778 05059 84329 30241 97237n^{2} − 50 69016 80093 28025 11722 80655
96421 61260n + 25 34508 40046 64012 55861 40327 98210 80630)

567 86730 $S_{60}(n)=n(n+1)(2n+1)(4$ 65465n^{58} + 134 98485n^{57} + 1214 86365n^{56}
− 1889 78790n^{55} − 78741 16250n^{54} + 1 19056 63770n^{53} + 60 14384
97660n^{52} − 90 81105 78375n^{51} − 4462 90285 69125n^{50} + 6739 75981
42875n^{49} + 3 10109 05821 64575n^{48} − 4 68533 46723 18300n^{47} − 199
76409 18950 39100n^{46} + 301 98880 51787 17800n^{45} + 11872 28543 85959
32350n^{44} − 17959 42256 04832 57425n^{43} − 6 48478 52741 83022 72835n^{42}
+ 9 81697 50240 76950 37965n^{41} + 324 28474 69803 37856 44845n^{40}
− 491 33560 79825 45259 86250n^{39} − 14785 30225 51251 58953 89670n^{38}
+ 22423 62118 66790 11060 77630n^{37} + 6 11843 83238 70172 95042
80640n^{36} − 9 28977 55917 38654 48094 59775n^{35} − 228 65902 77180
40149 92145 24045n^{34} + 347 63342 93729 29552 12265 15955n^{33} + 7674

76110 99055 25239 03876 08255n^{32} − 11685 95837 95447 52634 61946 70360n^{31} − 2 29921 02289 25332 01126 69478 67040n^{30} + 3 50724 51352 85721 78007 35191 35740n^{29} + 61 05216 06877 79445 38911 50448 73310n^{28} − 93 33186 35993 12028 97370 93268 77835n^{27} − 1425 59446 24172 67435 13742 68390 01745n^{26} + 2185 05762 54255 57167 19299 49219 41535n^{25} + 29008 75936 79326 68465 51910 20379 51495n^{24} − 44605 66786 46117 81281 87515 05178 98010n^{23} − 5 09032 54236 31685 44398 12295 08645 76646n^{22} + 7 85851 64747 70587 07238 12200 15558 13974n^{21} + 76 08552 90761 18472 05562 74061 56768 65612n^{20} − 118 05755 18515 63001 61963 17192 42932 05405n^{19} − 954 61829 06189 26137 66414 54004 53730 27271n^{18} + 1490 95621 18541 70707 30603 39603 02061 43609n^{17} + 9876 04174 89459 48637 69298 44562 68115 20597n^{16} − 15559 54072 93460 08310 19249 36645 53203 52700n^{15} − 82393 70939 27226 52493 72559 99756 64542 77036n^{14} + 1 31370 33445 37569 82895 68464 67957 73415 91904n^{13} + 5 38602 82229 98909 97404 05860 73799 01322 54562n^{12} − 8 73589 40067 67149 87553 93023 44677 38691 77795n^{11} − 26 53009 35838 29355 77981 20208 19184 07599 23001n^{10} + 44 16308 73791 27608 60748 76824 01114 80744 73399n^{9} + 92 99342 94599 97111 68133 36468 78503 54399 75527n^{8} − 161 57168 78795 59471 82574 43115 18312 71971 99990n^{7} − 210 86854 25310 10897 03087 52206 57588 46277 46106n^{6} + 397 08865 77362 96081 45918 49867 45539 05402 19154n^{5} + 251 58668 71598 94647 34288 25155 86268 44755 16472n^{4} − 575 92435 96079 90011 74391 62667 52172 19833 84285n^{3} − 51 07184 15607 54443 82675 55765 65239 98309 54887n^{2} + 364 56994 21451 26671 61209 14982 23946 07381 24473n − 121 52331 40483 75557 20403 04994 07982 02460 41491)

18 61860$S_{61}(n) = n^2(n+1)^2($30030n^{58} + 8 70870n^{57} + 76 92685n^{56} − 162 56240n^{55} − 5335 83050n^{54} + 10834 22340n^{53} + 4 23210 19455n^{52} − 8 57254 61250n^{51} − 325 53497 40500n^{50} + 659 64249 42250n^{49} + 23466 80740 94025n^{48} − 47593 25731 30300n^{47} − 15 70212 68168 28166n^{46} + 31 88018 62067 86632n^{45} + 970 72397 11046 29027n^{44} − 1973 32812 84160 44686n^{43} − 55239 85193 51185 56420n^{42} + 1 12453 03199 86531 57526n^{41} + 28 82768 48684 11010 65493n^{40} − 58 77990 00568 08552 88512n^{39} − 1374 14057 93842 04182 54814n^{38} + 2807 06105 88252 16917 98140n^{37} + 59568 67976 56810 93562 28759n^{36} − 1 21944 42059 01874 04042 55658n^{35} − 23 37095 33272 96541 29347 25168n^{34} + 47 96135 08604 94956 62737 05994n^{33} + 825 43511 16180 73238 29006 59865n^{32} − 1698 83157 40966 41433 20750 25724n^{31} − 26088 07548 18833 27720 00501 45882n^{30} + 53874 98253 78632 96873 21753 17488n^{29} + 7 32880 90135 92237 59643 46807 16331n^{28} − 15 19636 78525 63108 16160 15367

$50150n^{27} - 181\ 61156\ 36381\ 12122\ 06035\ 60481\ 33610n^{26} + 378\ 41949$
$51287\ 87352\ 28231\ 36330\ 17370n^{25} + 3935\ 27951\ 26465\ 90345\ 88714$
$03537\ 22145n^{24} - 8248\ 97852\ 04219\ 68044\ 05659\ 43404\ 61660n^{23} - 73812$
$19392\ 96672\ 51502\ 10874\ 02300\ 98504n^{22} + 1\ 55873\ 36637\ 97564\ 71048$
$27407\ 48006\ 58668n^{21} + 11\ 84201\ 14577\ 77961\ 41775\ 70428\ 10584$
$97543n^{20} - 25\ 24275\ 65793\ 53487\ 54599\ 68263\ 69176\ 53754n^{19} - 160$
$20410\ 80914\ 73059\ 79226\ 87130\ 24912\ 63230n^{18} + 345\ 65097\ 27622\ 99607$
$13053\ 42524\ 19001\ 80214n^{17} + 1795\ 93554\ 68504\ 22171\ 49519\ 27474$
$85777\ 47277n^{16} - 3937\ 52206\ 64631\ 43950\ 12091\ 97473\ 90556\ 74768n^{15}$
$- 16319\ 78021\ 66505\ 09969\ 06843\ 06403\ 40284\ 07916n^{14} + 36577\ 08249$
$97641\ 63888\ 25778\ 10280\ 71124\ 90600n^{13} + 1\ 16780\ 98253\ 81634\ 68567$
$73356\ 29806\ 30328\ 02691n^{12} - 2\ 70139\ 04757\ 60911\ 01023\ 72490\ 69893$
$31780\ 95982n^{11} - 6\ 31957\ 75831\ 39991\ 40980\ 30321\ 46962\ 71044\ 85702n^{10}$
$+ 15\ 34054\ 56420\ 40893\ 82984\ 33133\ 63818\ 73870\ 67386n^{9} + 24\ 29615$
$75446\ 49485\ 98433\ 61254\ 42853\ 13875\ 92305n^{8} - 63\ 93286\ 07313\ 39865$
$79851\ 55642\ 49525\ 01622\ 51996n^{7} - 59\ 12217\ 99301\ 10373\ 95883\ 49427$
$42125\ 41445\ 11644n^{6} + 182\ 17722\ 05915\ 60613\ 71618\ 54497\ 33775\ 84512$
$75284n^{5} + 65\ 66043\ 99964\ 05807\ 03457\ 52359\ 62465\ 12279\ 47151n^{4}$
$- 313\ 49810\ 05843\ 72227\ 78533\ 59216\ 58706\ 09071\ 69586n^{3} + 35\ 22573$
$62438\ 10556\ 68863\ 74614\ 21371\ 02075\ 43302n^{2} + 243\ 04662\ 80967\ 51114$
$40806\ 09988\ 15964\ 04920\ 82982n - 121\ 52331\ 40483\ 75557\ 20403\ 04994$
$07982\ 02460\ 41491)$

References

[1] A. W. F. Edwards, *Sums of powers of integers: a little of the history*, Math. Gaz. 66 (1982), 22–28.

[2] ——————, *A quick route to sums of powers*, Amer. Math. Monthly 93 (1986), 451–455,

[3] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products* (*4th ed.*), Academic Press, New York and London, 1965.

[4] Sidney H. Scott, *Sums of powers of natural numbers* (1) *By coefficient operation or* ⋯, Math. Gaz. 64 (1980), 231–238.

[5] Problem No. 738 proposed by S. Rienstra, Nieuw Arch. Wisk. 3 (1985), 313.

[6] Solution to the above problem by A. A. Jagers, *ibid*. 5 (1987), 103–104.

[7] Problem E 3204 proposed by Ira Gessel, Amer. Math. Monthly, 94 (1987), 372.