k 個の central moment の函数について

木　下　卓　馬

On the Functions of k Central Moments

Takuma KINOSHITA

1　x_1, ……, x_n を一次元標本とする。X_i は d.f.F (x) を持つ，互に独立な確率変数とする。

又　$m_{\nu i}=\frac{1}{n}\sum(X_i-\overline{X})^{\nu i}$　　　$\mu_{\nu l}=\mathbf{E}[(X-\mathbf{E}(X))^{\nu i}]$

$\mu_i(m_{\nu j})=\mathbf{E}(m_{\nu i}-\mathbf{E}(m_{\nu i}))^{\nu i}$,　　$\mu_{11}(m_\nu, m_\rho)=\mathbf{E}((m_\nu-\mathbf{E}(m_\nu)(m_\rho-\mathbf{E}(m_\rho))$

である。これから述べる定理は cramér(1) の二つの変数 m_ν, m_ρ についての定理を k 個の変数の場合について考えたものである。

2　平　均　と　分　散

次の二つの条件が満足されているものとする。

1)　$m_{\nu 1}=\mu_{\nu 1}, \cdots, \cdots m_{\nu k}=\mu_{\nu k}$ の近傍で，函数 $H(m_{\nu 1}\cdots\cdots m_{\nu k})$ は連続で，第一次及び第二次の連続な偏導函数を持つている。

2)　全ての X_i の有限値に対して，$|H|<Cn^p$，ここに C と P は正の常数である。

次に　H_0 : $m_{\nu 1}=\mu_{\nu 1}, \cdots\cdots m_{\nu k}=\mu_{\nu k}$に於ける H の値

H_1 : $H_2, \cdots\cdots, H_k$ は $(m_{\nu 1}=\mu_{\nu 1}, \cdots\cdots m_{\nu k}=\mu_{\nu k})$

に於ける，夫々 $m_{\nu 1}\cdots\cdots m_{\nu k}$ に関する H の偏微係数を示す。

定理：確率変数 H の平均及び分散は次の式で与えられる。

$$\mathbf{E}\,(H)=H_0+O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^2(H)=&\mu_2(m_{\nu 1})H_1{}^2+\cdots\cdots+\mu_2(m_{\nu k})H^2{}_k\\&+2\{\mu_{11}(m_{\nu 1}m_{\nu 2})H_1H_2+\cdots\cdots\cdots+\mu_{11}(m_{\nu k-1}, m_{\nu k})H_{k-1}H_k\}+O(n^{-3/2}\end{aligned} \tag{2.2}$$

証明：P(s) は $X_1, \cdots, X_n$ の joint distnbutor の probability function を示す。Tchebycheff の不等式

$$P[g(\xi)\geqq k]\leqq\frac{\mathbf{E}g(\xi)}{k} \tag{2.3}$$

に於て　$g(\xi)=(m_{\nu i}-\mu_{\nu i})^{2l}$　　$(i=1,2,\cdots\cdots,k)$

とおき，更に

$$\mathbf{E}(m_{\nu i}-\mu_{\nu i})^{2l}=O\left(\frac{1}{n^l}\right) \tag{2.4}$$

から

(2.5) $P[(m_{\nu i}-\mu_{\nu i})^{2l}\geqq\varepsilon^{2l}]\leqq\frac{E(m_{\nu i}-\mu_{\nu i})^{2l}}{\varepsilon^{2l}}>\frac{A}{\varepsilon^{2l}n^{l}}$

即ち

(2.6) $P[|m_{\nu i}-\mu_{\nu i}|\geqq\varepsilon]<\frac{A}{\varepsilon^{2l}n^{l}}$

こゝに A は n と ε とに依存しない常数である。

R_n に於て

(2.7) $|m_{\nu i}-\mu_{\nu i}|<\varepsilon \qquad (i=1,\cdots\cdots,k)$

を同時に満足するような全ての点の集合を Z で表し，全集合を Z^* で表せば，

(2.8) $P(Z^*)<\frac{kA}{\varepsilon^{2l}n^{l}}, \qquad P(Z)>1-\frac{kA}{\varepsilon^{2l}n^{l}}$

次に

(2.9) $E(H)=\int_Z HdP+\int_{Z*}HdP$

(2.9) の第二項は条件 2) から$\frac{kACn^p}{\varepsilon^{2l}n^{l}}$ より小さい。$l>p+1$ と選べば

(2.10) $E(H)=\int_Z HdP+O\left(\frac{1}{n}\right)$

ε を十分小さくすれば条件 1) から集合 Z の任意の点に対して

(2.11) $H(m_{\nu 1},\cdots\cdots m_{\nu k})=H_0+\sum_{i=1}^{k}H_i(m_{\nu i}-\mu_{\nu i})+R$

$$R=\frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{k}H'_{ii}(m_{\nu i}-\mu_{\nu i})^2+2\sum_{i<j}H'_{ij}(m_{\nu i}-\mu_{\nu i})(m_{\nu j}-m_{\nu j})\right\}$$

こゝに H'_{ij} は $(\mu_{\nu i},\mu_{\nu j})$ と $(m_{\nu i},m_{\nu j})$ との間に於ける点の第二次偏導函数の値である。

故に

(2.12) $\int_Z HdP=H_0P(Z)+H_1\int_Z(m_{\nu 1}-\mu_{\nu 1})dP+\cdots+H_k\int_Z(m_{\nu k}-\mu_{\nu k})dP+\int_Z RdP$

右辺の第一項は $H_0P(Z)>H_0\left(1-\frac{kA}{\varepsilon^{2l}n^{l}}\right)=H_0-H_0\frac{kA}{\varepsilon^{2l}n^{l}}$

(2.13) $\therefore\ H_0-H_0P(Z)<H_0\frac{kA}{\varepsilon^{l}n^{l}}=O(n^{-l})$

こゝに $l>p+1\geqq1$ であるから n^{-l} は n^{-1} よりも小さい。

(2.14) $\int_Z(m_{\nu i}-\mu_{\nu i})dP=E(m_{\nu i}-\mu_{\nu i})-\int_{Z*}(m_{\nu i}-\mu_{\nu i})dP$

$$=O\left(\frac{1}{n}\right)-\int_{Z*}(m_{\nu i}-\mu_{\nu i})dP$$

の不等式により

(2.15) $\left|\int_{Z*}(m_{\nu i}-\mu_{\nu i})dP\right|\leqq\left[\int_{Z*}(m_{\nu i}-\mu_{\nu i})^2dP\cdot\int_{Z*}dP\right]^{\frac{1}{2}}$

$$\leqq[E(m_{\nu i}-\mu_{\nu i})^2\cdot P(Z^*)]^{1/2}=O(n^{-1+l/2})$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{こゝに}\quad \mathbf{E}(m_{\nu i}-\mu_{\nu i})^2=O\left(\frac{1}{n}\right) \\ \qquad P(Z^*)<\frac{kA}{\varepsilon^{2l}n^l}=O(n^{-l}) \\ \text{であるから} \end{array}\right\}$$

∴ (2.14), (2.15) から

(2.16) $$\int_Z (m_{\nu i}-\mu_{\nu i})\,dP=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

次に

(2.17) $$\int_Z (m_{\nu i}-\mu_{\nu i})^2 dP \leqq \left[\int_Z (m_{\nu i}-\mu_{\nu i})^4 dP\cdot \int_{Z^*} dP\right]^{1/2}$$
$$\leqq \left[\mathbf{E}(m_{\nu i}-\mu_{\nu i})^4\cdot P(Z^*)\right]^{1/2}=O(n^{-(l/2+2)})$$

(2.18) $$\int_Z |(m_{\nu i}-\mu_{\nu i})(m_{\nu j}-\mu_{\nu j})|\,dP \leqq \left[\mathbf{E}(m_{\nu i}-\mu_{\nu i})^2\,\mathbf{E}(m_{\nu j}-\mu_{\nu j})^2\right]^{1/2}=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

(2.19) $$\therefore\ \left|\int_Z R\,dP\right| \leqq \frac{1}{2}\int_Z \left\{\sum_{i=1}^{k} K_i(m_{\nu i}-\mu_{\nu i})^2+2\sum_{i<j} K_{ij}\left|(m_{\nu i}-\mu_{\nu i})(m_{\nu j}-\mu_{\nu j})\right|\right\}dP$$
$$=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

(2.12), (2.13), (2.16), (2.19) から

(2.20) $$\mathbf{E}(H)=H_0+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

次に $\mathbf{D}^2(H)$ を求める。

(2.21) $$\mathbf{E}(H-H_0)^2=\int_Z (H-H_0)^2 dP+\int_{Z^*}(H-H_0)^2 dP$$

こゝに $$\left|\int_{Z^*}(H-H_0)^2 dP\right|=\left|\int_{Z^*}(H^2-2HH_0+H_0{}^2)\,dP\right|$$
$$=\left|\int_{Z^*}H^2 dP-2\int_{Z^*}HH_0\,dP+\int_{Z^*}H_0{}^2 dP\right|$$
$$\leqq \int_{Z^*}H^2 dP+2\int_{Z^*}|H|H_0|\,dP+\int_{Z^*}H_0{}^2 dP$$
$$<C^2n^{2p}\int_{Z^*}dP+2C^2n^{2p}\int_{Z^*}dP+C^2n^{2p}\int_{Z^*}dP$$
$$=4C^2n^{2p}P(Z^*)<4C^2n^{2p}\frac{kA}{\varepsilon^{2l}n^l}$$

$l>2p+\frac{3}{2}$ とすれば

$$=O(n^{-3/2})$$

(2.22) $$\therefore\ \mathbf{D}^2(H)=\mathbf{E}(H-\mathbf{E}(H))^2=\mathbf{E}(H-H_0)^2$$
$$=\int_Z (H-H_0)^2 dP+O(n^{-3/2})$$

$$(H-H_0)^2=\sum_{i=1}^{k} H_i{}^2(m_{\nu i}-\mu_{\nu i})^2+R^2+\sum_{i\neq j} H_iH_j(m_{\nu i}-\mu_{\nu i})(m_{\nu j}-\mu_{\nu j})$$

$$+2\sum_{i=1}^{k} H_i(m_{\nu i}-\mu_{\nu i})R$$

(2.23) $$\therefore\ \int_Z (H-H_0)^2 dP=\sum_{i=1}^{k} H_i^2\int_Z (m_{\nu i}-\mu_{\nu i})^2 dP+\int_Z R^2 dP$$

$$+\sum_{i\neq j} H_i H_j \int_Z (m_{\nu i}-\mu_{\nu i})(m_{\nu j}-\mu_{\nu j})dP$$

$$+2\sum_{i=1}^{k} H_i \int_Z (m_{\nu i}-\mu_{\nu i})RdP$$

こゝに

(2.24) $$\int_Z (m_{\nu i}-\mu_{\nu i})^2 dP=\mathbf{E}\,(m_{\nu i}-\mu_{\nu i})^2-\int_{Z*}(m_{\nu i}-\mu_{\nu i})^2 dP$$

$$=\mu_2(m_{\nu i})+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

(2.25) $$\int_Z (m_{\nu i}-\mu_{\nu i})(m_{\nu j}-m_{\nu j})dP=\mathbf{E}\,(m_{\nu i}-\mu_{\nu i})(m_{\nu j}-m_{\nu j})$$

$$-\int_{Z*}(m_{\nu i}-\mu_{\nu i})(m_{\nu j}-\mu_{\nu j})dP=\mathbf{E}(m_{\nu i}-\mu_{\nu i})(m_{\nu j}-m_{\nu j})+O(n^{-2})$$

$$u=\mu_{11}(m_{\nu i},\ m_{\nu i})+O(n^{-1})+O(n^{-2})=\mu_{11}(m_{\nu i},\ m_{\nu j})+O(n^{-1})$$

(2.26) $$2\sum_{i=1}^{k} H_i\int_Z (m_{\nu i}-\mu_{\nu i})RdP$$

$$=\int_Z\Big\{\sum_{i=1}^{k} H_i H'_{ii}(m_{\nu i}-\mu_{\nu i})^3+\sum_{i\neq j} H_j H'_{11}(m_{\nu i}-\mu_{\nu i})^2(m_{\nu j}-\mu_{\nu j})$$

$$+\sum_{h,i\neq j} H_h H'_{ij}(m_{\nu h}-\mu_{\nu h})(m_{\nu i}-\mu_{\nu i})(m_{\nu j}-\mu_{\nu j})\Big\}dP$$

こゝに

(2.27) $$\left|\int_Z H_i H'_{ii}(m_{\nu i}-\mu_{\nu i})^3 dP\right|<K_i K_{ii}\mathbf{E}\left|m_{\nu i}-\mu_{\nu i}\right|^3$$

$$\leqq K_i K'_{ii}(\mathbf{E}(m_{\nu i}-\mu_{\nu i})^4)^{3/4}=O(n^{-3/2})$$

(2.28) $$\left|\int_Z H_j H'_{ii}(m_{\nu i}-\mu_{\nu i})^2(m_{\nu j}-\mu_{\nu j})dP\right|$$

$$<K_j K'_{ii}\mathbf{E}(m_{\nu i}-\mu_{\nu i})^2\cdot\mathbf{E}\left|m_{\nu j}-\mu_{\nu j}\right|=O(n^{-3/2})$$

(2.29) $$\left|\int_Z H_h H'_{ij}(m_{\nu h}-\mu_{\nu h})(m_{\nu i}-\mu_{\nu i})(m_{\nu j}-m_{\nu j})dP\right|$$

$$\leqq K_h K'_{ij}\mathbf{E}\,(m_{\nu h}-\mu_{\nu h})\cdot\mathbf{E}\,(m_{\nu i}-\mu_{\nu i})\cdot\mathbf{E}\,(m_{\nu j}-\mu_{\nu j})=O(n^{-3})$$

(2.26), (2.27), (2.28) から

(2.30) $$2\sum_{i=1}^{k} H_i\int_Z (m_{\nu i}-\mu_{\nu i})RdP=O(n^{-3/2})$$ 又,

(2.31) $$\int_Z R^2 dP=\frac{1}{4}\int_Z\Big\{\sum H'^2_{ii}(m_{\nu i}-\mu_{\nu i})^4+\sum H'_{ii}H'^2_{ij}(m_{\nu i}-\mu_{\nu i})^3(m_{\nu j}-\mu_{\nu j})$$

$$+\sum H'_{gg}H'_{ij}(m_{\nu g}-\mu_{\nu g})^2(m_{\nu i}-\mu_{\nu i})(m_{\nu j}-m_{\nu j})\Big\}dP$$

こゝに

(2.32)　$\int_Z (m_{\nu i}-\mu_{\nu i})^4 dP \leqq \mathbf{E}(m_{\nu i}-\mu_{\nu i})^4 = O(n^{-2})$

(2.33)　$\int_Z (m_{\nu i}-\mu_{\nu i})^3(m_{\nu j}-\mu_{\nu j})dP$

$\leqq \mathbf{E}(|m_{\nu i}-\mu_{\nu i}|^3)\cdot\mathbf{E}(m_{\nu i}-\mu_{\nu i}|)$

$\leqq (\mathbf{E}(m_{\nu i}-\mu_{\nu i})^4)^{3/4}(\mathbf{E}(m_{\nu j}-\mu_{\nu j})^2)^{1/2}=O(n^{-2})$

(2.34)　$\int_Z (m_{\nu g}-\mu_{\nu g})^2(m_{\nu i}-\mu_{\nu i})(m_{\nu j}-\mu_{\nu j})dP$

$\leqq \mathbf{E}(m_{\nu g}-\mu_{\nu g})^2\cdot\mathbf{E}(|m_{\nu i}-\mu_{\nu i})\cdot\mathbf{E}(|m_{\nu j}-\mu_{\nu j}|)=O(n^{-2})$

(2.31), (2.32), (2.33), (2.34) から

(2.35)　$\int_Z R^2 dP = O(n^{-2})$

故に (2.23), (2.24), (2.25), (2.30), (2.35) から

(2.36)　$\int_Z (H-H_0)^2 dP = \sum_{i=1}^{k} H^2{}_i \mu_2(m_{\nu i}) + \sum_{i\neq j} H_i H_j \mu_{11}(m_{\nu i}, m_{\nu j}) + O(n^{-3/2})$

即ち,

(2.37)　$D^2(H) = \sum_{i=1}^{k} \mu_2(m_{\nu i})H_i{}^2 + \sum_{i\neq j} \mu_{11}(m_{\nu i}, m_{\nu j})H_i H_j + O(n^{-3/2})$

3. 極　限　分　布

定理: $m_{\nu 1}=\mu_{\nu 1},\cdots\cdots,m_{\nu k}=\mu_{k\nu}$ の近傍で函数が連続で, 第一次及び第二次の連続な偏導函数が存在すれば, 確率変数 H は asymptoticaly normal で, limiting normal distribution の平均と分散は

(3.1)　$\mathbf{E}(H)=H_0$

(3.2)　$\mathbf{D}^2(H)=\mu_2(m_{\nu 1})H_1{}^2+\cdots\cdots+\mu_2(m_{\nu k})H_k{}^2$

$+2\{\mu_{11}(m_{\nu 1}, m_{\nu 2})H_1 H_2+\cdots\cdots+\mu_{11}(m_{\nu k-1}, m_{\nu k})H_{k-1}H_k\}$

で与えられる。

証明: $|m_{\nu i}-\mu_{\nu i}|<\varepsilon$　$(i=1,2,\cdots\cdots k)$

なるような全ての点 $(X_1,\cdots\cdots, X_n)$ の set Z を考える。然し ε は n に depend してもよいとする。又実際 $\varepsilon=n^{-3/8}$ と選べば

(3.3)　$P(Z)>1-\dfrac{kA}{\varepsilon^{2l}n^l}$

$l=1$ とすれば

(3.4)　$P(Z)>1-\dfrac{kA}{\varepsilon^2 n}=1-kAn^{-1/4}$

n を十分大きくすれば, Z の任意の点に対して, 前節から

(3.5)　$H=H_0+H_1(m_{\nu 1}-\mu_{\nu 1})+\cdots+H_k(m_{\nu k}-\mu_{\nu k})+R$

従つて,

(3.6)　$\sqrt{n}(H-H_0)=H_1\sqrt{n}(m_{\nu 1}-\mu_{\nu 1})+\cdots+H_k\sqrt{n}(m_{\nu k}-\mu_{\nu k})+R\sqrt{n}$

こゝに

$$\left|R\sqrt{n}\right|=\frac{\sqrt{n}}{2}\left|\left\{\sum_{i=1}^{k}H'_{ii}(m_{\nu i}-\mu_{\nu i})^2+2\sum_{i<j}H'_{ij}(m_{\nu i}-\mu_{\nu i})(m_{\nu j}-\mu_{\nu j})\right\}\right|$$

$$<Kk\varepsilon^2\sqrt{n}+2K'\frac{k(k-1)}{2}\varepsilon^2\sqrt{n}$$

$$(Kk+2K'k\frac{(k-1)}{2})n^{-1/4}$$

$$=K''n^{-1/4} \qquad (Kk+2K'\frac{k(k-1)}{2}=K'' \text{ とおく})$$

(3.7) $P(|R\sqrt{n}|<K''n^{-1/4})\geqq P(Z)>1-kAn^{1/4}$

故に $R\sqrt{n}$ は 0 に確率収斂する。

故に $\sqrt{n}(H-H_0)$ と $H_1\sqrt{n}(m_{\nu 1}-\mu_{\nu 1})+\cdots+H_k\sqrt{n}(m_{\nu k}-\mu_{\nu k})$ とは，$n\to\infty$ のとき同じ分布を持つ。

$\sqrt{n}(m_{\nu i}-\mu_{\nu i})$ は $n\to\infty$ のとき平均が 0 である正規分布に従うから[(2)] $H_1\sqrt{n}(m_{\nu 1}-\mu_{\nu 1})+\cdots+H_k\sqrt{n}(m_{\nu k}-\mu_{\nu k})$ は $n\to\infty$ のとき平均が 0 の正規分布に従う。従つて $\sqrt{n}(H-H_0)$ は $n\to\infty$ のとき，平均が 0 の正規分布に従う。故に確率変数 H は $n\to\infty$ のとき，平均が H_0 の正規分布に従う。

分散は $n\to\infty$ のとき

$$\mathbf{D}^2(H)=\mathbf{E}(H-\mathbf{E}(H))^2$$

$$=\mathbf{E}(H-H_0)^2$$

$$=\frac{1}{n}\mathbf{E}(\sqrt{n}(H-H_0))^2$$

$$=\frac{1}{n}\mathbf{E}[\{H_1\sqrt{n}(m_{\nu 1}-\mu_{\nu 1})+\cdots+H_k\sqrt{n}(m_{\nu k}-\mu_{\nu k})\}^2]$$

$$=\frac{1}{n}H_1{}^2n\mu_2(m_{\nu 1})+\cdots+H_k{}^2n\mu_2(m_{\nu k})$$

$$+2\{H_1H_2n\mu_{11}(m_{\nu 1},m_{\nu 2})+\cdots+H_{k-1}H_kn\mu_{11}(m_{\nu k-1},m_{\nu k})\}]$$

$$=\mu_2(m_{\nu 1})H_1{}^2+\cdots+\mu_2(m_{\nu k})H^2{}_k$$

$$+2\{\mu_{11}(m_{\nu 1},m_{\nu 2})H_1H_2+\cdots+\mu_{11}(m_{\nu k-1},m_{k\nu})H_{k-1}H_k\}$$

となる。

（1） Harald CRM'ER : Mathematical methods of Statstics P. 353~356, 366~367 (1946)

（2） Harald CRAM'ER : Mathematical methods of Statistics P. 365 (1946)