弦理論の低エネルギー領域における回転する弦の古典解について

道　下　洋　二*

（2008年10月30日　受理）

On Spinning-string Solutions in the Low Energy Regime of String Theory

MICHISHITA Yoji

要約

弦理論において弦のさまざまな古典解、特にブラックホール解を熱的統計集団であると考えることは閉じた弦に対してはしばしば行われてきたが、開いた弦の場合も知られているよりもっとさまざまな解が存在して、同様のことが行えないかを考察する。

キーワード：弦理論、古典解、角運動量

*　鹿児島大学教育学部　准教授

1　はじめに

弦理論においては、弦は時空の力学を記述する基本要素であるが、一方で何本も束ねて非常に重くした場合には、その低エネルギー有効理論の古典解としても記述できる。

よく知られた例に次の2つがある。ひとつは閉弦の低エネルギー有効理論、すなわち古典重力理論の解としてもうひとつは開弦の低エネルギー有効理論、すなわちボルン・インフェルド理論の解としてである。まず重力理論の解は

$$ds^2 = H(y)^{-1}[-(dx^0)^2 + (dx^1)^2] + (dy^2)^2 + \cdots + (dy^9)^2 \tag{1.1}$$

$$e^{\phi} = g_s H^{-1/2}, \quad H^{(3)}_{01i} = \pm H^{-2}\partial_i H, \quad (i = 2, \ldots, 9) \tag{1.2}$$

$$\partial_i \partial_i H(y) = 0 \quad \to H = 1 + \sum \frac{Q}{|y - y_I|^6}, \tag{1.3}$$

$$Q = \frac{2\kappa_{10}^2 T_{F1}}{6\mathrm{Vol}(S^7)} = 32\pi^2 g_s^2 \ell_s^6 \tag{1.4}$$

である。これはタイプIIA、IIB、ヘテロ型の弦理論に共通の解である。次にボルン・インフェルド理論の解は [1]

$$X = \int dr \frac{\beta C}{\sqrt{r^{p+1} - C^2(\beta^2 - 1)}}, \quad A_0 = \int dr \frac{C}{\sqrt{r^{p+1} - C^2(\beta^2 - 1)}} \tag{1.5}$$

さてこれらの解（ボルン・インフェルド理論では $\beta = 1$ として）は超対称性を持つ、すなわち一部の超対称変換で不変であることが知られている。それはすなわちこれらの解が弦の基底状態を表し、安定で崩壊しないことを意味する。

古典重力理論の解は、弦の励起状態を表すように拡張できることが知られている。

$$ds^2 = H^{-1}(r)[-f(r)(dx^0)^2 + (dx^1)] + f^{-1}(r)dr^2 + r^2 d\Omega_7^2 \tag{1.6}$$

$$e^{\phi} = g_s H^{-1/2}, \quad H^{(3)}_{01i} = \pm \coth \mu H^{-2} \partial_i H, \quad (i = 2, \ldots, 9) \tag{1.7}$$

$$f(r) = 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^6, \quad H = 1 + \frac{r_0^6 \sinh^2 \mu}{r^6} \tag{1.8}$$

これは一種のブラックホールであるが、もちろん不安定で、量子的に言えばホーキング放射によってエネルギーを失っていきいずれは基底状態に戻るものであると考えられる。

ブラックホールであるから、よく知られたようにこれは熱的統計集団に対応するはずである。ということは、基底状態にある解も、状態数は小さいながらも熱的統計集団に対応すると考えるのが自然であろう。実際基底状態は弦の第一量子化の考察から縮退していることが知られているので、ひとつの純粋状態に対応するとは考えにくい。

事象の地平面の面積はゼロであるので、エントロピーはゼロであるが、これは低エネルギー近似ではゼロに見えてしまうぐらいに小さいエントロピーしかもっていないためと解釈できる。これはエン

トロピーを弦理論の観点から数えることに成功した古典的な例である Strominger-Vafa の D1-D5-P 系 [2] で、D1 ブレインだけでも、D5 ブレインを加えてもまだ事象の地平面の面積はゼロであったが、さらに波動を加えることで系の縮退度が増し、エントロピーが増えて事象の地平面の面積がゼロでなくなったことを想起すれば納得できる。また関連した現象として、普段われわれが使う古典重力は微分展開の最低次部分であると考えられるが、高階微分補正を入れると面積ゼロであった地平面が補正されて有限の面積を持つということもしばしば起こることである。

同様にボルン・インフェルド理論の解のほうも、熱的統計集団に対応すると考えるのが自然ではないか、という推測ができる。仮に解が 1 本の弦を表していたとすると、開弦のときは第一量子化の議論から必ずゼロでない角運動量を持ってしまうはずであるが、解のほうは角運動量はゼロである。この矛盾は解が角運動量の平均値がゼロの熱的統計集団に対応していると考えれば回避できる。(1 本の弦を古典解で表すのが妥当かどうかの問題がそもそもあるが。)

またこの見方は上述の解の $\beta \neq 1$ の場合の新しい解釈を与える可能性がある。従来この場合はブレイン・反ブレイン系を記述すると思われているが、これを弦の励起状態を表すと見ることもできる。

2 閉弦の場合

解 (1.1)-(1.4) は、回転していない、すなわち角運動量がゼロの解に対応する。では角運動量を持った解は、[3] で用いられている手法を使えば次のように比較的簡単に構成できる。弦の上に光速で走る波動がある場合の解が次のように知られている。[4]

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= -2H^{-1}dx^+dx^- - 4H^{-1}A_i dx^- dx^i + dx^i dx^i && (2.1)\\
B_{-+} &= 1 - H^{-1} && (2.2)\\
B_{-i} &= -2H^{-1}A_i && (2.3)\\
e^{\phi} &= g_s H^{-1/2} && (2.4)
\end{aligned}
$$

ここで $x^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 \pm x^1)$ で、$H = H(x^-, x^j), \quad A_i = A_i(x^-, x^j)$ は次の式を満たす。

$$
\begin{aligned}
0 &= \partial_i \partial^i H && (2.5)\\
0 &= \partial_i \partial^i A_j && (2.6)\\
0 &= \partial_- H + 2\partial_i A_i && (2.7)
\end{aligned}
$$

これの解として

$$
H = 1 + \sum_a \frac{2c_a}{|y^i - f_a^i(x^-)|^6}, \quad A_i = -\sum_a \frac{c_a f_a'^i(x^-)}{|y^i - f_a^i(x^-)|^6} \qquad (2.8)
$$

をとる。c_a は定数で、$f_a^i(x^-)$ は波動の形をあらわす任意の関数である。

3 開弦の場合

さて次は角運動量をもったボルン・インフェルド理論の解が構成できるかを考えてみよう。作用は静的ゲージのもとで

$$S = -T_p \int d^{p+1}\sigma \sqrt{-\det(M_{MN})} \tag{3.1}$$

ここで $M_{MN} = \eta_{MN} + \partial_M X \partial_N X + F_{MN}$ である。これから導かれる運動方程式は

$$\partial_M \left[\sqrt{-\det(M_{PQ})}(M^{-1})^{(MN)} \partial_N X \right] = 0, \quad \partial_M \left[\sqrt{-\det(M_{PQ})}(M^{-1})^{[MN]} \right] = 0 \tag{3.2}$$

まず簡単のため次元の最も低いD2ブレインの上に終わっている開弦の解を考えよう。この場合は2次元ラプラス方程式の解が $\log r$ になってしまうため無限遠方で平坦になる解は存在しないので、一種のtoy modelと思って扱う。

世界面座標を $\sigma^0 = t, \sigma^1 = r\cos\theta, \sigma^2 = r\sin\theta$ ととろう。配置の対称性から、(1) すべての場は時間によらない。(2) ゲージ場は時間成分と θ 方向の成分しかない。(3) そしてそれらの成分と X は動径方向のみの関数である。

このとき $-\det M = 1 + (\partial_r X)^2 - (\partial_r A_0)^2 + \frac{1}{r^2}(\partial_r A_\theta)^2$ で、運動方程式は

$$0 = \frac{1}{r}\partial_r \left[\frac{1}{\sqrt{-\det M}} r \partial_r X \right] \tag{3.3}$$

$$0 = \frac{1}{r}\partial_r \left[\frac{1}{\sqrt{-\det M}} r \partial_r A_0 \right] \tag{3.4}$$

$$0 = r\partial_r \left[\frac{1}{\sqrt{-\det M}} \frac{1}{r} \partial_r A_\theta \right] \tag{3.5}$$

X の運動方程式と A_0 の運動方程式は同じ形をしているので、$X = \beta A_0$ とおくのが自然であろう。さらに $\partial_r A_\theta = \gamma r^2 \partial_r A_0$ とすれば、上の3つの方程式は次の1つに帰着される。

$$0 = \partial_r \left[\frac{r\partial_r A_0}{\sqrt{1 + (\beta^2 - 1 + \gamma^2 r^2)(\partial_r A_0)^2}} \right] \tag{3.6}$$

これはただちに解くことができて、

$$A_0 = \int dr \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2 + (C^2 - \gamma^2) r^2}} \tag{3.7}$$

$$A_\theta = \int dr \frac{\gamma r^2}{\sqrt{1 - \beta^2 + (C^2 - \gamma^2) r^2}} \tag{3.8}$$

このようにこの場合は厳密解が求まるが、前にも言った通り遠方でどんどん大きくなるので物理的意味を与えるのは難しい。

次に、より物理的に意味付けしやすいD3ブレインの上に終わっている開弦の解を考えよう。この場合世界面座標に $\sigma^3 = z$ を付け加えて、配置の対称性から、(1) すべての場は時間によらない。(2)

簡単のため I 方向 $(y^I = \frac{1}{\sqrt{2}}(y^1 + iy^2), y^{\bar{I}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(y^1 - iy^2))$ にのみ回転している場合を考えよう。a についての和を連続的なものととらえ、

$$f_a^I(x^-) = y_0^I + R_I e^{i\omega_I x^- + ia}, \quad f_a^i(x^-) = y_0^i \quad (i: \text{その他の方向}) \tag{2.9}$$

とおこう。つまり弦がらせん状に振動しているとしよう。らせん状なので角運動量を与えると期待できる。

$$\begin{aligned} H &= 1 + \int_0^{2\pi} da \frac{2c}{|y^i - f_a^i(x^-)|^6} = 1 + \int_0^{2\pi} da \frac{2c}{|y^i - y_0^i - f^i(a)|^6} & (2.10) \\ A_I &= -\int_0^{2\pi} da \frac{ic\omega_I f^I(a)}{|y^i - y_0^i - f^i(a)|^6} & (2.11) \\ A_i &= 0 & (2.12) \end{aligned}$$

ここで

$$f^I(a) = R_I e^{ia}, \quad f^i(a) = 0 \quad (i: \text{その他の方向}) \tag{2.13}$$

x^- 依存性が消えてしまったことに注意しよう。$R_I \to 0$ の極限をとると、H の表式では a 依存性もなくなるので、

$$H = 1 + \frac{4\pi c}{|y^i - y_0^i|^6} \tag{2.14}$$

A_i の表式でうまく有限の値が残るように ω_I の極限を $R_I \to 0$ の極限にあわせてとってみよう。

$$\begin{aligned} A_I &= -\int_0^{2\pi} da \frac{ic\omega_I f^I(a)}{|y^i - y_0^i - f^i(a)|^6} \\ &= -ic\omega_I \int_0^{2\pi} da \left[\frac{f^I(a)}{|y^i - y_0^i|^6} + 6[(y - y_0)^{\bar{I}} R_I e^{ia} + (y - y_0)^I R_I e^{-ia}] \frac{f^I(a)}{|y^i - y_0^i|^8} + O(R_I^3) \right] & (2.15) \end{aligned}$$

第 1 項は積分を実行するとゼロになる。したがって第 2 項を残し、第 3 項以降はゼロになるように極限をとろう。第 2 項の計算結果は

$$A_I = -12i\pi c\omega_I R_I^2 \left[\frac{(y - y_0)^I}{|y^i - y_0^i|^8} + O(R_I^3) \right] \tag{2.16}$$

よって $\omega_I R_I^2$ を一定とするように $\omega_I \to \infty$ とする。

これで角運動量を持った解を構成できた。以上の計算を一般化して、任意の位置に任意の角運動量を持った何本もの弦を表す解を作るのは容易である。答えは

$$\begin{aligned} H &= 1 + \sum_I \frac{N_I Q}{|y^i - y_I^i|^6} & (2.17) \\ A_i &= -3\sqrt{2}\pi\alpha' Q \sum_I \frac{J_{ij}^I (y^j - y_I^j)}{|y^i - y_I^i|^8} & (2.18) \end{aligned}$$

N_I は $y = y_I$ の位置にある弦の本数、J_{ij}^I はそれらの弦が持つ角運動量である。

ゲージ場は時間成分と θ 方向の成分しかない。(3) そしてそれらの成分と X は動径方向と z 方向のみの関数である。

運動方程式は

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{det}M &= (1+(\partial_r X)^2-(\partial_r A_0)^2+\frac{1}{r^2}(\partial_r A_\theta)^2)(1+(\partial_z X)^2-(\partial_z A_0)^2+\frac{1}{r^2}(\partial_z A_\theta)^2) \\
&\quad -(\partial_r X\partial_z X-\partial_r A_0\partial_z A_0+\frac{1}{r^2}\partial_r A_\theta\partial_z A_\theta)^2 \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

で、運動方程式は

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{r}\partial_r\left[r\frac{1}{\sqrt{-\mathrm{det}M}}\Big\{(1+(\partial_z X)^2-(\partial_z A_0)^2+\frac{1}{r^2}(\partial_z A_\theta)^2)\partial_r X\right. \\
&\quad \left.-(\partial_r X\partial_z X-\partial_r A_0\partial_z A_0+\frac{1}{r^2}\partial_r A_\theta\partial_z A_\theta)\partial_z X\Big\}\right] \\
&\quad +\partial_z\left[\frac{1}{\sqrt{-\mathrm{det}M}}\Big\{-(\partial_r X\partial_z X-\partial_r A_0\partial_z A_0+\frac{1}{r^2}\partial_r A_\theta\partial_z A_\theta)\partial_r X\right. \\
&\quad \left.+(1+(\partial_r X)^2-(\partial_r A_0)^2+\frac{1}{r^2}(\partial_r A_\theta)^2)\partial_z X\Big\}\right] \qquad (3.10) \\
0 &= \frac{1}{r}\partial_r\left[r\frac{1}{\sqrt{-\mathrm{det}M}}\Big\{(1+(\partial_z X)^2-(\partial_z A_0)^2+\frac{1}{r^2}(\partial_z A_\theta)^2)\partial_r A_0\right. \\
&\quad \left.-(\partial_r X\partial_z X-\partial_r A_0\partial_z A_0+\frac{1}{r^2}\partial_r A_\theta\partial_z A_\theta)\partial_z A_0\Big\}\right] \\
&\quad +\partial_z\left[\frac{1}{\sqrt{-\mathrm{det}M}}\Big\{-(\partial_r X\partial_z X-\partial_r A_0\partial_z A_0+\frac{1}{r^2}\partial_r A_\theta\partial_z A_\theta)\partial_r A_0\right. \\
&\quad \left.+(1+(\partial_r X)^2-(\partial_r A_0)^2+\frac{1}{r^2}(\partial_r A_\theta)^2)\partial_z A_0\Big\}\right] \qquad (3.11) \\
0 &= r\partial_r\left[\frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{-\mathrm{det}M}}\Big\{(1+(\partial_z X)^2-(\partial_z A_0)^2+\frac{1}{r^2}(\partial_z A_\theta)^2)\partial_r A_\theta\right. \\
&\quad \left.-(\partial_r X\partial_z X-\partial_r A_0\partial_z A_0+\frac{1}{r^2}\partial_r A_\theta\partial_z A_\theta)\partial_z A_\theta\Big\}\right] \\
&\quad +\partial_z\left[\frac{1}{\sqrt{-\mathrm{det}M}}\Big\{-(\partial_r X\partial_z X-\partial_r A_0\partial_z A_0+\frac{1}{r^2}\partial_r A_\theta\partial_z A_\theta)\partial_r A_\theta\right. \\
&\quad \left.+(1+(\partial_r X)^2-(\partial_r A_0)^2+\frac{1}{r^2}(\partial_r A_\theta)^2)\partial_z A_\theta\Big\}\right] \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

これらは非常に複雑な非線型方程式なので、このままでは解くのは難しい。

そこで無限遠方で今考えている配位がどのようになるべきかをまず考えてみよう。弦の端点は電荷をもった粒子であると考えられる。いまそれがさらに角運動量を持っているのであるから、遠方で磁気双極子のように見えるはずである。すなわち

$$
A_\theta = m\frac{r^2}{(r^2+z^2)^{3/2}} \qquad (3.13)
$$

そこで $A_\theta = 0$ の解

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \int d((r^2+z^2)^{1/2}) \frac{C}{\sqrt{(r^2+z^2)^2 - C^2(\beta^2-1)}} && (3.14)\\
X &= \beta A_0 && (3.15)
\end{aligned}
$$

に、磁気モーメント m の 1 次の補正を加えた近似解を構成してみよう。

$$
A_\theta = m \frac{r^2}{(r^2+z^2)^{3/2}} f(r^2+z^2) + O(m^2) \tag{3.16}
$$

と仮定して m の 1 次の項だけ残すと、$\det M$ からは m 依存性が消えて、A_0, X にはこのオーダーでは何の影響もないことがわかる。そして A_θ の運動方程式は次の常微分方程式に帰着される。

$$
f''(R) - \frac{2}{R} f'(R) + C^2(\beta^2-1) \frac{1}{R^2} \frac{2R^2 - C^2(\beta^2-1)}{[R^2 - C^2(\beta^2-1)]^2} f(R) = 0 \tag{3.17}
$$

これを直接解くのは困難であるが、$f(R) = 1 + c_1 R + c_2 R^2 + \ldots$ とべき展開して各係数を決めていくのは容易である。

この研究をさらに続ける際の方向性としては (1) べき展開が無限に続けられるのか？(2) より次元の高い D ブレインの上での解が求められるか？(3) 解が求まったとして、それがどのような熱的統計集団を表すか、温度やエントロピーはどう計算されるのか？等が考えられる。今後さらに発展させていきたい。

参考文献

[1] C. G. Callan, Jr., J. M. Maldacena, "*Brane Dynamics From the Born-Infeld Action*", `hep-th/9708147`, *Nucl. Phys.* **B513** (1998) 198.

[2] A. Strominger and C. Vafa, "*Microscopic Origin of the Bekenstein-Hawking Entropy*", `hep-th/9601029`, *Phys. Lett.* **B379** (1996) 99.

[3] O. Lunin and S. D. Mathur, "*Metric of the multiply wound rotating string*", `hep-th/0105136`, *Nucl. Phys.* **B610** (2001) 49.

[4] C. G. Callan, Jr., J. M. Maldacena, A. W. Peet, "*Extremal Black Holes As Fundamental Strings*", `hep-th/9510134`, *Nucl. Phys.* **B475** (1996) 645.