鹿児島大学工学部研究報告　第 51 号（2009）

# 極配置によるオブザーバ型自動抽出制御の設計について

高田　等*　提　祐樹**　八野 知博*

# On Design of Automatic Choosing Control by Pole Placement

Hitoshi TAKATA*, Yuki SAGE** and Tomohiro HACHINO*

This paper is concerned with design of an augmented automatic choosing control (AACC) for nonlinear systems. The AACC is synthesized by smoothly uniting a set of sectionwise linear controls, in which pole placement approach is used. An observer theory is applied to it in a case that the state vector includes some unmeasurable variables directly. Control and observer's gains are obtained by the pole placement method.

**Keywords:** Nonlinear system, Augmented automatic choosing control, Observer, Pole placement

## 1. はじめに

我々の身の回りには様々なシステムが存在し，実在するシステムのほとんどが非線形システムである．その制御理論は確立されておらず直接制御や解析を行うことは一般に容易でない．そこで非線形システムに対して安定化コントローラを設計する手法の一つとして何らかの方法で線形化を行い，線形制御則を適用する手法がある．しかし，それだけでは非線形性の強いシステムにおいては十分な制御を行うことは困難である．そこで我々は非線形性の強いシステムにも有効な自動抽出制御法 [1) ]について考察した．

自動抽出制御法では，まず，システムの非線形性を考慮して複数の小領域にシステムを分割し，分割した各小領域毎にテイラー展開一次近似を行い，区分的線形制御則群を構成する．その線形制御則群に自動抽出関数を乗じ総和することで全領域を滑らかにつなぎ，一つの準最適制御則を導く手法である．その際，制御則を導くときの複雑化の原因である定数項を除くために，次元を拡大する安定なゼロダイナミクス変数を導入した拡大次元自動抽出制御法が考案されている．ただしこの制御法は状態変数が全て観測できる場合のものである．

本報告では，観測できない未知の状態変数がある場合に，オブザーバ [2)] を用いて未知の状態変数を推定する．オブザーバにより推定された推定値に基づき自動抽出制御を行うオブザーバ型自動抽出制御法 [3),4)] を考案した．この際に，自動抽出制御のフィードバックゲインとオブザーバのオブザーバゲインを極配置法 [5)−7)] により決定した．数値シミュレーションで，本手法の有効性を線形近似法（LOC）と比較して確認した．

第 2 節では極配置に関する基礎理論を，第 3 節では自動抽出制御法，第 4 節ではオブザーバについて述べる．第 5 節では数値シミュレーション，最後に第 6 節で結論を示す．

---

2009 年 7 月 10 日受理

*　電気電子工学専攻
**　博士前期課程電気電子工学専攻

## 2. 極配置の基礎理論

本節では，線形システムに対する極配置の基礎理論を集約する．

システムの制御特性のうち，特に過渡特性はシステムの極により影響を受ける．開ループ系の極が望ましくない値を持つ時，閉ループ系を構成して，閉ループ系の極を要求される制御性能を持つような値に移すことが出来れば，制御装置を設計する際に実用上，極めて有効なことである．このように，希望する閉ループの極を持つような制御装置の設計問題を極配置問題という．

### 2.1 状態方程式と開ループ特性

次式で表されるシステムを考える．

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1)$$

ここで，$u(t)$ は $r$ 次元入力ベクトル，$y(t)$ は $l$ 次元出力ベクトル，$x(t)$ は $n$ 次元状態ベクトルであり，行列 $A$ は $n \times n$ システム行列，$B$ は $n \times r$ 駆動行列，$D$ は $l \times r$ 伝達行列である．

(1) 式の開ループ系の極は，次の特性方程式の根である．

$$|sI - A| = 0 \quad (2)$$

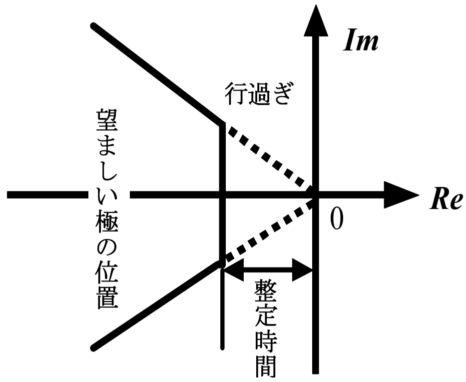
(2) 式は，次のようにべき乗多項式に展開できる．

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0 = 0 \quad (3)$$

この特性方程式の根は $n$ 個あり，その複素平面状の位置から，開ループ特性が決まる．

1. 安定性：システムが安定であるためには，全ての極の実数部が負でなければならない．
2. 過渡特性：
- 整定時間：整定時間を指定の値より短くするには，極を虚軸から指定された値だけ負側に離すことが必要である．
- 行過ぎ：行過ぎを指定の値より少なく抑えるには，極を実軸から指定された値以上離してはならない．

これらの条件を満たす極の位置を図－１に示した．(3) 式で求められた開ループの極のいくつかが条件から外れている時，何らかの方法で希望の極に移さなければならない．その答えは，極配置可能性として得られる．



図－１　望ましい極の位置

### 2.2 極配置可能性

(1) 式で記述されるシステムを

$$u(t) = -Fx(t) \quad (4)$$

となる状態フィードバックゲインにより，閉ループ系を構成する．$F$ は $r \times n$ 行列であり，これをフィードバックゲインという．閉ループ系の状態方程式と特性方程式は

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BFx(t) \quad (5)$$

$$|sI - A + BF| = 0 \quad (6)$$

となる．閉ループ系の極は (6) 式の根である．閉ループ系の極が，指定した希望の値を持つようにフィードバックゲイン $F$ の値を求めることが極配置問題である．(1) 式に (4) 式の状態フィードバックを行い，得られた閉ループ系の極を希望の位置に配置する為の必要十分条件は (1) 式の系が可制御であることである．

## 3. 自動抽出制御法

### 3.1 線形近似の拡大次元化

システムが次の非線形微分方程式

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, x \in D \subset R^n \quad (7)$$

で与えられる制御問題について考える．
ただし，

$\cdot = d/dt$
$x = [\,x[1] \quad \ldots \quad x[n]\,]^T$ ：$n$ 次元状態ベクトル
$u = [\,u[1] \quad \ldots \quad u[r]\,]^T$ ：$r$ 次元制御ベクトル
$f$：連続微分可能な非線形 $n$ 次元ベクトル値関数
$g$：連続微分可能な非線形 $n \times r$ 行列値関数
$f(0) = 0$，$g(0) \neq 0$

である．

連続微分可能な $L$ 次元分離ベクトル値関数 $C: x \to R^L$ を導入し，その値域を $D$ とする．次に，領域 $D$ を $M+1$ 個の小領域に分割 $(D = \cup_{i=0}^{M} D_i)$ する．(7) 式に対し，各小領域 $D_i$ ごとに，$\hat{\chi}_0 = 0$ および $\hat{\chi}_i \in C^{-1}(D_i)$ 点近傍でのテイラー展開線形化は，

$$\dot{x} = A_i x + w_i + B_i u \tag{8}$$

ただし，

$A_i = \partial f(\hat{\chi}_i)/\partial \hat{\chi}_i^T$，$w_i = f(\hat{\chi}_i) - A_i \hat{\chi}_i$，
$B_i = g(\hat{\chi}_i)$

である．ここで，安定なゼロダイナミクス変数 $x_{n+1}$ を導入し，定数項 $w_i$ に乗じて，(8) 式を次のように拡大次元化する．

$$\begin{cases} \dot{x} = A_i x + w_i x_{n+1} + B_i u \\ \dot{x}_{n+1} = -\sigma x_{n+1} \end{cases} \tag{9}$$

$$(x_{n+1}(0) \simeq 1 \ ,\ 0 < \sigma \ll 1)$$

すなわち (7) 式は，

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}} &= \begin{bmatrix} A_i & w_i \\ 0 & -\sigma \end{bmatrix} \mathbf{X} + \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ &= \mathbf{A}_i \mathbf{X} + \mathbf{B}_i u \end{aligned} \tag{10}$$

ただし，$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n & x_{n+1} \end{bmatrix}^T$ である．これを拡大次元システムと呼ぶ．

各領域ごとに線形近似した場合，それぞれの制御則 $u_i(X)$ は (11) 式により求められる。

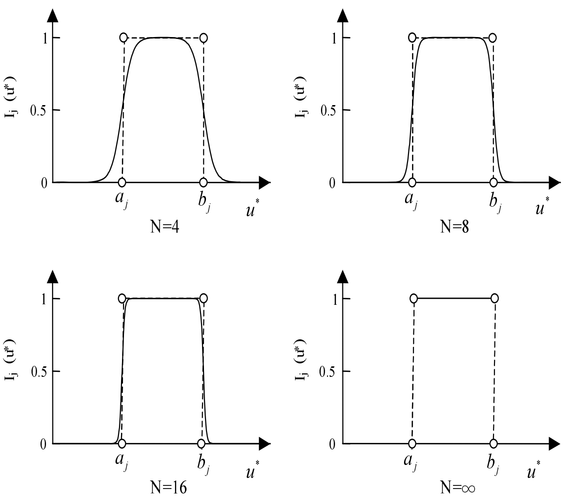
$$u_i(X) = \ -F_i \mathbf{X} \tag{11}$$

本研究では，(11) 式のフィードバックゲイン $F_i$ を極配置法により導出する．この制御則を，全領域で連続した一つの制御則に合成するため，次の自動抽出関数を導入する．

### 3.2　自動抽出関数

前節では各領域 $D_i$ で最適制御則 $u_i$ を求めた．隣り合った領域同士の制御則 $u_i$ を抽出し，つなぎ合わせることで全領域の連続した制御則 $u(X)$ を合成する．このため，領域 $D_i = \prod_{j=1}^{L} [a_{ij}, b_{ij}]$ を抽出する関数が必要である．すなわち，抽出したい領域でほぼ 1，それ以外では 0 となるような関数である．

$$I_{iN}(x) = \begin{cases} 1 \text{ ( 抽出領域内 )} \\ 0 \text{ ( 抽出領域外 )} \end{cases} \tag{12}$$




図－２　シグモイド型自動抽出関数の概略図

しかし，(12) 式を満たすような解析関数は存在しないため，次のシグモイド型自動抽出関数で近似する．

$$I_{iN} = \prod_{j=1}^{L} I_{iN}(x; j) \tag{13}$$

$$\begin{aligned} I_{iN}(x;j) = 1 &- \frac{1}{1 + exp(2N(C_j(x) - a_{ij})/h_j)} \\ &- \frac{1}{1 + exp(-2N(C_j(x) - b_{ij})/h_j)} \end{aligned} \tag{14}$$

ただし，$N$ は自然数，$h_i = (b_{ij} - a_{ij})/2$ である．自動抽出関数は，$N \to \infty$ で理想的なものに近づくが，実際の制御分野への適用では以前の実験報告で $N = 8$ 以下でも有効であることが検証されている．図－２にシグモイド型自動抽出関数の概略図を示す．

### 3.3　準最適制御則合成

各領域の最適制御則と自動抽出関数を乗じることにより，次のフィードバック制御則が得られる．

$$u(x) = \sum_{i=0}^{M} u_i(X) I_{iN}(x) \tag{15}$$

これを全領域の完全観測時制御則と定義する．これは，領域毎に切り替えのない単一フィードバック制御則である．次に不完全観測時について考察する．

## 4. オブザーバ型線形制御の基礎理論

4.1 節では線形システムに対する，オブザーバ型線形制御の基礎理論を集約する．これを土台にして，4.2 節では非線形システムに対するオブザーバ型自動抽出制御則を設計する．

### 4.1 オブザーバに基づく制御系設計

システムの状態 $x(t)$ が全て観測できる場合は，極配置法を用いて状態フィードバック則を設計できる．しかし，$x(t)$ のうち観測できない変数がある場合は，$x(t)$ の代わりにその推定値 $\hat{x}(t)$ をオブザーバから求める．この推定値を用いて制御則を

$$u(t) = -F\hat{x}(t) \tag{16}$$

とする．同一次元オブザーバの場合を考える．(16) 式と組み合わせた

$$\begin{cases} u(t) = -F\hat{x}(t) \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(y(t) - C\hat{x}(t)) \end{cases} \tag{17}$$

を出力フィードバック則という．(1) 式のシステムに (16) 式の出力フィードバック則を代入すると

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BF & -BF \\ 0 & A-KC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \tag{18}$$

ただし，$e = x - \hat{x}$ を得る．ここで，この (17) 式の閉ループシステムの極を考える．特性多項式は

$$\begin{vmatrix} sI-(A+BF) & BF \\ 0 & sI-(A-KC) \end{vmatrix} \tag{19}$$
$$= \left| \ sI-(A+BF) \ \right| \left| \ sI-(A-KC) \ \right|$$

となるから，(17) 式の極は，状態フィードバック系の極 ($(A+BF)$ の固有値) とオブザーバの極 ($(A-KC)$ の固有値) を合わせたものとなる．またフィードバックゲイン $F$ が，オブザーバの極に影響を与えないことが分かる．つまり，どんな $F$ に対してもオブザーバの極は $K$ により決定される．同様にオブザーバゲイン $K$ が，状態フィードバック系の極に影響を与えない．これを分離原理と呼ぶ．

また，システムが可制御可観測であれば，(18) 式の極を自由に配置することができる．従って，システムの状態が全て観測できない場合でも，状態フィードバック則とオブザーバを独立に設計し，それらを組み合わせて (17) 式の出力フィードバック則を設計して，システムを安定化することが可能である．

なお，実際に出力フィードバック則を設計する場合には，オブザーバの極を状態フィードバックの極よりも左側に設計することが望ましい．これは，状態推定値をより早く真の状態に近づけることが必要となるからである．

### 4.2 オブザーバ型自動抽出制御

非線形システムに対し，オブザーバと拡大次元自動抽出制御法を組み合わせることで，制御則を合成する．

(1) 式と (7) 式による次の連続時間非線形システムを考える．

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = cx \end{cases} \tag{20}$$

ただし，$y$ は $l$ 次元出力ベクトルである．これを (8) 式の領域ごとテイラー展開一次近似を行うと

$$\begin{cases} \dot{x} = A_i x + w_i + B_i u \\ y = Cx \end{cases} \tag{21}$$

となる．さらに，安定なゼロダイナミクス変数を導入し次元を拡大すると (10) 式から

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}_i\mathbf{X} + \mathbf{B}_i u \\ \mathbf{Y} = \mathbf{CX} \end{cases} \tag{22}$$

ただし，$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ x_{n+1} \end{bmatrix}$, $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y \\ x_{n+1} \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ となる．次に，制御ベクトル $u$ と観測ベクトル $\mathbf{Y}$ から状態推定値 $\hat{\mathbf{X}}$ を与える自動抽出関数を導入したオブザーバは（17）式を変換して，次式で表される．

$$\dot{\hat{\mathbf{X}}} = \sum_{i=0}^{M} \{\mathbf{A}_i\hat{\mathbf{X}} + \mathbf{B}_i u + \mathbf{K}_i(\mathbf{Y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{X}})\} I_i(\hat{x}) \tag{23}$$

このとき，自動抽出制御の極を $P_c(i)$，およびオブザーバの極を $P_o(i)$ $(i = 0, 1, \ldots, M)$ とした．

$$P_c(i) = [\lambda_1^c, \lambda_2^c, \ldots, \lambda_n^c, \lambda_{n+1}^c](i)$$
$$P_o(i) = [\lambda_1^o, \lambda_2^o, \ldots, \lambda_n^o, \lambda_{n+1}^o](i)$$
$$Re(\lambda_j^c) < Re(\lambda_j^o), \{Re(\lambda_j^c) \leq -\sigma \quad (j = 0 \ldots n)\}$$

となる．ただし $\lambda_{n+1}^c = -\sigma$ である．

## 5. 数値シミュレーション

### 5.1 例題

電力系統における発電機動揺方程式は (24) 式で表される．

$$\begin{cases} M\dfrac{d^2\delta}{dt^2} + D\dfrac{d\delta}{dt} + P_e(\delta) = P_{in}(1+u) \\ P_e(\delta) = \dfrac{e_l E_{fd}}{X_e} sin\delta \end{cases} \tag{24}$$

ここで，$\delta$:発電機の相差角，$M$ : 発電機回転子の慣性定数，$D$ : 制動係数，$P_{in}$ : 機械的入力，$P_e$ : 電気的出力，$E_{fd}$ : 界磁電圧，$X_e$ : 系統インピーダンス
$e_l$ : 無限大母線電圧である．

状態変数として $x_1 = \delta - \hat{\delta}_0$，$x_2 = \dot{\delta}$，制御変数を $u$，観測である出力変数を $y = x_2$ とした．

定数および定常値 $(\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0)$ を以下のように設定した．

$M = 0.06[pu]$，$D = 0.06[pu]$，$E_{fd} = 1.0[pu]$
$e_l = 1.0[pu]$，$X_e = 1.0[pu]$，$P_{in} = 0.8[pu]$
$\hat{\delta}_0 = 0.9276[rad]$ で，$N = 4$，領域の分割数は 2，分割点は $x_1 = 1$，$\hat{\chi}_0 = 0.9268[rad]$，$\hat{\chi}_1 = 1.832[rad]$
分割領域は $D_0 = (-\infty, \frac{\pi}{2}]$，$D_1 = [\frac{\pi}{2}, \infty)$ である．

自動抽出制御則と，オブザーバゲインを以下に示す．

$$u = -\sum_{i=0}^{M} F_i \hat{X} I_{iN}(\hat{x}) \qquad (25)$$

$$= -(F_0 I_0(\hat{x}_1) + F_1 I_1(\hat{x}_1))\hat{X}$$

$$K = \sum_{i=0}^{M} K_i I_{iN}(\hat{x}) = -(K_0 I_0(\hat{x}_1) + K_1 I_1(\hat{x}_1)) \qquad (26)$$

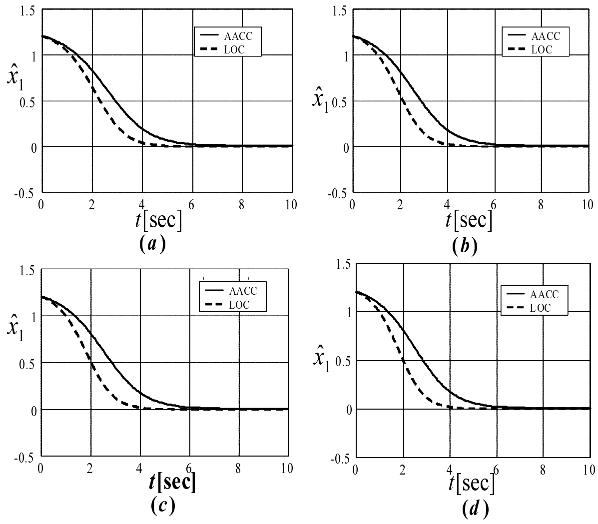
### 5.2　極配置の設定

線形近似法（以降 LOC と記す）と，オブザーバ型自動抽出制御法（以降 AACC と記す）の時間応答，安定領域の比較を行う．オブザーバの極配置 $P_o(0)$ を変化させた．自動抽出制御の極配置 $P_c = P_c(0) = P_c(1)$ とオブザーバの極配置 $P_o(1)$ は以下の値に固定した．それぞれのコントロールゲイン $F_0$ と $F_1$，オブザーバゲイン $K_1$ の値を記す．

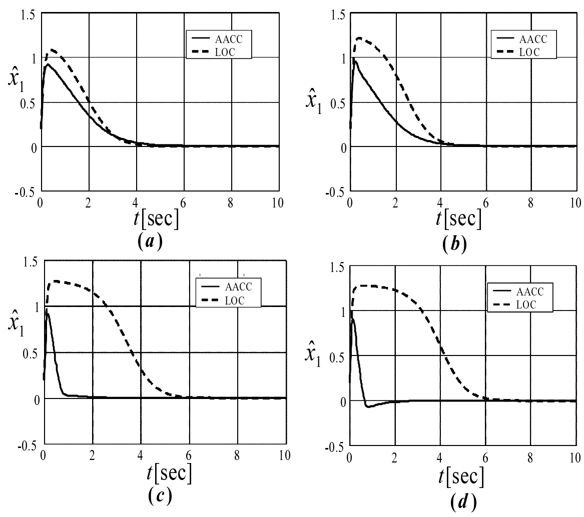
$P_c = [-1.3 \quad -13 \quad -0.1], F_0 = [0.5170 \;\; 0.9975 \;\; 0]$
$F_1 = [1.5903 \;\; 0.9975 \; -0.4998]$
$P_o(1) = [-5 \quad -4 \quad -0.1], K_1 = [5.6476 \;\; 8 \;\; 0]^T$

一方 $Po(0)$ は，その虚数部を変化させた．
(a).$P_o(0) = [-15 \pm 5i \; -0.1], K_0 = [-23.9835 \;\; 29 \;\; 0]^T$
(b).$P_o(0) = [-15 \pm 20i \; -0.1], K_0 = [-61.4588 \;\; 29 \;\; 0]^T$
(c).$P_o(0) = [-15 \pm 30i \; -0.1], K_0 = [-111.4258 \;\; 29 \;\; 0]^T$
(d).$P_o(0) = [-15 \pm 35i \; -0.1], K_0 = [-143.9044 \;\; 29 \;\; 0]^T$

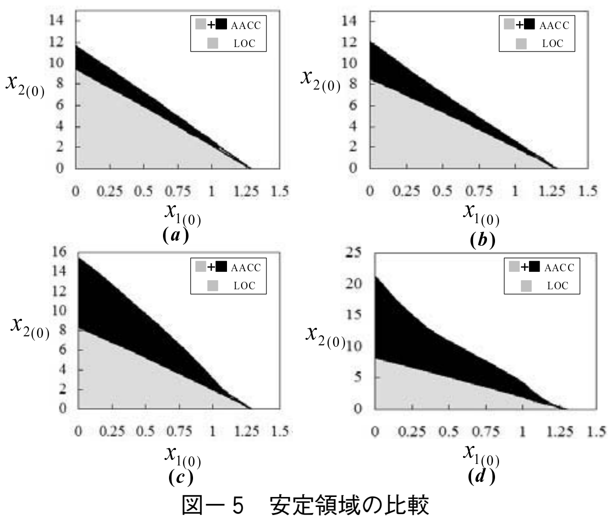
初期条件は次の 2 種類を設定した．
(1).$[x_1(0) = 1.2,\; x_2(0) = 0]$
(2).$[x_1(0) = 0.2,\; x_2(0) = 7]$



図－3　$x_1(0) = 1.2$，$x_2(0) = 0$　時の $\hat{x}$ の時間応答



図－4　$x_1(0) = 0.2$，$x_2(0) = 7$　時の $\hat{x}$ の時間応答



図－5　安定領域の比較

### 5.3　数値シミュレーション結果の検討

時間応答については，$x_1(0) = 1.2$，$x_2(0) = 0$ の初期条件では $\hat{x}$ は全ての極配置において LOC の方が収束時間が早かった．しかし，初期条件が $x_1(0) = 0.2$，$x_2(0) = 7$ の場合は，$P_o(0)$ の虚数が小さい場合 ((a)，(b)) では LOC と AACC の差は見られなかったが，虚数が大きい場合 ((c)，(d)) では $\hat{x}$ の収束時間は短く AACC のほうが即応性に優れていた．5.2 節において $K_0 = \left[\ K_0[1] \quad K_0[2] \quad 0\ \right]^T$ と記す．この結果より，虚数が大きい，つまり $K_0[1]$ のみ小さい場合は即応性は $x_2(0) = 0$ 付近では LOC との差はなくなり，$x_1(0) = 0$ 付近では AACC の方が良くなることがわかる．これより．即応性の向上には $K_0[1]$ を小さくすれば良いと思われる．$y$，$u$ の場合でも同様の結果がみられた．

安定領域については，AACC が全ての極配置において LOC より拡大されていることが確認できた．また $P_o(0)$ の虚数を大きくするほど安定領域は拡大されることがわかる．さらに虚数を大きくしていくと安定領域の形がいびつになったり領域に穴が開く部分が表れてしまうことがあった．

また，極配置 $P_o(0)$ の実数部のみを変化させた場合でもシミュレーションを行った．$K_0[1]$ は小さくなっていたにも関わらず即応性は向上せず，安定領域も LOC よりは拡がるものの，AACC 同士では特に変化が見られなかった．実数部が大きい方が安定領域が拡大されるという結果も得られたが，これは自動抽出制御の極配置 $P_c$ と近い値が良いということが考えられる．実数部を変化させた場合は $K_0[2]$ も同時に変化してしまい，$K_0[2]$ の値が大きくなっていた．$K_0[2]$ の作用の解明は今後の研究課題の一つである．

## 6. 結論と今後の課題

本報告では非線形システムの制御法として，極配置によるオブザーバ型自動抽出制御法を提案した．従来の極配置型自動抽出制御において，観測できない状態変数がある場合を想定してオブザーバを導入し，極配置法によるオブザーバと制御則の構成を検討した．電力系統における発電機動揺方程式を制御対象とする数値シミュレーションにおいて，従来法である線形近似法 (LOC) より，本手法である極配置によるオブザーバ型自動抽出制御法 (AACC) では安定領域の拡大が確認できた．時間応答においては旧手法の方が優れている場合と，本手法の方が優れている場合が存在した．また，オブザーバの極配置の実数部は制御則の極に近く，虚数部が適当な大きさを持つことが必要であると思われる．

今後の課題としては，オブザーバゲインの各パラメータによる作用の解明などがある．

### 参考文献


1) 高田　等，提　祐樹，八野　知博：極配置による自動抽出制御の設計について, 第 26 回計測自動制御学会九州支部学術講演会，pp.37-38 (2007).
2) 宮崎　道雄：システム制御　, オーム社 (2004).
3) 高田　等，提　祐樹，八野　知博：極配置によるオブザーバ型自動抽出制御, 平成 20 度電気関係学会九州支部連合大会, 12-2P-05 (2008).
4) 高田　等，小濱　健吾，八野　知博：不完全観測型拡大次元自動抽出制御による電力系統過渡安定度制御, 第 26 回計測自動制御学九州支部学術講演会, pp.79-80 (2007).
5) 添田　喬，中溝　高好：自動制御の講義と演習, 日新出版 (1988).
6) 森　泰親：演習で学ぶ現代制御理論, 森北出版 (2003).
7) 相良　節夫：基礎自動制御, 森北出版 (2004).
8) 野波　健造，西村　秀和：MATLAB による制御理論の基礎, 東京電機大学出版局 (1998).