Dixit and Nalebuff（1991）の三者決闘ゲームの一般化についての考察：1ラウンド制ゲームとして限定した場合

王　　鏡　凱[1]

1．はじめに

本研究は，本来２ラウンド制で行われる Dixit and Nalebuff（1991）の三者決闘ゲームについて，１ラウンド制のゲームとして制限する一方，各プレーヤーの命中率 (p, q, r) については数値例ではなく，より満たされやすい条件 $(0 \leq p < q < r \leq 1)$ として考察したものである。本来，三者決闘ゲームについては，Dixit and Nalebuff（1991）が２ラウンド制の数値例として取り上げられているゲームである。Dixit and Nalebuff（1991）では，２ラウンド制で行われる三者決闘ゲームのプレーヤー３人（A・B・C）の命中率を（0.3，0.8，1）の数値例として取り上げ，先読み推論法を用いて各プレーヤーの最適戦略を考察した。

これに対して本研究では，本来２ラウンド制で行われる Dixit and Nalebuff（1991）の三者決闘ゲームを１ラウンド制のゲームとして制限するが，各プレーヤーの命中率 (p, q, r) については数値例ではなく，より満たされやすい条件 $(0 \leq p < q < r \leq 1)$ の下で考察するものである。

三者決闘ゲームについては，Dixit and Nalebuff(1991) では先読み推論法を用いて考察されており，王・江 (2017) ではバックワード・インダクションの手法を用いて条件付き一般化した三者決闘ゲームについて考察している。条件付き一般化とは，プレーヤー C の命中率だけは Dixit and Nalebuff（1991）と同じく $(r = 1)$ に固定したままという条件の下，他の２人のプレーヤー（A・B）の命中率 (p, q) については，$(0 \leq p < q < 1)$ として一般化された形で２ラウンドの三者決闘ゲームがプレイされることである。

また王（2021）では，（A・B）の命中率について Dixit and Nalebuff（1991）と同じく（0.3，0.8）に固定したまま，プレーヤー C の命中率だけを $(0.8 < r \leq 1)$ までに広げた上，元の Dixit and Nalebuff（1991）の三者決闘ゲームの最適戦略はやはり最適であることを証明した。

そして，まだ考察されていないのは，プレーヤー３人（A・B・C）の命中率が一般化された形である $(0 \leq p < q < r \leq 1)$ の場合だけである。バックワード・インダクションの手法で２段階三者決闘ゲームを一気に考察するには作業量が多く，分析も煩雑になるため，完成した証明は筆者からみても決してリーダーフレンドリーとは言えない状態であった。そこで，筆者は証明の手順を整

[1] 鹿児島大学准教授，本論文に関するすべてのお問い合せは責任著者である王鏡凱にご連絡ください。
E-mail: kyogaiw@leh.kagoshima-u.ac.jp

理する必要があると判断した。本研究では，一般化された形の Dixit and Nalebuff（1991）の三者決闘ゲームの第１段階のゲームを分析するための準備作業として，まずは第２段階のゲームに限定して考察を行った。本研究の考察結果は，一般化された２ラウンド制の三者決闘ゲームの分析の基礎となる。

本研究の構成は以下の通りである。まず第２節では Dixit and Nalebuff（1991）の三者決闘ゲームとプレーヤーの目的関数について説明する。そして，第３節では各プレーヤーの命中率 (p, q, r) については，数値例ではなく，$(0 \leq p < q < r \leq 1)$ という仮定の下，１ラウンド制ゲームに限定した Dixit and Nalebuff（1991）の三者決闘ゲームについて考察する。最後に全体をまとめる。

２．Dixit and Nalebuff（1991）の三者決闘ゲームとプレーヤーの目的関数について

ここでは Dixit and Nalebuff（1991, pp.292-293）に基づき，必要に応じて筆者が加筆修正した三者決闘ゲームについて説明する。３人のプレーヤー（A・B・C）は，２ラウンド制の逐次ゲームとして，（A, B, C）の順に１発ずつ撃つことになっている。

各プレーヤーの戦略は２つしかなく，相手を狙って撃つかまたはわざと外すように空砲を撃つかである。相手を狙って撃つと決めた場合，３人の命中率はそれぞれ $(p{:}\, q{:}\, r = 0.3{:}\, 0.8{:}\, 1)$ となっている。以下では，特に説明しない限り，あるプレーヤー（例えば C）が別のプレーヤー（例えば A）を狙って撃つことを，単に（C → A）として表記する。また，C が空砲を撃った場合，（C →◎）とする。

各プレーヤーにとっての最善の結果は，自分だけが生き残ることである。次によいのは２人が生き残り，そのうちの１人になることである。３番目によいのは３人全員が生き残ることである。最悪なのは自分だけが殺されることである。

以上のルールの下でプレーヤー A の生存確率を最大にする最適戦略とは何かについて求める問題である。付録では Dixit and Nalebuff(1991) の解き方を引用しており，必要に応じて参照されたい。ここでは，プレーヤーの選好に基づいてその目的関数について説明する。

各プレーヤーの目的関数は，①自分の生存確率の最大化と②自分への潜在的な脅威の最小化を，両立することである。目的関数②自分への潜在的な脅威の最小化について具体的に説明する。潜在的というのは，競争相手の多さとその命中率の高さの両方を意味する。競争相手の多さの脅威については，仮に競争相手の出番になったときに自分へ狙うはずがないにもかかわらず，相手が生きているという事実だけでも脅威となりうることを意味する。競争相手の命中率の高さの脅威については，仮に競争相手の出番になったときに自分へ狙うはずがないにもかかわらず，相手の命中率が０でないという事実だけでも脅威となりうることを意味する。従って，潜在的な脅威の最小化とは，単に競争相手の絶対数の多さを減らすことだけでなく，相対的に命中率の高い競争相手を優先的に減らすことも必要である。命中率の高い相手を優先的に撃つことは，プレーヤーの選好を反映したものである。

プレーヤーの目的関数を理解するために第 2 ラウンドの最終出番のプレーヤー C について考えるとよい。仮にいまは 3 人のプレーヤーが生きている状態で第 2 ラウンドの最終出番のプレーヤー C が行動を決める番になったとしよう。プレーヤー C にとっては，空砲（C →◎）を撃つことも，また（C → B）にしても（C → A）にしても，C の生存確率はすべて同じ最大の 1 であることに変わりがないので，目的関数①は満たされる。しかし，目的関数②は満たされないかもしれない。逐次合理性に基づくと，もし次も同じ状況になったら，今の C はどうふるまうべきかを合理的に推論できる。合理的な C は，決して空砲（C →◎）をしないはずである。なぜなら，C はまだ潜在的な競争相手 A と B の数を減らすことが出来るので，空砲を選ぶはずがない。また同じ推論法に基づけば，合理的な C にとっての潜在的な脅威は，A よりも B の方が大きいので，C は（C → A）よりも（C → B）を選好するはずである。このように，各プレーヤーの目的関数は，自分の生存確率の最大化と自分への潜在的な脅威の最小化を両立することである。

また，王・江（2017）でも説明した通り，この選好の順序は 2 ラウンド制の逐次ゲームのルール（制約条件）として必要不可欠である。なぜなら，このような選好の順序を仮定しないと，共謀が排除できないからである。各プレーヤーの目的関数は生存確率の最大化だけであれば，生き残りの人数に関する選好の順序を仮定せず，単に n ラウンド制の逐次ゲームをやっても，全員が繰り返して空砲を撃つことで，確率 1 で全員が生き残れる。このような共謀行為は本研究の目的と異なるものであり，本論文は Dixit and Nalebuff（1991）に倣い，共謀の可能性を排除する。

3.　1 ラウンド制の三者決闘ゲームの一般化について

ここでは，各プレーヤーの命中率 (p, q, r) について数値例ではなく，$(0 \leq p < q < r \leq 1)$ という仮定の下，1 ラウンド制ゲームに限定した Dixit and Nalebuff（1991）の三者決闘ゲームについて考察する。考察にはバックワード・インダクションの手法を用いる。まずはゲームの最終出番のプレーヤー C の行動から考察する。次はプレーヤー C の考察結果を所与としてプレーヤー B の行動を考察する。最後はプレーヤー B と C の考察結果を所与としてプレーヤー A の行動を考察する。

3.1. C の行動について

バックワード・インダクションにしたがってゲームについて考察する。まずは（A, B, C）の順で最後に行動を決めるプレーヤー C について考える。C の番がくるまでは，（A, B, C）の順で A と B がそれぞれ一発を撃ち，誰に向けて発砲したのか結果はともかく，C が撃たれて退場すればそれまでのことである。もし C が生き残っていれば，C が行動する直前に考えられるすべての状況（S）は，S① {A・C} が生き残っているケース，S② {B・C} が生き残っているケース，S③ {A・B・C} 全員が生き残っているケース，の 3 通りである。

S①：もし {A・C} が生き残っており，かつ今は C の出番とすれば，（C → A）が最適行動である。

確率 r で A に命中し，結果 {C} になる。または確率 $(1-r)$ で A に命中しない，結果 {A・C} になる。そしてゲーム終了する。目的関数②より，脅威となるライバルがいる限り，行動（C →◎）が選ばれることがない。

S②：もし {B・C} が生き残っており，かつ今は C の出番とすれば，行動（C → B）が最適である。確率 r で B に命中し，結果 {C} になる。または確率 $(1-r)$ で B に命中しない，結果 {B・C} になる。そしてゲーム終了する。ここでも目的関数②より，脅威となるライバルがいる限り，行動（C →◎）が選ばれることがない。

S③：もし {A・B・C} 全員が生き残っており，かつ今は C の出番とすれば，行動（C → B）が最適である。確率 r で B に命中し，結果 {A・C} になる。または確率 $(1-r)$ で B に命中しない，結果 {A・B・C} 全員が生き残ることになる。そしてゲーム終了する。ここでも目的関数②より，脅威となるライバルがいる限り，行動（C →◎）が選ばれることがない。

S③について，もし {A・B・C} 全員が生き残っており，かつ今は C の出番とすれば，C が取れる行動は（C →◎）と（C → A）と（C → B）の 3 通りである。行動（C →◎）の場合，結果 {A・B・C} 全員が生き残ることになる。これはプレーヤーの目的関数②，自分への潜在的な脅威の最小化することに矛盾するので，行動（C → A）または行動（C → B）よりも劣る戦略である。C が行動（C → A）を選んだ場合，確率 r で結果 {B・C} になる。一方，C が行動（C → B）を選んだ場合，同じ確率 r で結果 {A・C} になる。C にとっては結果 {B・C} よりも結果 {A・C} を選好する。これは，プレーヤーの目的関数②，自分への潜在的な脅威の最小化することに基づいた結果である。プレーヤーの命中率は $(0 \leq p < q < r \leq 1)$ となっているので，C にとっては，命中率の最も低い A との共存の方は，命中率がより高い B との共存よりも望ましい。

C の行動についてまとめると，S① {A・C} なら行動（C → A），S② {B・C} なら行動（C → B），S③ {A・B・C} なら行動（C → B）がそれぞれ最適である。

3.2　B の行動について

次に3.1節のプレーヤー C の考察結果を所与としてプレーヤー B の行動を考察する。B の番がくるまでは，（A, B, C）の順で A が一発を撃ち，誰に向けて発砲したのか結果はともかく，B が撃たれて退場すればそれまでのことである。もし B が生き残っていれば，B が行動する直前に考えられるすべての状況（S）は，S④ {A・B} が生き残っているケースと S⑤ {A・B・C} 全員が生き残っているケースの 2 通りである。

S④：もし {A・B} が生き残っており，かつ今は B の出番とすれば，行動（B → A）が最適である。

確率 q で A に命中し，結果 {B} になる。または確率 $(1-q)$ で A に命中しない，結果 {A・B} になる。そしてゲーム終了する。目的関数②より，脅威となるライバルがいる限り，行動（B →◎）が選ばれることがない。

S⑤：もし {A・B・C} が生き残っており，かつ今は B の出番とすれば，行動（B → C）が最適である。確率 q で C に命中し，結果 {A・B} になる。または確率 $(1-q)$ で C に命中しない，結果 {A・B・C} 全員が生き残ることになる。そしてゲーム終了する。

3.1節の考察結果より，プレーヤー B と C が共存する状態 S② {B・C} と S③ {A・B・C} では，C が必ず行動（C → B）をとることが分かる。C の命中率が最も高いという事実を考えると，これが B にとっては最悪な状況である。この最悪な状況を回避するためには，B は少しでも C が行動（C → B）をとる可能性を下げようと努力する。すなわち，B は行動（B →◎）と行動（B → A）ではなく，行動（B → C）をとることによって，事前という意味において次に直面する行動（C → B）の実現可能性を最小限に抑える。ここでも目的関数②より，脅威となるライバルがいる限り，行動（B →◎）が選ばれることがない。また，目的関数①より，B が自分の生存確率の最大化を図るために行動（B → A）が選ばれることがない。

S⑤の考察については，3.1節の S③と同じ議論のロジックであり，再度に説明すると次の通りである。もし {A・B・C} 全員が生き残っており，かつ今は C の出番とすれば，B が取れる行動は（B →◎）と（B → A）と（B → C）の 3 通りである。行動（B →◎）の場合，結果 {A・B・C} 全員が生き残ることになる。これはプレーヤーの目的関数②，自分への潜在的な脅威の最小化することに矛盾するので，行動（B → A）または行動（B → C）よりも劣る戦略である。B が行動（B → A）を選んだ場合，確率 q で結果 {B・C} になる。一方，B が行動（B → C）を選んだ場合，同じ確率 q で結果 {A・B} になる。B にとっては結果 {B・C} よりも結果 {A・B} を選好する。これは，プレーヤーの目的関数②，自分への潜在的な脅威の最小化することに基づいた結果である。プレーヤーの命中率は $(0 \leq p < q < r \leq 1)$ となっているので，B にとっては，命中率の最も低い A との共存の方は，命中率が最も高い C との共存よりも望ましい。

B の行動についてまとめると，S④ {A・B} なら行動（B → A），S⑤ {A・B・C} なら行動（B → C）がそれぞれ最適である。そして，3.1節の考察結果と3.2節の考察結果を合わせると以下の結論 P が得られる。

結論 P: 1 ラウンド制ゲームに限定した Dixit and Nalebuff（1991）の三者決闘ゲームにおいて，プレーヤー A の命中率 p が $(0 \leq p < q < r \leq 1)$ という条件の下では，プレーヤー B と C はお互いに最大なライバルであり，最大な脅威である。このことから，プレーヤー B から始まるサブゲーム

においては，誰もプレーヤー A を狙って撃つことがないので，A の生存確率は 1 である。

3.3 A の行動について

最後に3.1節の考察結果と3.2節の考察結果を所与として A の行動を考察する。A → B → C の順で A の出番となった場合，A が行動する直前に考えられるすべての状況（S）は，S⑥ {A・B・C} 全員が生きているケースのみである。そして A の最適行動は（A →◎）である。結論 P より，A が行動（A →◎）をとることによって，実現する B から始まるサブゲームにおいては，誰も A を狙って撃つことがないので，A の生存確率は 1 である。逆にもし A が行動（A →◎）以外の行動をとると，事前の意味において B から始まるサブゲームの実現可能性を下げることになるので，A の生存確率は 1 より厳密に小さくなる。

3.1節から3.3までの考察結果に基づいて，1 ラウンド制ゲームに限定した Dixit and Nalebuff（1991）の三者決闘ゲームのサブゲーム完全均衡は以下の通りである。プレーヤー（A・B・C）の最適行動の組は {（A →◎），（B → C）} または {（A →◎），（B → C），（C → B）} である。均衡戦略に従って行動した場合，プレーヤー（A・B・C）の生存確率は以下の通りである。

$$P_A = 1,\ \ P_B = qr + (1 - r),\ \ P_C = (1 - q).$$

プレーヤー B と C の生存確率の大小関係については，qr と $(r - q)$ の大小関係次第である。$qr \geq (r - q)$ なら，$P_B \geq P_C$ であり，逆に $qr < (r - q)$ なら，$P_B < P_C$ である。

4. まとめ

本研究は，本来 2 ラウンド制で行われる Dixit and Nalebuff（1991）の三者決闘ゲームについて，1 ラウンド制のゲームとして制限する一方，各プレーヤーの命中率 (p, q, r) については数値例ではなく，より満たされやすい条件 $(0 \leq p < q < r \leq 1)$ の下で考察したものである。本研究では，一般化された形の Dixit and Nalebuff（1991）の三者決闘ゲームの第 1 段階のゲームを分析するための準備作業として，まずは第 2 段階のゲームに限定して考察を行った。本研究の考察結果は，一般化された 2 ラウンド制の三者決闘ゲームの分析の基礎となる。

考察の結果は結論 P としてまとめられる。1 ラウンド制ゲームに限定した Dixit and Nalebuff（1991）の三者決闘ゲームにおいて，プレーヤー A の命中率 p が $(0 \leq p < q < r \leq 1)$ という条件の下では，プレーヤー B と C はお互いに最大なライバルであり，最大な脅威である。このことから，プレーヤー B から始まるサブゲームにおいては，誰もプレーヤー A を狙って撃つことがないので，A の生存確率は 1 である。また，プレーヤー（A・B・C）の最適行動の組であるサブゲーム完全均衡は {(A →◎), (B → C)} または {(A →◎), (B → C), (C → B)} である。

付録：先読み手法による解き方
（Dixit and Nalebuff（1991，pp.292-293）を加筆修正した上での引用）

ここでは先読み手法でAの選択肢を個々に検討する。もしAがBを狙い命中させたら，その次はA自身がやられてしまう。なぜなら次はCの番になり，彼はAを確実に撃ち当て最善の結果に至る。だからAにとってBを狙うのはいい選択肢ではない。

次にもしAがCを狙い命中させたら次はBの番となり，BはAを狙うことになる。そうなると，A自身の生き残れる確率は20％以下となる。だからこれもあまり魅力のある選択肢ではない。

Aの最適行動は第1ラウンドではわざと空に向けて撃つことで外す，そして第2ラウンドではBかCの生き残ったほうを狙うことである。第1ラウンドでAがわざと外した場合，BはCを狙い，もし失敗してもCがBを撃ち当てる。第2ラウンドに入り，再びAの番となる。AはBかCの生き残ったほうを狙えば，30％以上の確率でAは唯一の生き残りとなる。

三者決闘ゲームから得られる教訓としては，小物（A）がスターになるには最初のチャンスは見送ったほうがよい場合がある。ライバルが多数いるときは，トップを走っている者は2番手以降から集中攻撃を受け，潰されることがある。こういう状況では，実力者（BとC）が互いに潰し合うまでは小物（A）が後方に控えておくほうが得である。

参考文献

Avinash Dixit and Barry Nalebuff（1991）, Thinking Strategically: Competitive Edge in Business, Politics and Everyday Life, WW Norton & Co.

（菅野隆，嶋津祐一　訳，「戦略的思考とは何か―エール大学式『ゲーム理論』の発想法」，TBSブリタニカ，1991。）

王鏡凱・江駿（2017），「Dixit and Nalebuff（1991）の三者決闘ゲームに関する考察：条件付き一般化」『九州地区国立大学教育系・文系研究論文集』，第5巻第1号，No.23，1–11。

王鏡凱（2021），「Dixit and Nalebuff（1991）の三者決闘ゲームに関する新たな拡張：もしプレーヤーCが百発百中でなかったら結果はどうなる？」鹿児島大学法文学部『経済学論集』97，107–112，研究ノート。