## 年金支払額の近似誤差について

王鏡凱\*・白石俊輔\*\*

## Approximation Error in Annual Annuity Payment Jingkai WANG and Shunsuke SHIRAISHI

Abstract: In this paper, we propose an approximate method for estimating the annuity payment using simple interest, avoiding the need for compound interest calculations. When comparing the proposed approximation method to conventional formulas that rely on compound interest, some errors might occur in terms of theoretical accuracy. Particularly when parameters (such as the number of years and interest rate) become large, the approximation error can increase. However, if the parameters are not excessively large, this method is practical and provides sufficient accuracy. Therefore, recognizing the presence of approximation errors, the practical benefits of the proposed method outweigh their theoretical drawbacks. With this approach, accurate annuity payment can be estimated while avoiding compound interest calculations. This approach provides a significant practical advantage, enabling the general public to estimate annuity payment easily without relying on pension experts or tools such as EXCEL.

Key Words: Annual Annuity Payment, Annuity Approximation, Approximation Error, Simple and Compound Interest

E-mail: s.shiraishi.wx@it-hiroshima.ac.jp

1

<sup>\*</sup> 鹿児島大学法文学部法経社会学科准教授,第一著者兼連絡著者,本論文に関するすべてのお問い合せは連絡著者である王鏡凱にご連絡ください. E-mail: kyogaiw@leh.kagoshima-u.ac.jp

<sup>\*\*</sup> 広島工業大学情報学部情報コミュニケーション学科教授,第一著者同等.

### Approximation Error in Annual Annuity Payment

#### 1. はじめに

本稿の目的は、年金型投資商品(Annuity)の各年の支給額の近似誤差について考察することである<sup>1</sup>. 年金型投資商品の支払額(Payment)について、その正確だが複雑な計算方法である年金公式は標準的な金融教科書に記載されているほどよく知られている<sup>2</sup>. しかしながら、実務上、複雑な年金公式の代わりに一般人でも使いやすいような近似による簡便法については、筆者が知る限りであるが、先行研究は存在しない。この事実は、「貯蓄から投資へ」の進捗を一層加速させようとする政府にとっては望ましくないことと考えられ、早期の解決が求められる問題である。年金型投資商品への積立投資をするということは、将来的にある期間においてその運用結果である資産を取り崩すことが想定される。そのため、他の投資商品と同じように、将来自分が毎年どれくらいの支払額が得られるのかについては、誰もが知りたくなると考えられる<sup>3</sup>. 特に断らない限り、本稿では年金型投資商品も投資型年金保険も単に年金商品(Annuity)という言葉に統一する.

日本は、長寿の恩恵を享受している国であると同時に、高齢化社会の問題に直面している国でもある。厚生労働省(2023)が公表している「令和4年簡易生命表の概況」データによると、日本の男性の平均寿命は81歳であり、女性は87歳である。これは、日本の医療や社会保障の賜物であるが、同時に、「人生100年時代」に向けて、新たな問題を引き起こしている。高齢化社会の問題に直面している日本では、老後の生活を安定させるためには、少なくとも一定の資産形成が必要とされている。これは、メディアでよく話題になる「老後2000万円問題」として知られている。しかし、多くの人々にとって、この金額を確保することは容易ではない。実際、日本の2人以上の世帯のうち勤労者世帯の約半数は、貯蓄が1000万円以下であるという調査結果がある4、従ってそのままでは、将来の老後生活に不安を抱え

-

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> 本稿で扱うのはいわゆる個人年金(Annuity)であって、公的年金(Pension)ではないことに注意されたい。

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> 年金型投資商品(Annuity)とは、特定の期間、毎年一定額の支払いが行われる資産である。定額返済の住宅ローン債権や割賦契約は、よく見られる年金型投資商品の例である。日本では投資型年金保険としてよく知られている。この説明は R. Brealey, S. Myers, and F. Allen (2006)、Principles of Corporate Finance、第3章を基に筆者が加筆修正したものである。より数学な説明については、D. Luenberger (2014)、Investment Science、第3章を参照されたい。

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> 積立投資とは、毎月一定額を投資信託などに積み立てて、長期的に資産を増やすことである。積立投資には、時間と複利の力を味方につけて、安定的に資産を増やしていくことができるというメリットがある。また、日本では積立投資には、NISA や iDeCo などの優遇制度がある。これらの制度は、税金や手数料を節約できるというメリットがあり、個人の投資家が資産形成を行う上で重要なツールと言えるだろう。

<sup>4</sup> 総務省統計局(2023)による 2022 年の二人以上の世帯の家計調査報告(貯蓄・負債編)では、中央値を 以下のように定義している。中央値とは、貯蓄「0」世帯を除いた世帯を貯蓄現在高の少ない方から順番

### Approximation Error in Annual Annuity Payment

ることになる. 人生は,自分が思うよりも長いかもしれないし,自分が望むよりも短いかもしれない. だからこそ「人生 100 年時代」に備えるために,資産形成が必要不可欠となる. そのため,実践的かつ合理的な資産形成のための方法として,年金商品への積立投資が注目されている.

次に、積立投資における年金支払額を近似することの意図について説明する。年金商品への積立投資が資産形成の入口戦略であるなら、その次に考えるべきことは出口戦略である。 積立投資の出口戦略とは、積立投資による複利の運用で資産形成ができた場合、その運用結果である資産を取り崩すことを指す。特に、資産を一括で引き出すのではなく、ある期間にわたって複利で運用しながら取り崩すことを指す。冒頭でも説明した通り、年金商品への積立投資は、将来的にある期間においてその運用結果である資産を取り崩すことが想定されるため、将来自分が毎年どれくらいの年金支払額がもらえるのかについて、誰もが知りたくなると考えられる。

積立投資では、積立投資額の運用結果が正確に分かっていても、実際に計画を立てて5年や10年の期限を決めて、その運用結果を毎年均等に取り崩すための年金支払額を正確に計算することは難しい。年金公式を使うことで、正確な年金支払額を求めることはできる。しかし、年金公式は複利を計算するのに必要な指数計算があるため、一般人には使いづらいものと言わざるを得ない。

そこで、本稿では複利計算に使われる指数計算の代わりに、単利を用いた近似方法を提案したい。この方法を使えば、正確な年金支払額を求めるために必要な指数計算を避けることができる。この方法は、一般人でも使いやすく、EXCEL や年金の専門家に頼ることなく、簡単に見積もることができることが特徴である5. これは、日本の投資家だけでなく、世界中の資産形成に関心を持つすべての人々にとって、多くのメリットをもたらすだろう。冒頭でも説明した通り、年金支払額を近似する簡便法については、筆者が知る限りではあるが、先行研究が存在しない。これが本研究の意義と貢献と言えるであろう。

本稿の構成は以下のとおりである。第 2 節では、複利計算による正確な年金支払額を示してから、単利計算による年金支払額の近似値の公式を与える。第 3 節では近似値の年金支払額とその正確な年金支払額の比率をもって近似誤差と定義したうえ、この近似誤差についてシミュレーションを示したものを一覧表としてまとめる。第 4 節では、近似誤差の上限と下限についてそれぞれ求める。さらに、その近似誤差の上限と下限についてシミュレーションを示す。最後に全体のまとめの考察を行う。

.

に並べたときに、ちょうど中央に位置する世帯の貯蓄現在高をいう。2022 年の貯蓄「0」世帯を除いた世帯の貯蓄中央値は928 万円であり、貯蓄「0」世帯を含めた中央値は880 万円である。

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup> EXCEL での計算方法は、Narasimhan(2007)が詳しい.

### Approximation Error in Annual Annuity Payment

### 2. 正確な年金支払額とその近似値

以下の年金商品のキャッシュフロー流列について考える。支払期間は有限の場合を考える。キャッシュフロー流列は今期末からはじまり、n期末で終わる各年末にC円のn個の定期支払から構成されるものとする。 1期あたりの金利がrである場合のn期間の年金商品の現在価値Pは以下のように記述できる。

$$P = \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \dots + \frac{C}{(1+r)^n}.$$

本稿の目的は年金支払額Cの近似値を、P,r,nを使った簡潔な式で近似することである。まず年金支払額Cの正確な値を求める。

$$P = \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \dots + \frac{C}{(1+r)^n}$$

$$(1+r)P = C + \frac{C}{1+r} + \dots + \frac{C}{(1+r)^{n-1}}$$

より,

$$rP = C - \frac{C}{(1+r)^n}$$

となるので.

$$C = \frac{rP}{\left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right)}$$

が、年金支払額の正確な値である.後に近似誤差を求めるためにCを使いやすい形に変形すると以下の通りになる.

$$C = rP \cdot \frac{(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}.$$

#### Approximation Error in Annual Annuity Payment

年金支払額Cの式において、現在価値Pは年金の取り崩しの元本に相当し、rPは現在価値Pに対する1年目の利息を表す。そして、分数式はrPにかかる乗数として見ることができる。分数式の分子は元本1を含むn年間の複利による価値合計であり、分母は元本1を含まないn年間の複利による価値合計である。nが有限なら、分数式は厳密に1より大きく、かつnに関しては減少関数である。一方、nが無限なら、分数式は1に収束するので、年金支払額Cの式は永久債の式と同じになる。

C > rPなら、支払期間nが有限になる。なぜなら、各期間において年金支払額Cが 1 期目の年金の成長額である利息rPよりも大きいので、有限の期間内(n)で積立てた年金を全部取り崩すことができるからである。

もしC=rPなら、支払期間nが無限になり、この年金商品は現在価値が一定の永久債に相当する。この場合、各期間において年金支払額Cが常に年金の成長額である利息rPと同額なので、いつまで経っても積立てた年金額、つまり年金商品の現在価値Pは変わらない、常に金額Pのままである。

もしC < rPなら,支払期間nが無限になり,この年金商品は現在価値が一定ではなく,時間の経過とともに現在価値も成長するような特別な永久債に相当する.この場合,各期間において年金支払額Cが 1 期目の年金の成長額である利息C0 も小さいので,この年金商品は時間とともに現在価値が成長し続ける特別な永久債である.この年金商品の現在価値は,1期目の期首ではC1 であるが,2期目の期首ではC2 であり,さらに,任意のC3 は期目C4 に見りの期首ではC5 に成長するものである.

次に年金支払額の近似値 D を求める. ここで複利  $(1+r)^n$  について,

$$(1+r)^n \cong 1+nr$$

として近似すると、近似値 D は以下のように求めることができる.

$$D \cong \frac{(1+nr)P}{n}.$$

この式から年金支払額は、n年間の単利による価値合計を、単年に割り振った金額として近似できることが分かる、後に近似誤差を求めるためにDを使いやすい形に変形すると、

$$D = rP \cdot \frac{(1+nr)}{nr}$$

の形になり、Cの式と比較しやすい式になっている. rP は先ほど説明した通り、現在価値 P

#### Approximation Error in Annual Annuity Payment

に対する 1 年目の利息を表す.そして,分数式の分子は元本 1 を含む n 年間の単利による価値合計であり,分母は元本 1 を含まない n 年間の単利による価値合計である.C の分数式の分析結果と同じく,n が有限なら,近似値 D の分数式は厳密に 1 より大きく,かつ n に関しては減少関数である.一方,n が無限なら,分数式は 1 に収束する.

正確な年金支払額 C の式と近似値 Dの式について,複利と単利の違いはあるものの,2つの共通点があげられる.1つは,現在価値Pに対する 1年目の利息 P という共通項があることである.もう1つは,1年目の利息 P に共通の形を持つ乗数がかかっていることである.複利と単利の違いはあるものの,乗数となっている分数式は共通の構造となっており,分数式の分子は元本 1を含む P 年間の利息による価値合計であり,分母は元本を含まないP 年間の利息による価値合計である.

#### 3. 近似誤差について

近似誤差を求める前にまずCとDの大小関係について示す。CとDの式により、

$$D - C = rP \cdot \frac{(1+nr)}{nr} - rP \cdot \frac{(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

$$= rP\left[\frac{(1+nr)}{nr} - \frac{(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}\right]$$

$$= rP \cdot \frac{(1+nr) \cdot [(1+r)^n - 1] - nr \cdot (1+r)^n}{nr \cdot [(1+r)^n - 1]}$$

$$= \frac{rP}{nr \cdot [(1+r)^n - 1]} \cdot \{(1+r)^n - (1+nr)\} \ge 0$$

という結果が導かれる. ここでは  $(1+r)^n \ge 1+nr$  であることを使った. r>0のとき, n=1 の場合はD=C であり,  $n\ge 2$  の場合はD>C なので,  $D\ge C$  は常に成り立っており, 正確な C に対して近似値 D は常に過大評価になることが分かる.

Cと Dの分数式については、

$$1 < \frac{(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} \le \frac{(1+nr)}{nr}$$

#### Approximation Error in Annual Annuity Payment

という大小関係になっている. その理由は,  $(1+r)^n \ge 1 + nr$  により,

$$1 - \frac{1}{(1+r)^n} \ge 1 - \frac{1}{1+nr}$$

$$\frac{(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} \le \frac{(1+nr)}{nr}$$

という結果が導かれる。複利と単利の違いはあるものの、CとDの分数式はnに関してともに減少関数であり、1に収束するものである。そして、同じ1に収束する場合、複利によって作られるCの分数式は、単利によって作られるDの分数式よりも収束の速度が早い。その結果、CとDの分数式が上に示された大小関係になっている。

 $D \ge C$  は常に成立することを示したため、本稿では近似値 Dと正確な値 Cとの比率 (D/C) をもって近似誤差と定義する。こうすることによって、近似誤差 (D/C) は、1 に近いほど近似の精度が高いと考えることができる。逆に近似誤差が1から離れるほど、近似の精度が悪いことになる。

ここでは,近似誤差 (D/C) の式を

$$\frac{D}{C} = \frac{rP}{rP} \cdot \frac{\frac{(1+nr)}{nr}}{\frac{(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}}$$

$$= \frac{(1+nr)}{nr} \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n} \ge 1$$

のように書き換えることができる.

この数式に基づいて作った近似誤差 (D/C)の一覧表は表 1 にまとめられる。縦は年数(n),横は利子(r)を表す。表全体から $(D/C \ge 1)$ の関係が確認できる。黄色のシャドーより左側は誤差が 10%以内の範囲を表している。パラメーター(n,r)が大きくなるにつれ,近似誤差が大きくなることが見てとれる。

この一覧表があれば、我々が単利によって計算した支払額の近似値 Dを正確な支払額 Cに換算することができる。例えば、1000 万円の資産を 10 年間 5%の利回りで運用しながら取り崩す場合、単利によって計算した支払額の近似値 Dは 150 万円になるが、正確な支払額 C(129 万円)は(150/1.16 = 129)として求められる。

## Approximation Error in Annual Annuity Payment

表 1· 近似缺定 (D/C)—見衣										
n r(%)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	1.02	1.04	1.05	1.07	1.08	1.10	1.11	1.12	1.13	1.14
6	1.02	1.05	1.07	1.08	1.10	1.11	1.13	1.14	1.15	1.16
7	1.03	1.05	1.08	1.10	1.12	1.13	1.15	1.16	1.17	1.18
8	1.03	1.06	1.09	1.11	1.13	1.15	1.16	1.18	1.19	1.20
9	1.04	1.07	1.10	1.12	1.15	1.16	1.18	1.19	1.21	1.22
10	1.04	1.08	1.11	1.14	1.16	1.18	1.19	1.21	1.22	1.23
11	1.05	1.09	1.12	1.15	1.17	1.19	1.21	1.22	1.23	1.24
12	1.05	1.09	1.13	1.16	1.18	1.20	1.22	1.23	1.24	1.25
13	1.05	1.10	1.14	1.17	1.19	1.21	1.23	1.24	1.25	1.26
14	1.06	1.11	1.15	1.18	1.20	1.22	1.24	1.25	1.26	1.26
15	1.06	1.11	1.15	1.19	1.21	1.23	1.24	1.26	1.26	1.27
16	1.07	1.12	1.16	1.19	1.22	1.24	1.25	1.26	1.27	1.27
17	1.07	1.13	1.17	1.20	1.23	1.24	1.26	1.27	1.27	1.27
18	1.07	1.13	1.18	1.21	1.23	1.25	1.26	1.27	1.27	1.28
19	1.08	1.14	1.18	1.22	1.24	1.26	1.27	1.27	1.28	1.28
20	1.08	1.14	1.19	1.22	1.25	1.26	1.27	1.28	1.28	1.28

表 1: 近似誤差 (D/C)一覧表

4. 近似誤差の上限と下限についてまずは近似誤差の上限を求める.

$$1 \le \frac{D}{C} = \frac{(1+nr)}{nr} \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n}$$

$$\leq \frac{(1+r)^n}{nr} \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n}$$

$$=\frac{(1+r)^n-1}{nr}$$

となる. ここで  $(1+r)^n \ge 1+nr$  であることを使った. 従って近似誤差の上限は,「複利-1」と「単利-1」の比として与えられる.

近似誤差の下限は以下の通りとなる.

$$\frac{D}{C} = \frac{(1+nr)}{nr} \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n}$$

$$\ge \frac{(1+nr)}{nr} \cdot \frac{nr}{(1+r)^n}$$

$$= \frac{(1+nr)}{(1+r)^n}$$

ここでも  $(1+r)^n \ge 1+nr$  であることを使った. 従って近似誤差の下限は、「単利」と「複利」の比として与えられる.

まとめると、近似誤差の上限は、「複利 -1」と「単利 -1」の比として与えられる。一方、近似誤差の下限は、「単利」と「複利」の比として与えられる。近似誤差 (D/C)の上限と下限の数式に基づいて作った一覧表は付録の表 2 にまとめられる。縦は年数(n)、横は利子(r)を表す。上段の数字は上限を表し、下段の数字は下限を表す。表全体として、上限は1 より大きく、下限は1 より小さいことが確認できる。パラメーター(n,r)が大きくなるにつれ、近似誤差が大きくなることも見てとれる。近似誤差の上限と下限は、性質としては近似誤差と同様である。近似誤差も上限と下限もいい精度を保つためには、パラメーター(n,r) はあまり大きくないことが条件である。もしパラメーター(n,r)が大きすぎると、近似誤差も上限と下限も1 から大きく逸脱してしまう。

#### 5. まとめ

積立投資額が正確に分かっていても、その運用結果を毎年均等に取り崩すための年金支 払額を正確に計算することは難しい。これは、年金支払額を正確に計算するための年金公式 には複利計算が含まれているためである。そこで本稿では、複雑な複利計算を避け、一般の 人々でも容易に使える単利計算による年金公式の近似方法を提案する。

本稿で提案した年金公式の近似方法は、その実用性と簡便性から、一般の人々でも手軽に利用可能なツールとなっている。一方、理論的な精度については、複利計算を用いる従来の公式と比較すると、誤差が生じることが否めない。これは、単利計算による近似方法の限界であり、避けられないデメリットである。しかし、パラメーター(n,r)があまり大きくないという条件下では、この近似方法は十分な精度を持っている。

したがって, 近似誤差の存在は認識しているが, 本稿で提案した近似方法の実践上のメリ

ットは、この理論的なデメリットを上回るものと考えられる。この近似方法により、複利計算を避けながら、かつ十分な精度で正確な年金支払額の推定を可能にする。これは、年金計算の専門家や EXCEL に頼らずに、一般の人々でも簡単に年金支払額を見積もることができるという、実務上の大きなメリットをもたらす。これは、年金計算の分野における重要な進歩と言えるであろう。本稿の考察結果は主に以下の3点にまとめられる。

1点目,複利計算による正確な年金支払額 C を示してから,単利計算による年金支払額の近似値の公式 D を与えた.正確な年金支払額 C とその近似値 Dについては,複利と単利の違いはあるものの,2つの共通点が分析の結果によって明らかになった.1つは,現在価値 Pに対する 1年目の利息 P という共通項がかかっていることである.もう1つは,1年目の利息 P に共通の形を持つ乗数がかかっていることである.複利と単利の違いはあるものの,乗数となっている分数式は共通の構造となっており,分数式の分子は元本 1 を含む P 年間の利息による価値合計であり,分母は元本を含まない P 年間の利息による価値合計である.

2点目,近似値の年金支払額とその正確な年金支払額の比率(D/C)をもって近似誤差と定義したうえ,この近似誤差についてシミュレーションの結果を一覧表(表 1)としてまとめた.この一覧表を使えば,我々が単利によって計算した支払額の近似値 Dを正確な支払額 Cに換算することができる.表 1 から,パラメーター(n,r)が大きくなるにつれ,近似誤差が大きくなることがと見てとれる. $D \geq C$  が常に成立していることを示してからこそ,近似誤差が常に過大評価  $(D/C \geq 1)$ になっていることが明らかになった.

3点目,近似誤差の上限と下限についてそれぞれ求めたうえ,その近似誤差の上限と下限についてシミュレーションの結果を付録の表 2 にまとめた.近似誤差の上限は,「複利 -1」と「単利 -1」の比として与えられる.一方,近似誤差の下限は,「単利」と「複利」の比として与えられる.表 2 から,上限は 1 より大きく,下限は 1 より小さいことが確認できる.パラメーター(n,r)が大きくなるにつれ,近似誤差が大きくなることも明らかである.近似誤差の上限と下限は,近似誤差と同様の性質を持つことも考察によって明らかになった.近似誤差も上限と下限もいい精度を保つためには,パラメーター(n,r)はあまり大きくないことが条件である.もしパラメーター(n,r)が大きすぎると,近似誤差も上限と下限も1 から大きく逸脱してしまう.

#### 謝辞

論文の掲載にあたり、建設的なご助言をくださった査読者たちに深く御礼を申し上げます.

#### 参考文献

厚生労働省(2023)、令和4年簡易生命表の概況

(https://www.mhlw.go.jp/toukei/saikin/hw/life/life22/dl/life22-15.pdf)

「人生 100 年時代, 2000 万円が不足 金融庁が報告書」日本経済新聞, 2019 年 6 月 3 日 (https://www.nikkei.com/article/DGXMZO45636720T00C19A6EE8000/)

総務省統計局(2023), 家計調査報告(貯蓄・負債編) <I. 貯蓄の状況>

(https://www.stat.go.jp/data/sav/sokuhou/nen/pdf/2022\_gai2.pdf)

首相官邸,「資産所得倍増元年 - 貯蓄から投資へ」岸田総理からのメッセージ, 2023 年 6 月 30 日

(https://www.kantei.go.jp/jp/101\_kishida/discourse/20230630contribution.html)

D. Luenberger (2014), Investment Science, 2nd Edition, Oxford University Press.

(今野浩,鈴木賢一,枇々木規雄 訳(2015),『金融工学入門 第2版』,日本経済新聞社.)

R. Brealey, S. Myers, and F. Allen (2006), Principles of Corporate Finance, 8th Edition, McGraw-Hill Education.

(藤井眞理子, 国枝繁樹 監訳(2007), 『コーポレートファイナンス 第8版』(上)(下),

日本経済新聞社.)

R. Narasimhan(2007), Excel Guide to Finite Mathematics and Applied Calculus: Third Edition, Houghton Mifflin Company.

表 2:近似誤差 (D/C)の上限と下限一覧表(上段は上限,下段は下限)

付録

n r(%)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	1.02	1.04	1.06	1.08	1.11	1.13	1.15	1.17	1.20	1.22
	1.00	1.00	0.99	0.99	0.98	0.97	0.96	0.95	0.94	0.93
6	1.03	1.05	1.08	1.11	1.13	1.16	1.19	1.22	1.25	1.29
	1.00	0.99	0.99	0.98	0.97	0.96	0.95	0.93	0.92	0.90
7	1.03	1.06	1.09	1.13	1.16	1.20	1.24	1.27	1.31	1.36
	1.00	0.99	0.98	0.97	0.96	0.94	0.93	0.91	0.89	0.87
8	1.04	1.07	1.11	1.15	1.19	1.24	1.28	1.33	1.38	1.43
	1.00	0.99	0.98	0.96	0.95	0.93	0.91	0.89	0.86	0.84
9	1.04	1.08	1.13	1.18	1.23	1.28	1.33	1.39	1.45	1.51
	1.00	0.99	0.97	0.96	0.93	0.91	0.89	0.86	0.83	0.81
10	1.05	1.09	1.15	1.20	1.26	1.32	1.38	1.45	1.52	1.59
	1.00	0.98	0.97	0.95	0.92	0.89	0.86	0.83	0.80	0.77
11	1.05	1.11	1.16	1.23	1.29	1.36	1.43	1.51	1.60	1.68
	0.99	0.98	0.96	0.94	0.91	0.87	0.84	0.81	0.77	0.74
12	1.06	1.12	1.18	1.25	1.33	1.41	1.49	1.58	1.68	1.78
	0.99	0.98	0.95	0.92	0.89	0.85	0.82	0.78	0.74	0.70
13	1.06	1.13	1.20	1.28	1.36	1.45	1.55	1.65	1.77	1.89
	0.99	0.97	0.95	0.91	0.88	0.83	0.79	0.75	0.71	0.67
14	1.07	1.14	1.22	1.31	1.40	1.50	1.61	1.73	1.86	2.00
	0.99	0.97	0.94	0.90	0.86	0.81	0.77	0.72	0.68	0.63
15	1.07	1.15	1.24	1.33	1.44	1.55	1.68	1.81	1.96	2.12
	0.99	0.97	0.93	0.89	0.84	0.79	0.74	0.69	0.65	0.60
16	1.08	1.16	1.26	1.36	1.48	1.60	1.74	1.90	2.06	2.25
	0.99	0.96	0.92	0.88	0.82	0.77	0.72	0.67	0.61	0.57
17	1.08	1.18	1.28	1.39	1.52	1.66	1.81	1.99	2.17	2.38
	0.99	0.96	0.91	0.86	0.81	0.75	0.69	0.64	0.58	0.53
18	1.09	1.19	1.30	1.42	1.56	1.72	1.89	2.08	2.29	2.53
	0.99	0.95	0.90	0.85	0.79	0.73	0.67	0.61	0.56	0.50
19	1.10	1.20	1.32	1.46	1.61	1.78	1.97	2.18	2.42	2.69
	0.99	0.95	0.90	0.84	0.77	0.71	0.64	0.58	0.53	0.47
20	1.10	1.21	1.34	1.49	1.65	1.84	2.05	2.29	2.56	2.86
	0.98	0.94	0.89	0.82	0.75	0.69	0.62	0.56	0.50	0.45