算数科の授業づくりに求められる 教師の数学的専門性に関する研究

－「数学概論」における取り組みに関する考察－

山口武志 *・有家雄介 **・長田翔太***・和田信哉 *・愛甲正****

（2025 年 11 月 12 日　受理）

Research on the Expertise Required to Develop Elementary School Mathematics: Standard Practices of “Introduction to Mathematics”

YAMAGUCHI Takeshi, ARIKE Yusuke, OSADA Shota, WADA Shinya, AIKOU Tadashi

要約

本稿の背景にある課題は，「算数指導において求められる小学校教師の数学的専門性とは何か」ということである。こうした課題認識のもと，本稿は，鹿児島大学教育学部の小学校専門科目である「数学概論」の具体的な授業内容の提言とともに，それらに関する実践の報告，考察を目的とするものである。本稿で提言している「数学概論」の授業内容に通底する基本的理念は，算数科で扱われる教材に深く関係する様々な数学的話題の検討を通じて，「数学の本質的な見方や考え方」を受講生に実体験，実感させることである。本稿では，こうした基本的理念のもとで実践した授業内容が，受講生の数学的専門性の向上に対し，一定程度の効果を有することを指摘した。

キーワード：小学校専門科目，数学的専門性，数学概論

*　鹿児島大学 法文教育学域 教育学系　教授
**　鹿児島大学 法文教育学域 教育学系　准教授
***　鹿児島大学 法文教育学域 教育学系　助教
****　鹿児島大学 法文教育学域 教育学系　特任教授

１．本稿の背景と目的

数学教育における教師教育に関する研究では，数学教師に求められる専門性として，「指導のための数学的知識（mathematical knowledge for teaching；以下，MKT）」の在り方が議論されている。そして，このMKTについては，「教授学的内容知識（pedagogical content knowledge；以下，PCK）」と「教科内容知識（subject matter knowledge；以下，SMK）」の２つに焦点が当てられてきている（Adler & Venkat, 2020, p.817）。実際，国内外の教師教育に関する数学教育研究では，PCKとSMKに着目した多くの研究が進められてきている（Hill et al., 2008；新井，2016；Schwarz & Kaiser, 2019など）。

こうした先行研究におけるPCKやSMKの捉え方を概観すると，PCKには，「内容と子どもに関する知識」や「内容と指導法に関する知識」，「内容とカリキュラムに関する知識」が含まれるとされる。ここでいう内容（content）とは数学を意味する。つまり，PCKは，数学をめぐる子どもや指導法，カリキュラムにかかわる知識であり，主として数学指導にかかわる専門的知識といえる。それに対し，SMKには，「一般的な内容の知識」，「学校教材に特定化された内容の知識」，「水平的な内容の知識」が含まれるとされる。つまり，SMKは，社会における数学の活用や意義に関する知識，学校教材に特化した数学の知識，カリキュラム全体における数学の系統や発展など，主として数学に関する専門的知識といえる。PCKとSMKについては，例えば，「内容とカリキュラムに関する知識」と「内容と指導法に関する知識」の関係性が曖昧であるという課題や，「水平的な内容の知識」の定義が不明瞭であるなどの課題が指摘されている（新井，2016，p.213）。しかしながら，PCKとSMKという知識区分は，「指導に関する専門的知識」と「数学に関する専門的知識」の2つが数学教師の専門性の両輪であり，両者が相補的関係にあることを示唆するものであり，重要である。

こうした視座から我が国の教員免許制度をみると，例えば，教育職員免許法施行規則においてもPCKとSMKに深く関係する区分が設けられている。実際，「教科及び教科の指導法に関する科目」については，小学校，中学校，高等学校のいずれにおいても，「教科に関する専門的事項」（以下，教科専門）と「各教科の指導法（情報通信技術の活用を含む。）」（以下，指導法）の2つの科目区分が設けられている。ただ，教科専門については，小学校と中，高等学校との間で違いがある。つまり，中学校数学科や高等学校数学科の教員免許にかかわる教科専門については，「各科目に含めることが必要な事項」として，「代数学」，「幾何学」，「解析学」，「確率，統計学」，「コンピュータ」の5つが示されている。そして，これら5つにかかわって取得すべき単位数もそれぞれ規定されている。一方，小学校の教員免許の場合には，「算数に関する専門的事項」を修得させることにはなっているものの，中学校数学科や高等校数学科の教員免許の場合のように，5つの事項が示されているわけではない。こうした違いを背景として，算数に関する専門的事項，いわゆる小学校専門科目（以下，小専科目）において取りあげるべき事項や授業内容の在り方について，これまでも様々な議論が展開されてきている（国立教育政策研究所，2015など）。

こうした議論の中核的課題を簡潔に述べるならば，それは「算数指導において求められる小学校教師の数学的専門性とは何か」ということになる。この課題は，小学校教師に限ったことではなく，

中学校あるいは高等学校の数学科教師に求められる数学的専門性に関する議論にも通ずるし，さらには，他教科にも通ずる課題である。加えて，上述の PCK と SMK の相補的関係をふまえるとき，小専科目において取りあげる事項や授業内容については，指導法で取りあげるそれらとの関連も考慮する必要がある。

こうした背景や課題意識のもと，本稿は，鹿児島大学教育学部の小専科目として設定されている「数学概論（Introduction to Mathematics）」を対象として，算数科の小専科目で扱うべき具体的な授業内容の提言とそれらに関する実践の報告，考察を目的とするものである。以下では，まず 2 節において，鹿児島大学教育学部の教育課程における数学概論の位置づけなどを概観する。続く 3 節以降においては，2025 年度前期の取り組みを中心としながら，担当教員ごとに授業内容などを順に報告，考察する。なお，3 節以降の報告の順序は，2025 年度前期の授業担当順である。

２．小専科目「数学概論（Introduction to Mathematics)」について

鹿児島大学教育学部の 2025 年度入学生の教育課程では，小学校教員免許用の小専科目として，10 教科にわたって，計 23 の授業科目が開講されている。小学校の教員免許の取得を目指す学生は，これら 23 の科目群の中から，6 教科以上にわたって，かつ，計 10 単位を少なくとも修得することとなっている（鹿児島大学教育学部，2025，p.7）。数学概論は，23 の小専科目群の 1 つであり，算数科に関する開設科目は数学概論のみである。開講期は「1 年前期以降」となっている。また，数学概論は，前期と後期のそれぞれにおいて 1 コマずつ開講されている。

シラバスにおける数学概論の学修目標は，「小学校算数科の指導にあたって必要となる数学的専門性を習得する」ことになっている。また，授業概要としては，①「小学校の算数から，中学校，高等学校の数学にかけて学習する数と図形について体系的に見直す」ことと，②「数の体系および図形の体系の論理的構成を通して，基本事項の理解を深める」ことの 2 つが示されている。

数学概論の担当教員は数学科の全教員であり，計 5 名である。各教員が 3 回ずつの授業を担当している。授業担当順は開講期ごとに異なっており，担当教員の予定などを考慮しながら，開講前に事前に協議，決定している。なお，各教員の 3 回の授業内容にはまとまりがそれぞれあるため，担当順の決定にあたっては,原則として,各教員が 3 回の授業を連続して担当できるようにしている。

評価については，各教員が計 3 回の授業内容に関する学生の達成度を 20 点満点でそれぞれ評価し，それらを合算し，最終評価を決定している。評価方法は授業内容にも依存するため，教員ごとに異なっているが，おおむねレポートや小テストが採用されている。なお，こうした評価に関する情報は，各教員から受講生にも予め伝えられている。

受講者の状況については，1 年前期から受講可能であるため，受講者は 1 年生から 4 年生まで多岐にわたる。また，教育実習を経験している学生もいれば，経験していない学生もいる。受講者数は開講期によっても異なるけれども，比較的少ない場合でも約 60 名であり，多い場合には，約 150 名に及ぶこともある。なお，2025 年度前期の受講登録者数は 114 名であった。

３．教材の背後にある数学的な見方の顕在化（担当：和田）

和田の担当は，数学概論のはじめの 3 コマであり，この講義全体の導入に当たる。そのため，大学生でも簡単に取り組める小・中学校の教材を紹介し，それを解決する中で，その背後にある数学的な見方に気づかせて教材を観る眼を育てることをねらっている。取り上げる内容は,「数の石垣」,「はとめ返し」,「問題づくり」の 3 つである。なお，毎時間，最後に小テストを課しており，それをとおして評価を行った。

3.1　数の石垣

算数科を構成する 4 つの領域の内,「数と計算」領域の占める割合は大きい。この領域では，数の概念と四則演算に関わる資質能力の育成が目指されるが，計算の結果をいかに速く正確に導くかに主眼が置かれることが多い。そのため，式は計算結果を導く道具であって関係を表すものとしてみなされない傾向がある（和田，20014)。そのような課題から，問題のパターンを発見しながら計算もするような活動を誘発する教材が開発されており，その中の一つに「数の石垣」(Wittmann，2004；國本，2006；山本，2006）がある。これは，図 3-1 のように，隣り合う 2 つのセルの和がその上のセルの数になるような構造になっている。「数の石垣」は小学校の教材ではあるが，大学生にとっても楽しく数学に取り組むことができ，それに潜むパターンに気づくことによって学生の数学的な見方が育成されることが期待される。

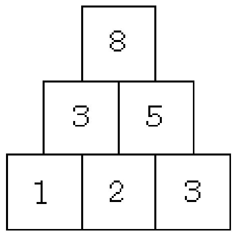

図 3−1　数の石垣

はじめに，　図 3-1 のような 3 段の数の石垣を教員が紹介し，1 以上の整数に限定した上で，「底の石に 3，4，5 を代入するとき，頂上の数が最大になるのはどのようなときか」「底の石の数がすべて同じとき, 頂上の数はどうなるか」「底の石に連続する数を代入するとき, 頂上の数はどうなるか」「頂上の数が決まったとき，数の石垣はいくつできるか」（國本，2006）という問題に学生達は順に取り組んだ。それぞれの問題で，学生は具体的な数を代入して計算しながらそのパターンについて探究した。

次に，数の石垣を 4 段に拡張し，「大吉おみくじ」（山本，2006）に取り組んだ。この問題は，4 段の数の石垣において，頂上の数が 3 でわり切れる石垣を「大吉」，3 でわって 1 あまる石垣を「中吉」，2 あまる石垣を「小吉」とするものである。学生に，適当に底に入る数（例えば，2，6，4，7）を挙げさせ，教員が瞬時に「これは大吉になりますね」と言うと学生達はざわついた。実際に計算すると，頂上の数は「39」となるので「大吉」になることを確認した。そこで，「底の数を見ただけで大吉になるか，中吉になるか，小吉になるかがわかります。その理由を考えてみよう」と教員は問うた。10 分程度，自由に探究すると，数人の学生が「端の数が…」とつぶやいたのでそれを拾い上げて全体に紹介し，再び探究すると「端の 2 つの数の合計が 3 の倍数になれば大吉になる」というパターンが見いだされた。これまでの取り組みから，ほとんど全員が具体的な数を代入して計算しながら考えていたので，教員は計算しないとどうなるか問いながら，式のままで表して見せた。

つまり，底の数が「2，6，4，7」ならば，その上の2段目は「2+6，6+4，4+7」と表され，3段目は「2+6+6+4，6+4+4+7」，頂上は「2+6+6+6+4+4+4+7」と表される。これにより，頂上の数は底の真ん中2つの数がそれぞれ3回足されているから3の倍数になる。したがって，残りの端の数の合計だけが問題になることを，学生は「あぁ！」という感動とともに理解した。

小学校では文字によってこのような関係を説明できないが，上記のようなあえて計算しないことで意味をなすような擬変数（表記は具体的な数であるが一般を指示している数（藤井，1999））を活用することで，中学校の文字式につながる一般性を志向した説明が可能となる。このように，擬変数のよさを学生自身が感得することでそのような数学的な見方を育成することが可能となった。また,「小学生ではない皆さんはもっと便利な道具をもっている」と言いながら文字で表すことによって，より容易にこの構造を説明することができることを教員は示した。この後，小テストとして6段の数の石垣で頂上の数が5で割り切れるときの仕組みを考えさせる問題を示した。

なお，授業の中では言及しなかったが，数の石垣はパスカルの三角形と同じ構造をもっている。しかし，そのことに気づく学生はいなかった。この構造に気づかせるための授業については今後の課題である。

3.2　はとめ返し

四角形ABCDの辺AB，BC，CD，DA上に，それぞれ点E，F，G，Hを，また四角形ABCDの内部に点Iを取り，四角形AEIH，BFIE，CGIF，DHIGの4つに分割する。4つに分割したそれぞれの四角形のEH，FE，GF，HGを対称の軸として対称移動すると，点A，B，C，Dははじめの四角形の頂点なので，それらの内角の和は360°となるため，対称移動した4つの四角形は隙間なく並べることができる（図3-2）。

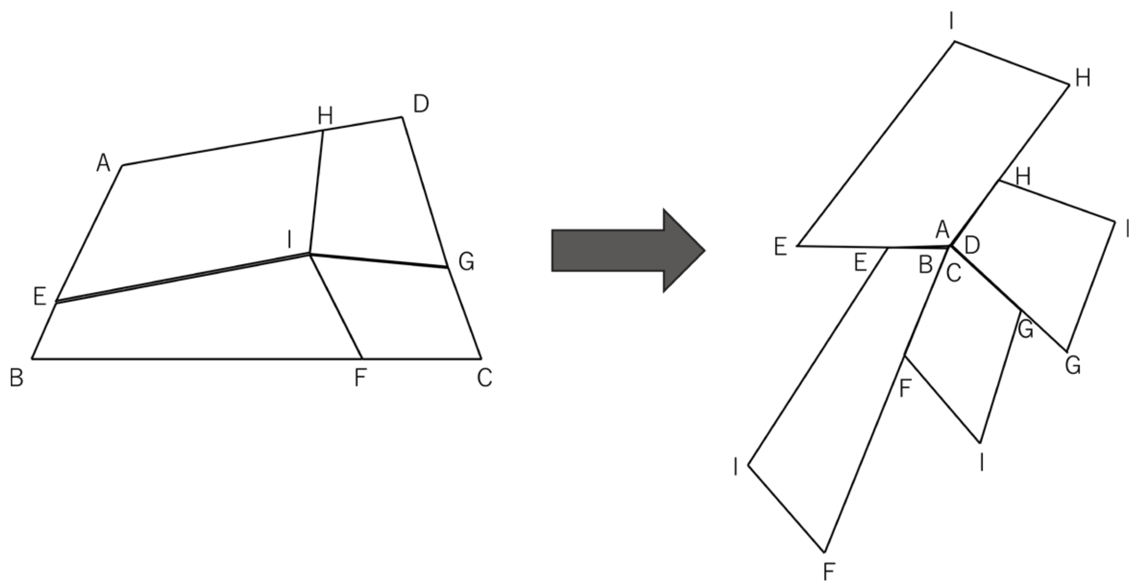

図3-2　はとめ返し

このような操作をはとめ返しと呼ぶ（近藤，2011）。図 3-2 のように適当に点を取れば操作後の図形は凸凹していて綺麗ではない。そこで，操作後の図形が四角形になるためにはどのように点 E，F，G，H を取ればよいかを学生に問うた。学生達は，操作前後の点の対応をみながら考える必要があり，四角形の内部にあった点 I が操作後にできるであろう四角形の頂点になるから，点 E，F，G，H のズレがなくなれば I 同士を結ぶ直線が現れて四角形になることを予想できる。そうであれば，例えば点 E については AE＝BE となればよい。したがって，点 E は線分 AB の中点に取ればよく，点 F，G，H についても同様であることに気づくことができる。実際に，プリントにかかれた四角形を切って確かめると，四角形になることを確認した。

次に，操作後の図形が台形になる点の取り方はあるかを教員は問うた。その際，台形は四角形であるから点 E，F，G，H はそれぞれ線分 AB，BC，CD，DA の中点であることを確認し，点 I をどこに取るかを問題にした。これは，四角形の包摂関係に基づいた見方である。また，操作後に台形になるのであるから，台形の性質から点 I の取り方を考える必要があることも強調し，平行でない線分の両端の角の和が 180° になるという性質に気づかせ，線分 EG あるいは FH を引き，点 I は線分 EG あるいは FH 上のどこでもよいことを確認した。続いて，操作後の図形が平行四辺形になる点の取り方はあるかを教員は問うた。ここでも，「平行四辺形は台形である」という前提から，点 I を線分 EG あるいは FH 上のどこに取るかが問題になることを確認した。また，中学校第 2 学年で学習する「平行四辺形になるための条件」を想起し，それらの条件の中から適切なものを選択して考えればよいことに気づかせた。ここでは,「向かい合う角の大きさが等しい」という条件から考えればよく，単純に点 E，G と点 F，H をそれぞれ結んで線分 EG と FH を引けば平行四辺形になることに学生達は気づいた。

この後, 小テストとして操作後の図形が長方形になるためにはどうすればよいかという問題を提示した。これまでの流れから,「長方形は平行四辺形である」から平行四辺形になる点の取り方を前提として考えることができる。しかし, どうしても角が直角にならないので長方形にならない。そのため, 全員がこのままでは解くことができなかったので, ヒントとして平行四辺形になる点の取り方の別解を示した（図 3-3；点 E，F，G，H はそれぞれ線分 AB，BC，CD，DA の中点で，線分 HI_1 と I_2F は平行である）。これまでの流れから，「I は 1 つしかない」と思っていた学生はこの別解をみて「I が 2 つになっても構わない」ということに気づき，長方形になる点の取り方へと至った。これまで 15 年間の数学概論の中で，ヒントなしでこの解答にたどり着いた学生は数えるほどである。このような観点の変更は創造性に寄与し，問題づくりにとっても重要な見方の一つである。

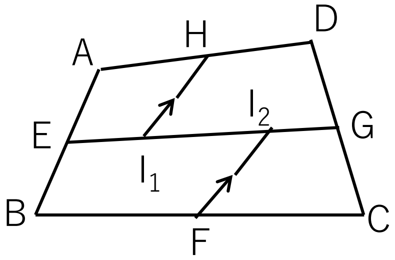

図 3-3　平行四辺形の別解

3.3　問題づくり

算数教育では 1980 年代から問題解決的な授業への取り組みが行われてきている。しかし，現在で

は，与えられた問題を解くだけではなく自ら問題を設定する能力も必要とされている。日本では，大正時代から作問による算数教育がなされてきた歴史があるが（植田，2005），それでも日常的に授業の中で問題づくりに取り組んでいるわけではない。問題をつくるにしても色々な方法が考えられるが，その 1 つに原問題をアレンジして新たな問題をつくる方法があり，その方略として「What if not?」がある（ブラウン & ワルター，1990）。この方略では，はじめに原問題を選び，その対象の属性の目録づくりをする。次に，いくつかの属性について「でなければどうか（What if not?）」と考え，その属性を変化させる。そしてそこから新しい問題を設定し，その設定した問題を分析するという段階を経る。このように，「What if not?」方略は，比較的簡単に問題づくりを行うことができるため，問題をつくる立場である教員にとっては非常に有効な方略となる。また，はとめ返しで述べた観点変更の 1 種であるため，教員の創造性にも寄与するものでもある。これらの点から，「What if not?」方略による問題づくりの活動を取り入れた。

立方体のすべての面に 1 色の色を塗り，縦，横，高さそれぞれを 3 等分します。3 等分してできる小さな立方体を色が塗られている面の数で分類し，それぞれの個数を求めましょう。

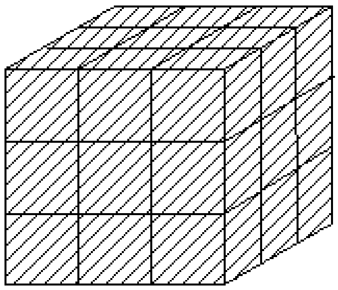

図 3-4 「What if not?」の原問題

原問題として「What if not?」方略の演習問題としてよく取り上げられる図 3-4 の問題（飯田，1991）を提示した。まずは，この問題を解決するように促し，解答を確認した。その後，この問題を原問題として，全体で属性の目録づくりを次のように行った。

対 象：立方体
条件 1：すべての面に 1 色の色を塗る
条件 2：縦，横，高さをそれぞれ 3 等分する
質 問：小立方体の色が塗られた面の数で分類してそれぞれの個数を求める

そして，これらの属性の中のどれかに対して「What if not?」（でなければどうか）と考えて問題をつくっていく例として，「例えば 3 等分でなく 4 等分ならどうなる？」と問い，4 等分の際の問題を設定し，実際に解いてみて分析を行った。その後，小テストとして，図 3-4 を原問題として新しい問題を「What if not?」方略を用いて作成し，解答例までつけるように問うた。学生達の記述につい

て，どこに着目したかを分類すると次のようになった。

対 象：23 人（21.5%）
条件 1：55 人（51.4%）
条件 2：22 人（20.6%）
質 問：7 人（6.5%）

一番多かったのは条件 1 の塗る色の種類や塗り方を変えるもので，半数以上を占めており，例年この観点変更が多くなっている。次いで多かったのが対象を変えるもので，直方体に変えて問題をつくるものが 16 人と多かった。ただし，立方体は正多面体であるから他の正多面体に変えたり，三次元図形であるから二次元図形に変えたりする学生はいなかった。また，条件 2 の切り方を変えるものは，6 等分や 8 等分，n 等分への一般化などや，等分ではない切り方や斜めに切るなどのものがあった。質問を変えるものは，塗られていない（塗られている）面の数を問うものや表面積を問うもの，確率や関数とみなした質問に変えるものがあった。

筆者自身がこの問題づくりに取り組んだとき，はじめは切る回数の一般化を考え，次に二次元に変更して正方形で問題を考えてさらに n 次元へ拡張した。図形の問題であれば次元を変えて考えるという態度が身についていたからだと思うが，そのような学生がみられなかったということは，現在の学校教育では平面図形と立体図形を関連づけたり，平面図形から立体図形を類推したりする授業があまり行われていないのかもしれない。しかし，二次元と三次元を関連づける見方は重要であるし，教師の教材研究の視点としても重要だと考えるので，そのような観点に着目させることは今後の課題としたい。

3.4　授業実践の振り返り

和田の担当の授業では，この講義の入り口であることも踏まえ，小・中学校で扱うような教材を取り上げ，その背後にある数学的な見方を顕在化して教材を観る眼を育てることを意図した。数の石垣における擬変数での説明の際，「あぁ！」と感動を伴って理解する様子が見られたように，教材の背後にある数学的な見方を顕在化するときには驚きや感動などが伴うように工夫して，学生自身がその見方を感得するように心がけている。そのような工夫によって学生の数学的な見方が育成されると考えている。

4．小学校教師を目指す大学生の算数体験（担当：山口）

山口の担当回では，「7 進法の計算」，「測定の意味」，「図形の敷き詰め」の 3 つを取りあげた。これらに関する授業のねらいは，算数科の教材の数学的背景を理解するとともに，児童が取り組む活動を実体験することによって，児童の理解の困難性や指導のポイントを理解することである。なお，評価については，毎回の授業末に小テストを実施し，受講生の理解度を評価している。

4.1　7 進法の計算

算数科の「数と計算」領域に関する学習では，低学年から中学年において，整数（算数科では，0 と自然数を指す）の概念形成を図りながら，それらの加減乗除を順に扱う。こうした学習において重要になるのが，「10 進位取り記数法」である。10 進位取り記数法は，「10 進の原理」と「位取りの原理」から成る記数法である。受講生は大学生であるから，当然のことながら，10 進位取り記数法とともに，それに基づく整数の加減乗除に習熟している。しかし，習熟しているが故に，受講生は，「9＋4」や「12－3」といった基礎的計算に対する児童の理解の困難性やつまずきを実感することが意外と難しい。

そこで，本授業では，「7 進法」の計算に取り組ませることによって，加減乗除に関する児童の理解の困難性やつまずきの要因などの実体験を授業の目標として設定した。つまり，習熟している「10 進の原理」を不慣れな「7 進の原理」にあえて変更することによって，「10 進位取り記数法」の意義やよさを実感させたいと考えた。1 コマの授業で扱った具体的内容は，下記のとおりである。なお，授業の冒頭では，10 進法で計算結果を求め，その結果を 7 進法に変換することはしないことをルールとして強調した。なお，(3) については，第 2 回の授業の前半で扱っている。

(1) 7 進法について　　(2) 7 進法の加法，減法，乗法，除法

(3)「10 進法で表された数を n 進法で表すこと」と「n 進法で表された数を 10 進法で表すこと」

(1) については，まず，10 進法で表された整数の 7 進法での表し方を説明しながら，7 進法について確認した。その際，例えば，10 進法における「7」が 7 進法では「10」と表記されることをポイントとしておさえながら，10 進法と 7 進法の違いや関係を確認した。また，7 進法を考えるため，本授業では，計算などにおいて 7，8，9 の数字を使うことがないことも確認した。

次に，図 4-1 を用いながら，「数感覚」に関する問いを提示した。具体的には，まず，図 4-1 (a) のように並べられた○の数を 7 進法で表すように問うた。受講生の多くは，○の数を 1 つずつ数えることによって，「23」という答えを得る。その後，授業者から図 4-1 (b) の図を提示し，7 進法でも「10」のまとまりを作って並べたほうが，○の数がわかりやすくなることを実感させた。我々も，日常生活において，1 円玉を 10 ずつまとめて数えやすくするなどの工夫を図っているが，こうした工夫の本質は図 4-1 (b) と同じである。実際，算数科においても，2 とびや 5 とびによる数え方も含めて，「数え方の工夫」を扱うことになっている。こうした「7 進法で数える」活動は，算数学習において「10 進の原理」を指導することの意義や重要性の実感をねらったものである。

(a)	(b)
○○○○○○○○○○○○○○○○○	○○○○○○○　　○○○ ○○○○○○○

(a)　　(b)

図 4-1　数感覚に関する問い

(2) については，例題や練習として，次のような 7 進法の計算を順に取りあげた。なお,「筆算」となっている場合には，当該の計算を筆算で行うように指示した計算である。

①加法：〔例題〕5＋4　〔練習〕6＋3，15＋23（筆算）

②減法：〔例題〕12－6　〔練習〕11－4，35－16（筆算）

③乗法：〔例題〕5×4　〔練習〕34×6，43×13，46×32，243×25（いずれも筆算）

④除法：〔例題〕15÷4，10÷3　〔練習〕21÷3，36÷6，121÷2（筆算），542÷43（筆算）

これらの計算の過程では，次のようなポイントを受講生に検討させた。①について，例えば,「5＋4」では，加数 4 を 2 と 2 に分解し，5 と 2 をあわせて 10 を作ったり（加数分解），5 を 2 と 3 に分解し，3 と 4 をあわせて 10 を作ったり（被加数分解）しながら，加法の仕方を工夫することが重要になる。つまり，10 のまとまりを作ることがポイントになる。これは 10 進数の場合の計算でも同じであり，算数科でも，第 1 学年において同様のことを扱う。また，①の「15＋23」は「繰り上がり」のある加法であり，②の「35－16」は「繰り下がり」のある減法である。こうした加減について，受講生は，7 進法における繰り上がりや繰り下がりの意味を理解し，納得する必要がある。小学校教師は，10 進法に基づく加減において，繰り上がりや繰り下がりの意味を児童に指導する必要があるけれども，7 進法における繰り上がりや繰り下がりの意味を理解，納得できない受講生が予想以上に多い。そのため，授業では，現行の算数科教科書を資料として配布し，10 進法における繰り上がりや繰り下がりの意味と対比させながら，7 進法の加減を考えさせるようにしている。

③については，最初，同数累加の考えによって，5×4 を「5＋5＋5＋5」〔答：26〕によって求めることを確認した。その後，乗法を効率的に行う上での「乗法九九」の重要性や，7 進法の場合には，それが「乗法六六」になることに言及し,「乗法六六」の表を作成させた。その際,「乗法六六」の表の作成過程を振り返らせながら，算数科では，第 2 学年の「乗法九九」の指導において，交換法則や「a×(b＋1)＝a×b＋a」などの「乗法の決まり」に気づかせることもねらいになっていることを確認した。

④の除法については，例えば,「15÷4」の答えを見つける場合には,「乗法六六」の表を使って,「4×□＝15」となる□の値を見つければよいこと，また,「10÷3」では余りが生じることなどを確認しながら，算数科でも，第 3 学年において同様の指導がなされることに言及した。「121÷2」〔答：44〕や「542÷43」（答：11 余り 36）を筆算で計算する問題になると，受講生の多くは，商が立つ場所の決定や，除法の筆算の仕方の理解において，ますます困惑するようになる。こうした除法の計算の仕方を検討させる際にも，算数科教科書を資料として配布し，7 進法に基づく除法の意味を納得させるとともに，図的表現や操作的表現を活用しながら計算の意味や筆算の仕方を児童に理解させることの重要性を実感させるようにした。

(3) について，例えば，10 進数で 496 と表された数を 7 進法で表すと，1306 となるが，その簡便な方法として図 4-2（a）のような方法がある。この方法を知っている受講生は比較的多いけれども，この方法で求めることができる理由を問うと説明できないことが多い。そこで，授業では，図

4-2（b）や図 4-2（c）のように式化しながら，図 4-2（a）の過程を説明させた。それとともに，図 4-2（c）の計算過程を逆にたどることによって，7 進法で表された数を 10 進数で表すことができることを確認した。さらに，こうした検討を通じて，一般に，n 進法の場合には，位取りの底が n になっており，算数科で指導する 10 進位取り記数法の場合，それが 10 になっていることを確認した。

7) 496
7) 70・・・6
7) 10・・・0
　 1・・・3

(a)

$$496=7\times70+6$$
$$70=7\times10+0$$
$$10=7\times1+3$$

(b)

$$\begin{aligned}496&=7\times(7\times10+0)+6\\&=7\times\{7\times(7\times1+3)+0\}+6\\&=1\times7^3+3\times7^2+0\times7^1+6\times7^0\end{aligned}$$

(c)

図 4-2　10 進数と 7 進数の相互変換

4.2　測定の意味

「測定」とは，基準となる量（基準量）を予め決め，ある量がその基準量の何倍になるかを求めることによって量を数値化する操作や考えを意味する。受講生に測定の意味を問うたとき，例えば，長さの場合であれば，定規の目盛りの読み取りだけを単に測定と捉えている受講生も少なからずいる。こうした受講生の現状をふまえ，本授業は，山口（2014）における考察をもとに，その授業化を図ったものである。具体的には，以下のように，無理数の発見の歴史やユークリッドの互除法を取りあげながら，測定の意味を考えさせることとした。

有理数（rational number）は，一般に，a／b（b≠0）として表されるが，それは a と b の比（ratio）を意味する。このことをふまえると，有理数が「比で表すことができる数」であるのに対し，無理数（irrational number）は「比で表すことができない数」ということになる。歴史的には，無理数は，正方形の一辺の長さと対角線の長さの両方を測りとるような最大公約量を見つけようと試みる過程を通じて，ピタゴラス学派によって発見されたといわれている。〔詳細については，山口，2014, pp.133-134 を参照〕。こうした図的操作は，代数的には，次のユークリッドの互除法に対応する。

「2 つの自然数 a，b について，a を b で割ったときの商を q，余りを r とする。このとき，a と b の最大公約数は，b と r の最大公約数に等しい。」

もし，ピタゴラス学派が試みた図的操作を繰り返すことによって最大公約量に当たる長さが見つかったならば，その結果は「A＝B×Q」（A：正方形の対角線の長さ，B：最大公約量に当たる長さ）という余りのない等式に表すことができる。しかし，実際には，この図的操作は無限に続くこととなり，そうした最大公約量が存在しないことが明らかになったのである。このように，無理数の発見の歴史において，基準となる長さをもとにして対象となっている長さを測り取るという活動は本質であり，そうした活動は測定の考えに通ずるものである。

授業では，ピタゴラス学派による図的操作を確認しながら，その操作の代数的意味，つまり，ユークリッドの互除法との関係を順に取りあげた。なお，授業では，ユークリッドの互除法によって，

最大公約数を求める練習問題（例：840 と 1001 の最大公約数など）も扱っているが，ユークリッドの互除法を十分に理解できていない受講生もいるため,その証明などには深入りしないこととした。

これらの諸点をふまえた上で，算数指導においてポイントになる「測定指導の 4 段階」との関係にも言及した。測定指導の 4 段階とは,「直接比較」,「間接比較」,「任意単位による測定」,「普遍単位による測定」の 4 段階をいう。これら 4 段階に関する指導の実際については,「指導法」の授業に該当する「算数科教育」でも扱うため，本授業の視座からは次のことを特に強調した。つまり，直接比較と間接比較はあくまでも「比較」であるのに対し，任意単位による測定と普遍単位による測定は「測定」であるということである。それ故，任意単位による測定や普遍単位による測定の指導では,「量の数値化」という測定の考えの意味や意義を児童に理解させることがポイントになる。

4.3　敷き詰め

算数科では，図形の敷き詰めが重視されている。実際，2017 年告示の算数科学習指導要領では，例えば，第 4 学年の「内容の取扱い」（7）において,「内容の「B 図形」の（1）については，平行四辺形,ひし形,台形で平面を敷き詰めるなどの操作的な活動を重視するよう配慮するものとする。」（文部科学省，2018，p.202）となっている。このように，算数科では，新しい平面図形の導入，学習とあわせて，様々な学年において敷き詰めが扱われている。

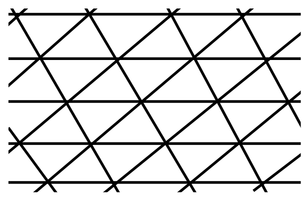
図 4-3　三角形の敷き詰め

算数科において敷き詰めが重視されている理由は，敷き詰めには豊かな数学教育的価値があるからに他ならない。実際，敷き詰めの活動を通じて，平面の無限の広がりや均質性を感じ取ることができる。また，敷き詰められた図形を観察することによって，様々な図形の性質や関係に気づくことも可能である。例えば，一般の三角形を敷き詰めた図 4-3 を観察することによって，平行四辺形や台形でも敷き詰められることや，三角形の内角の大きさの和が 180° になること，さらに，平行線の同位角や錯角に関する性質，中点連結定理，相似比と面積比の関係などにも気づく。加えて，身のまわりには，様々な敷き詰めによる美しい模様やデザインがある。そのため，敷き詰めは，算数と実生活との関連や図形の美しさを実感させるためにも有用である。

こうしたことから，本授業でも，敷き詰めに関する児童の活動，学びを体験させること，また，上述のような敷き詰め教材の意義や重要性を実感させることとした。なお,敷き詰めの定義には様々なものがある（中原，2002)。また，敷き詰めに利用する合同な図形を一種類にするか，二種類以上にするかによっても，敷き詰めの仕方は変わってくる。本授業では，こうしたことにはあまり深入りせず,「一種類の合同な図形によって，平面をすき間なく，また，重なり合うことなく並べていくこと」を敷き詰めの定義とした。

授業の導入では，講義室の床が正方形のタイルで敷き詰められていることに触れながら，上述の敷き詰めの定義を説明した。続いて，①長方形，②正三角形，③二等辺三角形，④一般の三角形，⑤平行四辺形，⑥台形，⑦一般の四角形，⑧凹四角形の 8 つの図形を提示し，各々の図形による敷

き詰めの可否を挙手によって問うた。なお，④，⑦，⑧は，図 4-4，図 4-5，図 4-6 のような図形をそれぞれ指す。また，⑧を提示する際には，凹四角形とはあえて言わず，「ブーメランのような形」とした。

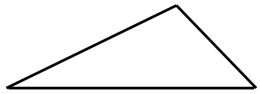

図 4-4　一般の三角形

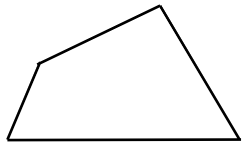

図 4-5　一般の四角形

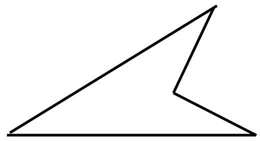

図 4-6　凹四角形

これら 8 つの図形のうち，①については，ほとんどの受講生が敷き詰め可能であると回答した。また，②や③，④，⑤，⑥が敷き詰め可能であると回答した受講生は，約 6 割にとどまった。さらに，⑦や⑧が敷き詰め可能であると回答した受講生は，ごく少数にとどまった。

そこで，8 つの図形のうち，④，⑥，⑦，⑧を数多く印刷した資料を配布し，のりとはさみを使って，敷き詰めの可否を実際に調べるように指示した。その際，疑問に思ったことも記録するように伝えた。実際に敷き詰めを始めると，受講生からは，敷き詰めの仕方について，次々と多くの質問がある。例えば，辺と辺をぴったり合わせる必要があるのか，また，図形を裏返してもよいのか，さらに，平面をすき間なく敷き詰めるとはそもそもどういうことなのか，などの質問である。こうした質問は実際に敷き詰めることによって感じるものであり，児童も疑問に思うことでもある。

実際に敷き詰めることによって，受講生は，まず，①から⑧までのすべての図形で敷き詰められるという事実を確認していた。特に，⑦や⑧でも敷き詰め可能であることについては，多くの受講生が驚きを感じていた。また，その理由にも自然と関心をもっていた。そして，⑦や⑧で敷き詰めた結果をさらに観察すると，四角形の 1 つの頂点のまわりには四角形の 4 つの角が集まっており，四角形の内角の和が 360° になるため，敷き詰め可能であることを理解，納得していった。さらに，そのことをもとに，どのような四角形でも敷き詰められることや，三角形を 2 つ合わせると四角形になることから，どのような三角形でも敷き詰められることを再確認していった。

4.4　授業実践の振り返り

山口担当の 3 回の授業では，あえて，算数科教科書にも掲載されている教材を取りあげ，それらの数学的背景について再確認することをねらいとした。第 3 回の授業末に実施したアンケートでは，次のようなコメントが多数寄せられており，児童の困難性やつまずきを実体験するという当初の授業のねらいをおおむね達成できたと考えている。

- 私たちが当たり前に感じてしまっているたし算，ひき算，かけ算，わり算のやり方が実は非常に高度なものであり，初めて出会う子どもたちにとっては難しいものであるということを体験することができた。
- 算数科の授業づくりにおいては，児童がどこでつまずきそうか，どうしてその部分でつまずくのかを教師が考えておくことが重要だと思った。
- 計算方法をただ覚えるのではなく，計算過程についての理解も重要であるということを学んだ。

５．ピタゴラスの定理とその応用について（担当：愛甲）

数学専攻および数学専修の学生は卒業と同時に中学校教諭一種免許状と高等学校教諭一種免許状を取得することから，卒業後に中学校または高等学校で教壇に立つ受講生もある。高等学校までに履修する様々な数学分野の中で，幾何学に関する内容はユークリッド幾何学であり，その基礎となるのはピタゴラスの定理であろう。愛甲の 3 回の担当講義では，ピタゴラスの定理とその応用について解説した。取り上げたテーマは第 1 回「ユークリッド原論とピタゴラスの定理」，第 2 回「面積公式とヒポクラテスの定理」，第 3 回「三角比と三角測量」である。

5.1　ユークリッド原論とピタゴラスの定理

古代ギリシャ時代から蓄積された幾何学研究の成果は，エジプトの都市アレキサンドリアに創られた学問・教育の中心であったムゼイオン（Museum の語源）で数学を教授していたユークリッド（Euclid, B.C. 330-275）により原論（ユークリッド原論という）の形に集大成された。ユークリッド原論は全 13 巻からなり，以下のように構成されている。

平面幾何（第 1 巻～第 6 巻），数論（第 7 巻～第 10 巻），空間幾何（第 11 巻～第 13 巻）

第 1 巻では「根本前提」とよばれる 23 個の定義から出発している。定義とは，それ以上遡って証明できない前提のことである。点の定義に始まり，次に（曲）線の定義，平面の定義，直角の定義等を与えて，最後に平行な直線の定義を与えている。

次に自明なことではないが議論の前提として要請される 5 個の「公準」（要請）を仮定している。公準の中には重要な「平行線の公準」も含まれている。公準はユークリッド幾何のための要請であったのに対して，数学全体に通用する共通概念である「公理」を設定し，この系に基づいて 48 個の命題に証明を与えている。座標系を用いた解析幾何的手法が登場したのは 17 世紀であり，当然のことではあるが，いわゆる初等幾何的手法に依って理論が展開されている。この講義の主題であるピタゴラスの定理は 47 番目の命題として述べられている。

『命題 47　三角形 ABC で角 A が直角ならば $AB^2+AC^2=BC^2$ が成立する』

また，その逆が正しいことが 48 番目の命題として紹介されている。

『命題 48　三角形 ABC において $AB^2+AC^2=BC^2$ ならば角 A は直角である』

ピタゴラスの定理の証明は様々なものが知られている（大矢，1988）が，最も分かり易いのは，頂点 A から対辺に BC に垂線 AD を下ろし，三角形 ABD と三角形 ABC が相似であること，および三角形 ACD と三角形 ABC も相似であることを利用して，辺の相似比の関係式を利用する証明であろう。また，命題 48 の証明はレポート課題とした。初等幾何的な証明は難しいと考え，命題 47 を使えるようにヒントを与えた。

ユークリッド原論の訳・解説書として，例えば文献（中村他，1974）があるが，文章や表現が古めかしく感じるかもしれない。読み易さと説明の明瞭さから考えると文献（小林，2003）を強く勧めたい。第 1 章でユークリッド原論の第 1 巻の内容を解説し，さらに第 2 章で非ユークリッド幾何学への入門を，さらに第 3 章で微分幾何学への入門を簡潔な形で，しかも具体的例を挙げて紹介し

てある絶好の入門書である。第 1 回の講義でも文献（小林，2003）の第 1 章の現代的な用語を用いて解説した。

5.2　面積公式とヒポクラテスの定理

ヒポクラテスの定理は面積に関する主張であるから，まず小学校 4 年生の教科書にしたがって面積の復習から始め，長方形の面積公式，三角形の面積公式，平行四辺形の面積公式について振り返りを行った。

∠C=90°である直角三角形 ABC において，BC=a, CA=b, AB=c とおくとき，ピタゴラスの定理は

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \cdots\cdots①$$

で与えられる。第 2 回の講義では，面積を利用した，この等式の代数的証明も紹介した。また，$a=3$，$b=4$，$c=5$ のように①を満たす自然数の組 (a, b, c) をピタゴラス数という。ピタゴラス数は $(a, b, c) = (3, 4, 5), (8, 6, 10), (15, 8, 17)$ …のように無数に存在することを確認させた。もっと一般に，指数を自然数 n $(n > 2)$に置き換えた

$$a^n + b^n = c^n \quad \cdots\cdots②$$

を満たす自然数の組(a, b, c) は存在しないというフェルマー予想を紹介した。1995 年，この予想が正しいことが，英国の数学者 Andrew John Wiles により証明されたこと，したがってこの予想はフェルマーの最終定理とよばれるに至ったこと，この業績により Wiles は数学界のノーベル賞と呼ばれるフィールズ（特別）賞を受賞したことを紹介した。ピタゴラス数やフェルマーの最終定理については中学校 3 年の教科書（一松他，2015）でも紹介されている。

次に，ヒポクラテスの定理を紹介するために，円の面積公式について，小学校 6 年生の教科書にしたがって振り返りを行った。まず，円の中心を頂点とする $2n$ 個の合同な二等辺三角形に分割し，次にこの $2n$ 個の合同な二等辺三角形を互い違いに並べてできる平行四辺形の面積 S_n で近似しておく。

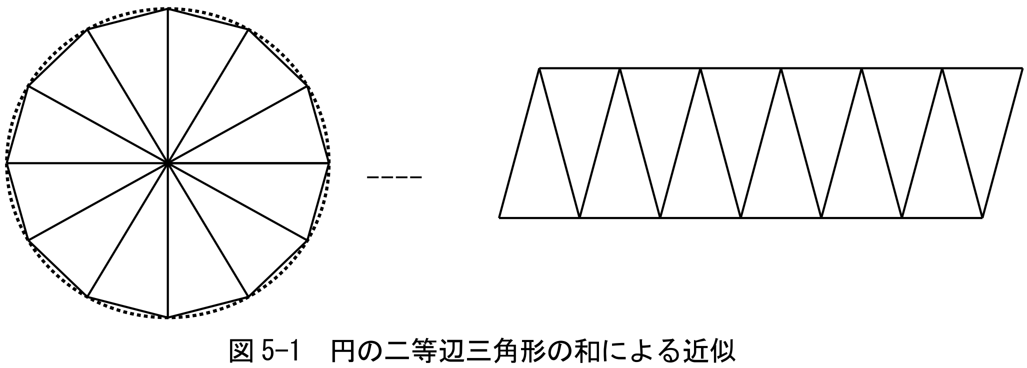

図 5-1　円の二等辺三角形の和による近似

ここで，分割の個数 $2n$ を限りなく大きくする，すなわち $n\to\infty$とすることにより，この平行四辺形の面積 S_n の極限として円の面積公式 $S=\pi r^2$が得られることを再確認させた。このような考察は区分求積法の基本的な形であるが，高等学校の数学 III で区分求積法を履修する際に，この円の面積公式を復習することも理解を深める参考になると思われる。

ヒポクラテスの定理は次の図に示す色付きの二つの三日月型の面積 S_1 と S_2 の和 S_1+S_2 が直角三角形 ABC の面積に等しいことを主張するものである。また，その証明は直角三角形 ABC に関するピタゴラスの定理と円の面積公式を応用して得られる。受講生にとっても，興味ある結果であり，その証明も中学校の履修内容で理解できる内容のものである。なお，教科書（一松他，2015）ではこの三日月型の二つの領域を「ヒポクラテスの月」として紹介している。

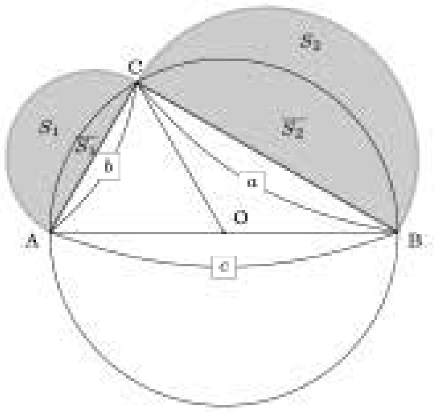

図 5-2　ヒポクラテスの定理

5.3　三角比と三角測量

古代エジプトにおけるナイル河の氾濫に対処するために発展した測地学（geodesy）が幾何学（geometry）の起源である。測地学において重要な役割を果たすのが三角比であり，現実世界の問題に結びついた最適な数学教育の題材である。特に，三角測量は，地上の 3 点を選んで三角形を作り，その一辺の長さ及び二夾角を測定して，三角法により他の二辺の長さや頂点の位置を求める測量法のことであり，地図作成に重要である。歴史的には伊能忠敬の日本地図作成が有名である。また，現在では，測量士（補）や土地家屋調査士の資格試験では関連法規の知識のほかに三角測量の知識も問われる。

三角比（三角関数）は大学入試に必須の分野であり，高校生は相当な時間をかけて履修し，また演習問題に取り組み，その結果として大学に入学する。しかしながら，大学入学後は，特に文系の学生は数学に接する機会も少なくなり，三角比の定義すら曖昧になる学生も少なくない。こういう事情もあり，数学を専攻しようとする受講生には少々退屈な面もあるとは思われるが，第 3 回の講義では三角比の定義から始めた。特に，$\angle C=90°$ である直角三角形 ABC において，ピタゴラスの定理①はよく知られた公式 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$ と同値であることを確認させた。この事を認識していた受講生は少ないように感じた。

第 3 回講義のレポート課題として次を課した。正接（tan）の定義より自然に解が得られることもあり，ほぼ全員が正解を得た。

【課題レポート】二つの地点 A と B から山の頂点 P を見上げた角をそれぞれ∠PAH=30°と∠PBH=60°とする。また，二地点 A, B 間の距離を 1000m とするとき，山の高さ h を求めよ。

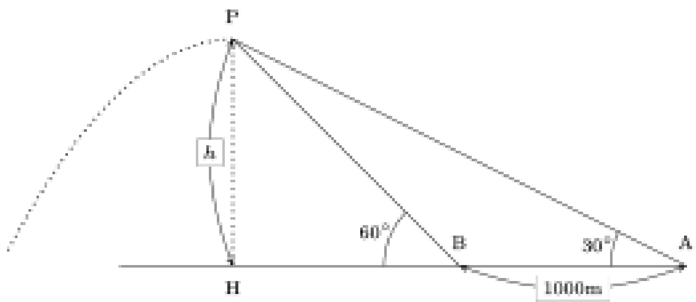

図 5-3　三角比の応用：山の高さ

ピタゴラスの定理を直角三角形以外の一般の三角形に拡張したのが余弦定理

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \cdots\cdots ③$$

であることを再確認するために，余弦定理の証明を復習した。さらに，おまけの話題として，ピタゴラス数の拡張としてのアイゼンシュタイン数を紹介した。余弦定理③において∠C=120°とおいて得られる等式 $c^2 = a^2 + b^2 + ab$ を満たす自然数の組(a, b, c)がアイゼンシュタイン数である。この場合も$(a, b, c) = (3,5,7), (8,7,13), (15,9,21)$ …のように無数に存在することを確認させた。

5.4　振り返り

講義内容の性格上，受講生が演習問題を解いて理解を深めるという講義スタイルではないため，一方通行の講義になりがちである。しかしながら，講義ではなるべく発問・問いかけを行い，双方向の講義になるよう心掛けた。

幾何学の基本は，小学校・中学校の課程の図形領域で履修する基本的な概念である頂点・辺・角・直角・垂直等を正しく理解することから始まる。受講生が卒業後，教職に就きこれらの概念を生徒に正しく教示するためには，受講生自身が時間をかけてユークリッド原論を読んでみることは有益と思われる。

６．確率空間と極限定理の再考（担当：長田）

長田の担当回では「確率，統計学」に関連する以下のテーマを取り上げた：「確率空間」，「大数の法則（Law of Large Numbers: LLN）」，「中心極限定理（Central Limit Theorem: CLT）」，「1 次元ランダムウォーク（1dRW）」。本授業のねらいは，「数え上げ」という初歩的な活動をもとに，「確率，統計学」において最も基礎的かつ重要である確率の定義と極限定理を再考することである。全 3 回の授業では，以下の題材を取り上げた：「Fischbein & Schnarch (1997)の『確率に関する直感に基づく誤解（probabilistic, intuitively based misconceptions）』の問題」，「確率空間の選択としての『同様に確から

しさ』」,「大数の法則（LLN）と中心極限定理（CLT）の現実における直感」,「1 次元ランダムウォーク（1dRW）」。

6.1　確率に関する直感に基づく誤解

本授業の導入として位置づけられる Fischbein & Schnarch (1997) の問題は,「確率に関する直感に基づく誤解」を問うものである。同研究では，小学校高学年から大学生を対象として，この誤解が年齢とともにどのように変化するかを調査している。同問題を用いた国内の調査としては，松浦(2006)などがある。この調査は，同様に確からしさ，大数の法則（LLN），中心極限定理（CLT），時間軸のある確率といった,確率の基本的性質を現実的な場面に置き換えて選択式で問うものである。Fischbein & Schnarch (1997) によると，年齢が上がるにつれて直感的・経験的な判断は減少する傾向にあるが，一方，各問題における誤解の発生率については一様ではなく，年齢とともに増加するもの・安定しているもの・減少するものが存在する。例えば,「サイコロを 2 個投げるとき、『(5,6)の目が出る確率』と『(6,6)の目が出る確率』はどちらが高いか？」という，2 つのサイコロの出る目の数え上げで答えが導かれる問題は，年齢に関係なく安定して見られる誤解として報告されている。これらの結果は，確率概念の形成における教育的介入の重要性を示唆している。

本授業では，初回の冒頭において，AI 翻訳（Microsoft Copilot）を用いて和訳した Fischbein & Schnarch (1997) の問題を学生に回答させた。これらの問題は，確率の定義や LLN，CLT の直感を問うものであり，初回に授業を俯瞰するねらいがある。また，問題に回答することで，誤解の存在を体験的に理解させ，指導上重要な確率概念の再考を促すことをねらいとした。なお，同問題の解説を第 2 回の冒頭で行った。

6.2 同様に確からしさ

確率の数学的な定義は中学校で初めて「同様に確からしさ」に基づいて導入される。この考え方は，すべての根元事象が等しい確率で起こると仮定するもので，根元事象の数え上げによって事象の確率を求めることができる。現代の数学的な枠組みでは，Kolmogorov による確率の公理系が定義に用いられる。確率の公理を満たす事象と確率の組のことを確率空間と呼ぶ。現実の試行に対し，その表現として適切な確率空間を選択する行為を「確率モデル化」，選択された確率空間を「確率モデル」と本稿では呼ぶことにする。例えば，コインの表裏やサイコロの目のような試行の結果に確率を割り振ることは確率空間を選択する行為である。表と裏の確率はそれぞれ 1/2 とすれば，これは「同様に確からしい」確率モデルである。コインの裏表やサイコロの目は「同様に確からしい」確率モデル化を行うことが自然である。一方，現実のコインやサイコロは厳密に対称ではない。また，投げ方に応じて出やすい面や目があるかもしれない。このように,「同様に確からしい」確率モデルがコインやサイコロの真理であるとはいえない。しかし，表裏が出る回数など不確定な事象の予想や記述においては極めて適切である。このように確率モデル化は仮説的なものであり，目的に応じてモデルを選択する必要がある。

本授業では，具体的で親しみがある「玉と箱」および「円の弦」を用いた確率モデルを扱って確

率モデル化の人為性を確認した。冒頭で述べた「2 個のサイコロを振るとき，(5,6)と(6,6)のどちらの目が出る確率が高いか？」という問題は，どのような確率モデル化を考えているかにより回答が異なる。本授業のねらいは，確率モデルの選択を意識し，この問題の理解に役立てることである。「確率」という用語は日常語として普及しており，通常，何かの起こりやすさという意味で用いられる。一方，これらの用法を統一して説明できる厳密な定義はない。本授業では，数学的な確率を日常語から区別し，明確な定義がある数学概念としての扱い方を提示することをねらいとした。

本授業では，小針（1973）第 1 章の「統計力学の 3 種類の話題」，「Bertrand の逆説」を題材とした。「統計力学の 3 種類の話題」では，「N 個の区別がつく箱に，r 個の玉を入れる」という玉と箱の確率モデルとして，次の 3 つを考える。

(1)「玉は区別がつく。一つの玉がどの箱に入るかは同様に確からしく，それぞれ 1/N。」

(2)「玉は区別がつかない。」

(3)「玉は区別がつかない。さらに，一つの箱に玉は一つしか入らない。」

これらの確率モデルは，それぞれ統計力学における「Maxwell-Boltzmann 統計」，「Bose-Einstein 統計」，「Fermi-Dirac 統計」に対応する。複数枚のコインを投げる試行は，コインを玉だと思い，コインの表裏を２つの箱だと思うことで（1）が対応する。一方，黒体放射における光子の分布は（1）の確率モデルでは表せず（2）を用いる必要がある。この事実は物理法則のような現実における普遍的な現象においても，確率モデル化には自然な「同様に確からしさ」が定まらず，人為的な選択が必要となることを表していると考えられる。

「Bertrand の逆説」は，「円に任意に弦を引くとき，その長さが内接三角形の一辺より長くなる確率」が，確率モデルの選び方に応じて異なることを示す例である。前提として，曲線上から 1 点を「同様に確からしく」選ぶとする：「曲線 C の全体の長さを L，曲線の部分 E の長さを M とすると，C 上の 1 点が E に含まれる確率が M/L である」。すると，確率モデルに応じて異なる確率を得る：

(1) 弦の中点を円の直径上から選ぶ → 確率は 1/2

(2) 弦の端点を円周上の 2 点を独立に選ぶ → 確率は 1/3

(3) 直径の端点と，もう一方の端点における接線上の 1 点を選んで結ぶ → 確率は 0

(3) のモデルでは，接線が無限に長いため確率は 0 となる。また，(3) のモデルにおいて「端点における接線」を「接する閉曲線」に置き換えると，曲線の選択に応じて求める確率を自由に変えることができる。したがって，「同様に確からしい」モデルが恣意的に選択できることになり，弦が内接正三角形の一辺より大きくなる確率は恣意的に決めることができる。つまり，ある事象の確率を求める際は，確率モデルが明確でなければ確率の意味が不明瞭となる。

本授業では，まず，「統計力学の 3 種類の話題」を題材とし，3 つのモデルの確率を計算させた。特に，手計算でモデルの違いを実感させることと，複数のモデルを考えることの現実における重要性を提示することをねらいとした。次に，「Bertrand の逆説」を題材とし，「同様に確からしい」弦の選び方を考えさせた。始めに，曲線上から 1 点を選ぶ確率を導入し，その後問題を考えさせた。多

くの学生は，円周上から 2 点を独立に選ぶモデルを選択し，答えは 1/3 と結論づけた。実際に確率モデルを考えさせることにより，モデル選択の恣意性を自覚させることをねらいとした。

6.3　大数の法則（LLN）と中心極限定理（CLT）の現実における直感

小学校では，確率はデータにおける事象の標本比率として導入される。これは一見すると，中学校以降で学ぶ確率の定義とは異なるように見える。しかし，データを無作為標本から取得する場合，標本比率のサンプルサイズに関する極限はその事象の母集団における割合（母比率）と一致する（LLN）。この意味で，事象の標本比率と母集団分布における確率は対応している。また，サンプルサイズが十分大きいとき，標本比率と母比率との誤差は平均＝0，分散＝母分散/ N の正規分布に従う（CLT）。例えば，コイントスを連続して行い，表裏のデータをつける。このとき，N 回目までの試行のうち，表が出る事象の標本比率 R(N)はランダムであるが，R(N)の N 無限大での極限は，確率 1 で一回のコイントスで表が出る確率 1/2 に等しくなる。また，N が十分大きければ，誤差を表す $\mathrm{R(N)} - 1/2$ は正規分布に近似的に従い，N が大きいほどその分散は小さくなる。

LLN と CLT は高等学校以降に学習する「確率，統計学」において最重要な定理である。これらの最も標準的な定式化は，平均 m と分散 v を持つ確率分布に従う独立な確率変数列に対して，「確率 1 で標本平均は m に収束する。(LLN)」,「標本平均の正規化は標準正規分布に分布収束する。(CLT)」である。これらは，確率モデルに依存しないで同一の対象に収束するという意味で，普遍的な定理である。そのため，数学的に一般形で述べることに意義がある。一方,「確率に関する直感に基づく誤解」の回答を鑑みると，これらの定理の主張を直感的・経験的に理解度は高くない。この誤解の解決のためには，具体例によりこれらの極限定理を解釈することが必要であると考える。

本授業では，Fischbein & Schnarch (1997) の問題の中から，後述の問題（1），（2）を LLN および CLT に関連付けて解説した。また，正規分布の性質を，密度関数の形，平均と分散の役割の側面から説明した。特に，平均および分散を変化させた際の密度関数の変化，平均±標準偏差の範囲の面積の確率的な意味について述べた。さらに，LLN において標本平均のばらつき（標準偏差）がサンプルサイズの増加とともに小さくなっていく様子を説明し，その応用として，モンテカルロ法による円周率の近似を紹介した。

本授業で扱った Fischbein & Schnarch (1997) の問題は以下の通りである：

(1)「ある町には 2 つの病院があります。小さな病院 : 1 日平均 15 人の赤ちゃんが生まれる。大きな病院 : 1 日平均 45 人の赤ちゃんが生まれる。男の子が生まれる確率は約 50%です。ある年、次のような記録がありました : 小さな病院では、男の子が 9 人以上（60%以上）生まれた日を記録した。大きな病院では、男の子が 27 人以上（60%以上）生まれた日を記録した。どちらの病院で「男の子が 60%以上生まれた日」が多かったと思いますか？ ①大きな病院，②小さな病院，③同じ」

(2)「コインを 3 回投げて、少なくとも 2 回表が出る確率と、コインを 300 回投げて、少なくとも 200 回表が出る確率では、どちらの方が高いと思いますか？ ① 3 回の方が低い，② 同じ，③ 3 回の方が高い」

これらの問題の解答は，(1)：「②小さな病院」，(2)：「③ 3 回の方が高い」である。Fischbein & Schnarch (1997)は，どちらの問題でも「どちらの確率も変わらない」((1) ③，(2) ②) がよくある誤解であると指摘している。

上述の問題は，どちらも本質的に（二項分布の）CLT の直観を問うている。(1) は，男子が生まれる確率は 50%であるが，男子比率が 60%以上となるような平均から外れた偏りが起こる確率は，サンプルサイズが大きい場合と小さい場合のどちらが高いか？という問題である。60%が共通しているため，一見，確率は変わらないように思われる。しかし，各病院で平均通りの人数が生まれるとしたときの，誤差の大きさと標準偏差との比較を考えると，小さい病院の方が比率が偏る確率が高いことがわかる。男子比率が 60%の場合の，男子人数の平均との誤差の大きさは次のようになる：

- 小さな病院: $|15\times0.5-15\times0.6|=1.5$,　　大きな病院: $|45\times0.5-45\times0.6|=4.5$

一方，男子人数の標準偏差は，次のようになる：

- 小さな病院: 1.94,　　大きな病院: 3.35

男子人数の標準化である「誤差の大きさ÷標準偏差」がより小さいほうが，平均により近い事象であるといえる。したがって，解答は「②小さな病院」となる。これを直観的に表現すると，サンプルサイズが小さい方が試行結果は偏りやすい，という事である。

(2) は，(1) のより極端なサンプルサイズの差がある例である。そのため，(1) より直観的に理解しやすいと思われる。また，コイントスで，「3 回投げて少なくとも 2 回表が出る確率」は 1/2 と計算できるため，その場で考えることもできる。なお，「300 回投げて少なくとも 200 回表が出る確率」はほとんど 0 である。

受講者における上述の問題の解答分布は，(1) ① 14% (15 名) ② 35% (37 名) ③ 51% (55 名)，(2) ① 14% (15 名) ② 58% (63 名) ③ 28% (30 名)，であった。これは，Fischbein & Schnarch (1997)が指摘した傾向通りである。また，(1) と (2) の正答率および典型誤答率はほぼ変わらない。つまり，ほとんどの学生はこれらを似た問題であると認識していると推察される。なお，選択肢の修正を行ったため，問題 (1) は 2 回実施しており，回答人数は (2) より 1 名少ない。

本授業のねらいは，LLN や CLT といった普遍的な定理を現実に置き換えて理解させることである。また，極端な場合を例示することで，極限定理の収束の様相を伝えることをねらいとした。

6.4　1 次元ランダムウォーク

1 次元ランダムウォーク（1dRW）とは，1 次元整数格子上を 0 からスタートし，各ステップにおいて等確率で+1 または-1 方向に移動する確率モデルである。動きうる空間を 2 次元や 3 次元などに拡張して考えることもできる。その場合は各ステップにおいて距離が 1 の周囲の点に等確率で移動する。1dRW は，コイントスの表裏に応じて+1 または-1 に移動させることで実現できる。「1dRW は N ステップ目にどこにいるか？」という問題を考えると，これは二項分布で表現される。1dRW がたどった経路を，時空間を表す座標平面上の折れ線として表現したものを「道」と呼ぶ。複数の 1dRW の道を座標平面上に重ねて図示することで，LLN や CLT を視覚的に確認できる。これは，二

項分布におけるヒストグラムに対応する。

1dRW は，各ステップで+1 を勝ち，-1 を負けに対応させることで賭け事と関連付けられる。例えば，収支が±0 である確率，N ステップ目に勝っている確率などを考えると，自然と「N ステップ目において, 原点に帰ってくる確率」,「N ステップ目までに正の範囲に滞在したステップ数の分布」などの性質，あるいはその N→無限大での極限を知りたいと思う。1dRW は，確率 1 で原点に再び戻る「再帰性」を持つことが知られている。また，正の範囲への滞在時間の極限分布は逆正弦関数で記述されるという，逆正弦法則（arcsine law）が知られている。これらを理解するには，一部で大学教養レベルの微積分学に触れるが，基本的には 1dRW の道の数え上げであるため，高等学校で学ぶ場合の数を用いて取り掛かることができる。

本授業では，1dRW の再帰性と逆正弦法則を紹介した。また，0 ステップ目で原点にいる 1dRW が N ステップ目で再び原点にいる確率を，反射原理を用いて計算させた。逆正弦法則に関しては，極限定理の 1 つとして紹介するにとどめた。

本授業のねらいは，1dRW を題材として「確率，統計学」で重要となる極限定理を紹介すること，および,「数え上げ」や「場合の数」からの数学的な広がりを提示することである。本授業を行うにあたって，Web 上の公開されている様々な 1dRW に関する講義資料を参照した。また，概ね高等学校までの数学知識で読むことができる 1dRW の参考書として竹居（2020）を参考にした。

6.5　授業実践の振り返り

本授業では,「数え上げ」から始めて，確率の定義，および，LLN，CLT，1dRW の再帰性，逆正弦法則といった極限定理を再考した。これらを厳密に扱うには微積分学が必要であり，より数学的に厳密には測度論や Kolmogorov の公理系の枠組みが必要である。しかし，これらの要求は小学校教員を目指す学生に求められる数学的内容とは大きな差があるだろう。本授業では，これらの高度な数学的内容による障壁を回避し，可能な限り本質的な数学的要点を伝えることを試みた。慣れ親しんだ題材として, 玉と箱, 円の内接三角形, コイントスを用いた。また，Fischbein & Schnarch (1997) の問題は小学生高学年でも理解できる題材であり，教材として適している。各回の課題の提出状況を鑑みるに，これらの試みは概ね成功したようである。一方，1dRW の確率の計算は主に二項係数の和の計算であり，課題の提出内容からは，学生間で数学的な理解や計算力に差があることがうかがえた。

7．商と余りおよび連分数に関する話題（担当：有家）

有家の担当回では，数に関する話題として小学校で学習する商と余りの関係を手がかりに扱える内容を取り上げた。第一回目は「商と余り」に関する授業を行い，余りの概念を用いて星型多角形が一筆書きできる条件を考察した。第二回目は,「有限連分数」に関する授業を行い，ユークリッドの互除法と，連分数の関係について解説した。第三回目は,「連分数を用いた無理数の近似」に関する授業を行い, 連分数を用いて$\sqrt{2}$や$\sqrt{3}$の近似値をどのように求めるかについて解説した。各回の終

わりには問題を配布し，解答したものを回収して採点した。

7.1　商と余りの関係

小学校で最初に学習する割り算，例えば「5 わる 2 は 2 あまり 1」という計算を学習する。ここに現れる数たちの間には，$5 = 2 \times 2 + 1$という関係が成り立っている。より一般に言えば，割られる数＝割る数×商＋余りとなる。また，余りは割る数より小さい整数になる。この商と余りの関係は，高等学校の整数に関する話題や，初等整数論において様々な整数の性質を考察するうえで最も基本的な事実となる。授業では，いくつかの割り算の具体例を出して，この関係を復習することから始めた。

次に，時間の計算を題材として「ある整数で 2 つの整数の和を割った余りは，それぞれの整数を割った余りの和を割った余りとなる」という事実について解説した。「10 時の 44 時間後は何時でしょうか？」という問題を提示し，(i)44 時間後は 24+20 時間である。よって 10+20=30 を 24 で割った余り 6 が求める時間となる，(ii)10+44=54 を 24 で割った余りは 6 となるので 6 時，という 2 つの解答を，上記の性質の例として解説した。

そのうえで，初回は受講者全員に，以下の問題を解いてもらった。

【問題】正 m 角形のある頂点から始めて，n 個とばした頂点へ直線を引く。この操作を繰り返して，すべての頂点を経由してもとの頂点に戻ることができるときの m と n の関係について考えてみよ。

このままの形では，余りとの関係が見えづらいと考え，ヒントとして，右図のように頂点に反時計回りに 0 から m-1 までの番号を振って考えるよう指示した。

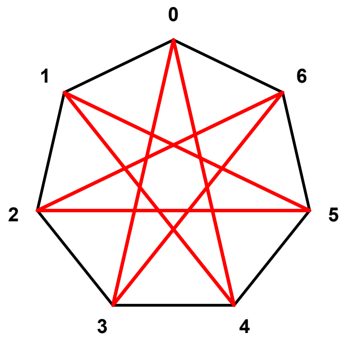

図 7–1 $(m, n) = (7,2)$

図 7-1 はもとの頂点に戻ることができる場合である。問題の操作は，$(m, n) = (7,2)$の場合には 0 に 3 を順番に加えていって，0,3,6,9,12,15,18 の 7 つの数字を 7 で割った余りの中に 0 から 6 までの全ての数が現れるかどうかという問題と同値となる。実際，これらを 7 で割った余りは 0,3,6,2,5,1,4 となり，順に経由する頂点の番号と一致する。

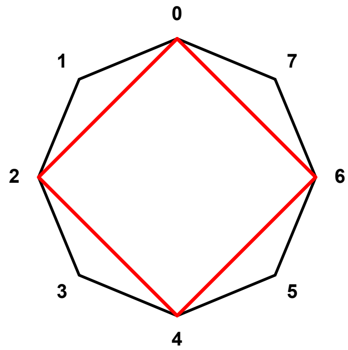

図 7–2 $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}) = (\mathbf{8}, \mathbf{1})$

一方，図 7-2 では，0 の頂点に 2 を加える操作を行うことになる。しかし，この場合に現れる数は，0,2,4,6,8,10,12 で，これらを 8 で割った余りは 0,2,4,6,0,2,4 となるため，全ての頂点を経由できないことがわかる。

一般の m,n の場合には，n 個とばした頂点に直線を引くと，その直線の終点は n+1 の頂点となる。さらに n+1 から同様の操作を繰り返すと，0, n+1, 2(n+1),…(m-1)(n+1)という数列が得られる。これらを n で割った余りがすべて異な

っているための必要十分条件は，m と n+1 が互いに素，すなわちその最大公約数が 1 であることである。

回収した答案を採点してみると，何個か具体例を書いたうえで，「m が n+1 で割り切れる」と解答したものがほぼ半数であった。n+1>m/2 の場合に問題の操作を行うことは，0 から逆回りで，n 個とばした頂点に直線を引くことになるため，n+1<m/2 と仮定して良い。この仮定の下では，m と n+1 が割り切れないことと，m と n+1 は互いに素であることは同値となる。したがって，概ね半数の受講生が正解を導けていた。正確に証明するには，高等学校で学習する整数の内容プラスアルファの知識が必要になるが，そのような解答は無かった。

7.2　連分数とユークリッドの互除法

第二回，第三回の授業では連分数に関する話題を取り扱った。連分数に関しては，高木（1971）の第 2 章に詳しい解説があり，授業の準備段階で参考にした。連分数とは，以下の形で表される数である。

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\dots}}}$$

ある数を連分数で表したものを，その数の連分数展開という。一般には，分子の部分に 1 以外の数が現れる場合もあるが，この授業では上記の形のもののみを扱った。また，…の部分が有限個で止まっているものを有限連分数という。以下スペースの節約のため，連分数を$[a_0; a_1, a_2, \ldots]$で表す。

有限連分数は有理数となる。このことは，分数の中に分数が入っている数を通常の分数に戻す操作を下層にある分数から順に行っていけば容易にわかる。逆に有理数$\frac{a}{b}\,(a>b>0)$が与えられた時，a を b で割った商をq_0，余りをr_0とすると，$\frac{a}{b}=\frac{b\,q_0+r_0}{b}=q_0+\frac{r_0}{b}$ となる。このとき，$\frac{r_0}{b}$ の分子は分母より小さいので，a/b の場合と同じ操作はできない。そこで，逆数分の 1，すなわち$\frac{1}{\frac{b}{r_0}}$を考えれば，この数の分母の$\frac{b}{r_0}$には，$\frac{a}{b}$と同じ操作を行うことができる。つまり，bをr_0 で割った商をq_1，余りをr_1とすると，$\frac{b}{r_0}=q_1+\frac{r_1}{r_0}$となる。この操作を繰り返すと，$\frac{a}{b}$の連分数展開 $\frac{a}{b}=[q_0;\ q_1,\ q_2,\ q_3\ldots]$が得られる。ここで行う計算は，ユークリッドの互除法で行う計算と全く同じものなので，操作は有限回で終了し，有限な連分数が得られることがわかる。

以上の内容を，具体的な分数 39/15 を題材として解説した後，以下の問題を配布し解答してもらった。

【問題】572/221 の連分数展開を求めよ。

この問題の解答は以下のとおりである。572 と 221 にユークリッドの互除法を適用すると，572 を 221 で割った商は 2，余りは 130，221 を 130 で割った商は 1，余りは 91，130 を 91 で割った商は 1，余りは 39，91 を 39 で割った商は 2，余りは 13，39 は 13 で割り切れて商は 3 である。したがって，数展開は[2;1,1,2,3]となる。この問題は，計算自体は割り算を繰り返せばよいので，ほとんどの受講

生が正解していた。

7.3　連分数と無理数の近似値

無理数の連分数展開は，無限に続く連分数となる。例えば$\sqrt{2}$であれば，

1. $\sqrt{2}$を整数部分と小数部分に分ける：$\sqrt{2}=1+(\sqrt{2}-1)$
2. 小数部分$\sqrt{2}-1$の逆数の逆数を取る：$\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}}$
3. 分母の$\frac{1}{\sqrt{2}-1}$を有理化する：$\sqrt{2}+1$
4. 1 と同じ操作を$\sqrt{2}+1$に繰り返す。

以上の手順を繰り返し，現れる整数部分を並べることで，$\sqrt{2}$の連分数展開を求めることができる。特に，$\sqrt{2}+1$の小数部分は$\sqrt{2}-1$となるので，現れる整数部分は常に 2 となる。よって，得られる連分数展開は[1;2,2,…]となる。

無限小数を有限桁で打ち切るとその数の近似値が得られるように，連分数を有限項で打ち切ることで無理数の有理数による近似を行うことができる。

- $[1;2]=\frac{3}{2}=1.5$
- $[1;2,2]=\frac{7}{25}=1.4$
- $[1;2,2,2]=\frac{17}{12}$=1.41667

このように，徐々に$\sqrt{2}=1.41421356\ldots$に近づく様子が見て取れる。

無理数の無限連分数展開は，すべてが循環するわけではない。実際，循環する連分数はすべて整数係数の 2 次方程式の解となることが知られている。$\sqrt{2}$の場合には，x=[1;2,2,…]と置くと，$x=1+\frac{1}{1+x}$と書き直すことができる。これを x に関する方程式に書き換えると，$x^2-2=0$となる。他の循環する無限連分数についても同様に，2 次方程式の解となることが確認できる。したがって，整数係数の 2 次方程式の解とならないような数，たとえば，2 の立方根や円周率πなどは循環しない連分数展開を持つことが知られている。

以上の内容を講義した後，以下の問題を配布し，解答してもらった。

【問題】$\sqrt{3}$の連分数展開を求め，その近似値を求めよ。

問題中で，どこまで近い近似値を求めればよいかは指示していないが，できるだけ近いものを求めるよう伝えた。

$\sqrt{3}$の連分数展開は[1;1,2,1,2,…]となるが，例として取り上げた$\sqrt{2}$と比べて，循環の周期が増えるためか，解答に時間がかかっている学生が多かった。特に，$\frac{1}{\sqrt{3}-1}$を有理化した際に現れる$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$を整数部分と小数部分に分ける操作で難しさを感じている学生が多かったようである。この部分で時間がかかったためか，近似値については，$[1;1,2,1]=\frac{7}{4}$=1.75 あたりまでで終わっている学生が多かった。中には時間いっぱいまで使って$[1;1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2]=\frac{13775}{7953}=1.73205079\ldots$まで計算しているものもあった。

7.4　授業実践の振り返り

今回は，小学校で学習する商と余りの考え方を手がかりに，一筆書き可能性や，連分数といった通常高校までの内容で扱われることのない内容を説明することをねらいとした。本授業で解説した内容は，一見すると新しいもののように映るが，実際に行う計算は，これまでに学習した内容に基づいているものであるから，学習の連続性を意識させることを意図した。一方で，いざ計算を進めたり，具体例を多く検討しながら推論したりする段になると，困難を感じる学生が少なくなかったようである。そこで，問題を解いている間には教室内を巡回し，つまずいている箇所や現在どのような考えを持って取り組んでいるかを聞き取ったうえで，助言するよう心がけた。中にはまず何から手を付けてよいかと戸惑っている学生も少なからず存在した。このことを踏まえると，講義部分でもう少し丁寧に解説を行ったり，計算例のあとに簡単な実践の機会を設けたりするなどしてより理解が深まるよう工夫する必要を感じた。

8．本稿のまとめと今後の課題

「算数指導において求められる小学校教師の数学的専門性とは何か」という課題意識のもと，本稿の目的は，小専科目「数学概論」において扱うべき具体的な授業内容及びそれに関する実践を報告，考察することであった。7節までの報告，考察にもあるように，「数学概論」の授業では，各担当教員の専門領域をふまえた様々な数学的話題が扱われている。見方によっては，個別の数学的話題がそれぞれ扱われているようにもみえるかもしれない。しかし，これらの授業内容には，基本的理念が通底している。それは，算数科で扱われる教材に深く関係する様々な数学的話題の検討を通じて，「数学の本質的な見方や考え方」を受講生に実体験，実感させることである。つまり，将来，受講生が教師として算数を指導するとき，「数学の本質的な見方や考え方」を十分に理解していることが，より良い算数科の授業づくりの基盤になるという基本的理念である。「数学概論」の授業を展開するにあたって，筆者らは，算数・数学のいわば「不易」ともいえる特性を理解，実感させることが重要であると考えている。

一方，学校教育では，こうした各教科の不易とともに，その時代や社会が求める今日的課題としての「流行」も常に意識しなければならない。例えば，「デジタル学習基盤を前提とした学びの在り方」は，現代的な教育課題の1つである（中央教育審議会教育課程企画特別部会，2025)。近未来の学校教育を担う教員養成課程の学生たちにも，こうした現代的な教育課題に関する専門性が求められる。こうした要請は，必然的に，大学の教職課程における授業科目の再考にも連動する。「数学概論」も決して例外ではなく，算数の授業づくりに関する不易と流行の適切な調和という視座から，その授業内容を絶えず見直していく必要がある。このことは今後の課題となる。

〔引用・参考文献〕

Adler, J. & Venkat, H. (2020). Subject matter knowledge within “mathematical knowledge for teaching” In

Lerman, S. (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education: Second edition* (pp.817-820). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0

新井光津江（2016）．翻案過程における教師のカリキュラム知識に関する考察．全国数学教育学会誌・数学教育学研究，22(2)，213-221. https://doi.org/10.24529/jasme.22.2_213

ブラウン, S. I. ＆ ワルター, M. I.（1990）．いかにして問題をつくるか（平林一榮監訳）．東洋館.

中央教育審議会教育課程企画特別部会（2025）．教育課程企画特別部会・論点整理（令和７年９月25日）．https://www.mext.go.jp/content/20250925-mxt_kyoiku02-000045057_01.pdf （2025．10.30 参照）

Fischbein, E., & Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(1), 96–105. https://doi.org/10.2307/749665

藤井斉亮（1999）．「数字の式」から「文字の式」に至る指導．杉山吉茂先生ご退官記念論文集編集委員会編，新しい算数・数学教育の実践を目指して（pp.153-162）．東洋館.

Hill, H.C., Ball, D.L & Schilling, S.G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.39.4.0372

一松信，岡田褘雄，町田彰一郎，池田敏和ほか 27 名（2015），中学校数学 3，学校図書.

飯田慎司（1991）．問題解決．九州算数教育研究会編，算数科教育の研究と実践（pp.63-74）．日本教育研究センター.

鹿児島大学教育学部（2025）．教育課程．鹿児島大学教育学部.

小林昭七（2003）．ユークリッド幾何学から現代幾何学へ．日本評論社.

小針晛宏（1973）．確率・統計入門．岩波書店.

国立教育政策研究所（2015）．平成 25〜26 年度プロジェクト研究「教員養成等の改善に関する調査研究」報告書（全体版）．国立教育政策研究所.

近藤俊明（2011）．はとめ返し〜一瞬の変身技〜．新潟算数・数学を楽しむ会編，算数学（pp.85-87）．新潟フレキソ.

國本景亀（2006）．機械論から生命論へ（練習に焦点をあてて）—機械的練習から生産的（創造的）練習へ—．日本数学教育学会誌・算数教育，88(2)，12-19．https://doi.org/10.32296/jjsme.88.2_12

松浦武人（2006）．児童の確率判断の実態に関する縦断的・横断的研究．全国数学教育学会誌・数学教育学研究, 12, 141‐151．https://doi.org/10.24529/jasme.12.0_141

文部科学省（2018）．小学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説・算数編．日本文教出版.

中原忠男（2002）．算数に「敷き詰め」を取り入れたことの価値．新算数教育研究会編，新しい算数研究，No.381（10 月号），東洋館出版社，4-7.

中村幸四郎・寺阪英孝・伊東俊太郎・池田美恵（1974）．ユークリッド原論．共立出版.

大矢真一（1988）．ピタゴラスの定理．東海大学出版会.

Schwarz, B. & Kaiser, G. (2019). The professional development of mathematics teachers. In Presmeg, N. &

Kaiser, G. (Eds.), *Compendium for early career researcher in mathematics education* (pp.325-343). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15636-7

高木貞治（1971）．初等整数論講義 第二版．共立出版.

竹居正登（2020）．入門確率過程．森北出版.

植田敦三（2005）．生活算術に於ける作問の位置に関する一考察．全国数学教育学会誌・数学教育学研究，11，205-215．https://doi.org/10.24529/jasme.11.0_205

和田信哉（2014）．加法と減法の相互関係に関する研究― 代数的推論の観点から ―．全国数学教育学会誌・数学教育学研究，20(2)，77-91．https://doi.org/10.24529/jasme.20.2_77

Wittmann, E. C. (2004). Empirical research centred around substantial learning environments. 日本数学教育学会，第 37 回数学教育論文発表会論文集，1-14.

山口武志（2014）．第 4 章 中学校「数と式」領域の学習指導．小山正孝編著，教師教育講座・第 14 巻　中等数学教育（pp.127-151）．協同出版.

山本信也編（2006）．ドイツからやってきた計算学習　数の石垣．東洋館.