日本機械学会論文集(A編)
57巻540号(1991-8)

論文 No. 90-1310 A

三点および四点曲げを受ける積層ばりのはく離解析*

戸谷眞之*1, 小野孝*2
宮脇正*2, 桐岡健*1

Analyses of Delamination of Laminated Beams Subjected to Three and Four-Point Bending

Masayuki TOYA, Takashi ONO,
Tadashi MIYAWAKI and Ken KIRIOKA

This paper presents a fracture mechanics approach to the delamination of laminated beams by three-and four-point bending. Interlaminar cracking is assumed to develop from both sides of a bonded beam. Based on the Euler-Bernoulli beam theory (elementary beam theory), the compliance and the total energy release rate are derived, and the stability of the delamination process is discussed. Finite-element computations are then performed to evaluate the compliance and the mode I and II energy release rates. Numerical results are shown to agree well with those based on the elementary beam theory. Finally, through the analysis of the J-integral for the interlaminar crack, it is concluded that the ratio of the mode I to mode II energy release rate is nearly independent of cracking length.

Key Words: Fracture Mechanics, Delamination, Laminated Beam, Bending, Energy Release Rate, Finite-Element Method, J-Integral

1. 緒言

近年，積層ばりのはく離についての多くの研究が報告されている．実用的な見地からは曲げによるはく離が重要である．しかし，従来の曲げによるはく離の研究は主として接着層の破壊靱性試験を対象とした純粋なモードI形のDCB試験[1]（重ねばりの引き裂き試験）やモードII形ENF試験[2][3]（端部から界面き裂を導入した積層ばり）に限定されている．曲げによるはく離の一般的な様式はモードI形とモードII形がまじりあった混合様式であり，このような場合を扱った例としてAshbyら[4]によるせん維方向に切り出した木材はりのたて割れの研究がある．切欠きを入れた木材はりの三点曲げを行うと切欠底からはりの軸方向に繊維間の界面のはく離（T字形き裂）が進展したて割れが起こる．Ashbyらはこのようなき裂進展についてオイラー・ベルヌーイのはり理論を用いてエネルギー解放率を導いた．Charalambidesら[5]は異種材料からなる積層ばりの四点曲げの場合を研究した．著者ら[6]はAshbyらの問題を大変形の場合に拡張している．

* 平成2年7月19日　九州支部佐賀地方講演会において講演，原稿受付　平成2年10月18日．
*1 正員，鹿児島大学工学部（〒890 鹿児島市郡元1-21-40）．
*2 学生員，鹿児島大学工学部．

詳細なはく離条件の解析には，エネルギー解放率に対するモードI形，およびII形の寄与の割合を知ること，すなわち，モードI形，およびII形のエネルギー解放率を分離評価することが不可欠である．この観点に立って鄭ら[7]は重ね継手の解析を行った．

Ashbyらのモデルでは，はく離はT字形き裂の進展としてとらえられているが，NASAのスペースシャトルの有名な例に見られる金属の板に耐熱タイルを接着した構造においては，はく離はタイルの端部から始まることが考えられる．同様なはく離の様式は，接着された補修板のはがれについても考え得る[8]．そこで本論文において我々は両端からはく離が開始される，積層ばりの三点および四点曲げモデルを解析する（図1および図3を参照）．最初にオイラー・ベルヌーイのはり理論（以下単純はり理論）とコンプライアンス法を組合せることにより界面き裂エネルギー解放率を導く．次に有限要素法によりモードI形，II形のエネルギー解放率 G_{I}, G_{II} を計算し，各モードの全エネルギー解放率に対する割合を調べる．各モードのエネルギー解放率の和は単純はり理論より導かれた全エネルギー解放率と良く一致することが確かめられる．また比 G_{I}/G_{II} はき裂長さによらずほぼ一定であるが，このことは J 積分の計算により説明される．

2. 単純はり理論に基づく三点曲げによるはく離の解析

2・1 コンプライアンスの導出 図1(a)に示すように，中心に同一材からなる2本のはりを左右対称に接着して作られた積層ばりの三点曲げによるはく離について，単純はり理論に基づく解析を行う．上のはりの長さ(支点間距離)を L, 厚さを h_1, 下のはりについては，それぞれ l, h_2, とし，幅は両方とも b とする．荷重 P がはりの中央に負荷されている．左の支点，右の支点からそれぞれ距離 a_1, a_2 の位置まではく離しているものとする．解析にあたって，図1(a)の斜線を施した部分はコンプラアンスには影響を及ぼさないものとして切り離し，図1(b)のようなモデルを考える．すなわち，B, D 点において断面積が急変するはりの変形を考える．したがって，このようなモデル化によって，下側のはりの長さ l は問題とならず，接着部分の長さのみが意義を持つことになる．この仮定の正当性については，4章の有限要素法において検討する．AB, DF 部分（はく離部分）の断面二次モーメントを I_1, BD 部分（接着部分）の断面二次モーメントを I_2 とする．また，ヤング率を E とする．図2に示すように，はりをき裂端および着力点において分割し，AB, BC, CD, DF 部分に分ける．x_i 座標($i=1\sim4$)を図示のようにとり，曲げモーメント M_x は下向きに凸に曲げるように作用するとき正とすると，各部の曲げモーメントは以下のようになる．

AB 間：$M_{x1}=Px_1/2$ ……………………………(1)

BC 間：$M_{x2}=Px_2/2+Pa_1/2$ ……………………(2)

CD 間：$M_{x3}=-Px_3/2+PL/4$ ………………(3)

DF 間：$R_{x4}=-Px_4/2+Pa_2/2$ ………………(4)

各部分のひずみエネルギーを求め足し合わせることにより，はりの全ひずみエネルギーは以下のように得られる．

$$U=\sum_{i=1}^{4}\int\frac{M_{xi}^2}{2EI_i}dx_i$$
$$=\frac{P_2}{24EI_1}(a_1^3+a_2^3)$$
$$+\frac{P^2}{24EI_2}\left(\frac{L^3}{4}-a_1^3-a_2^3\right) \quad\cdots\cdots(5)$$

カスティリアーノの定理により着力点の変位 δ は，$\delta=dU/d\mathrm{P}$ より得られ，結局コンプライアンスを Φ とおくと以下の式を得る．

$$\delta=\Phi P \quad\cdots\cdots(6)$$

$$\Phi=\frac{1}{12EI_1}(a_1^3+a_2^3)$$
$$+\frac{1}{12EI_2}\left(\frac{L^3}{4}-a_1^3-a_2^3\right) \quad\cdots\cdots(7)$$

2・2 はく離の条件 はく離の進展は界面き裂の進展と等価であり，したがって，エネルギー解放率が重要なパラメータとなる．よく知られているように，エネルギー解放率(G)はコンプライアンスのき裂長さに対する変化率に比例する．図1(a)の左側のはく離に対するエネルギー解放率は外部荷重一定の場合に対し以下のようになる．

$$G=\frac{P^2}{2b}\frac{d\Phi}{da_1} \quad (一定荷重) \quad\cdots\cdots(8)$$

また，着力点変位を一定に保つ様式に対しては以下のように与えられる．

$$G=\frac{\delta^2}{2b\Phi^2}\frac{d\Phi}{da_1} \quad (一定変位) \quad\cdots\cdots(9)$$

ここで式(7)より

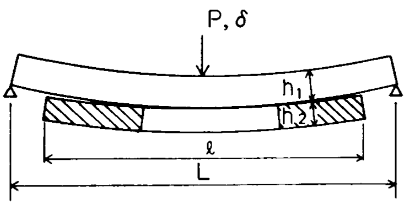
$$\frac{d\Phi}{da_1}=\frac{a_1^2}{4}\left(\frac{1}{EI_1}-\frac{1}{EI_2}\right) \quad\cdots\cdots(10)$$

右側のはく離端におけるエネルギー解放率は a_1 を a_2 におきかえて得られる．特にはく離が左右対称に同時に起こる場合($a_1=a_2=a$)を考えると

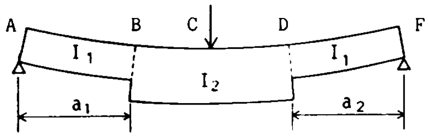
$$G=\frac{P^2a^2}{8b}\left(\frac{1}{EI_1}-\frac{1}{EI_2}\right) \quad\cdots\cdots(11)$$

実験により限界荷重 P（一定荷重条件）または限界着力点変位 δ（一定変位条件）がわかれば，接着面の破壊靱性 G_c は $G=G_c$ として得られる．

G_c は厳密には一定値ではなくモード I，II のエネ



(a) 界面き裂を有する積層ばりの形状



(b) 段付きはりによるモデル化

図 1 三点曲げによるはく離

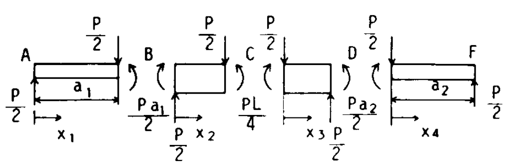


図 2 モデルはりの自由体線図

ルギー解放率の比によって変化するであろう．しかし，後述のようにこの比は同一の h_1/h_2 につき，き裂長さに無関係に一定である．したがって一定荷重条件のもとではく離が起こる場合を考えると，Pa=定数，となる．a の増大（はく離の進展）に伴い P は減少するから，はく離は不安定に進行することがわかる．

3. 四点曲げによるはく離の解析

次に図3に示すような四点曲げによるはく離を解析する．荷重 P_1, P_2 が支点からともに S の距離に負荷される場合を考える．両支点における反力はそれぞれ

$$R_A=[P_1(L-S)+P_2S]/L$$
$$R_F=[P_1S+P_2(L-S)]/L \quad \cdots\cdots(12)$$

となる．前章と同様にはりをき裂端，負荷点で5個のはりに分割して，それぞれのひずみエネルギーを計算し足し合わせて全ひずみエネルギーが求められる．ひずみエネルギーを P_1 で偏微分して P_1 の着力点における変位 δ_1 が，また P_2 で偏微分して δ_2 が得られる．き裂の長さによってき裂端と負荷点の位置関係が変わるから場合分けして計算する必要がある．以下では両き裂端が(i)ともに負荷点の外側にある場合 ($a_1, a_2<S$) と，(ii)ともに負荷点間にある場合 ($a_1, a_2>S$) の二つの場合について考える．計算の過程は前章と同様であるので，結果だけを記すと以下のようになる．ただし $P_1=P_2\equiv P$ とおき，変位として両負荷点における変位の平均値，$\delta\equiv(\delta_1+\delta_2)/2$，を考え，$\delta=P\Phi$ で四点曲げに対するコンプライアンスを定義する．

(i) はく離が負荷点外にある場合　コンプライアンスおよび左側のはく離端のエネルギー解放率はそれぞれ以下のように与えられる．

$$\Phi=\frac{1}{6}\frac{a_1^3+a_2^3}{EI_1}+\frac{3S^2L-4S^3-(a_1^3+a_2^3)}{EI_2} \quad \cdots\cdots(13)$$

$$G=\frac{P^2a_1^2}{2b}\left(\frac{1}{EI_1}-\frac{1}{EI_2}\right) \quad \cdots\cdots(14)$$

(ii) はく離が負荷点内にある場合

$$\Phi=\frac{S^2}{6}\frac{3(a_1+a_2)-4S}{EI_1}+\frac{3(L+a_1-a_2)}{EI_2} \quad \cdots\cdots(15)$$

$$G=\frac{P^2S^2}{2b}\left(\frac{1}{EI_1}-\frac{1}{EI_2}\right) \quad \cdots\cdots(16)$$

式(13)，(14)は三点曲げに対する結果と類似している．式(13)において，$S=L/2$ とおき P を $P/2$ でおきかえると式(7)と一致する．四点曲げ特有の結果は一定モーメント領域に対する式(15)，式(16)において表され，ここでは G ははく離長さに無関係であり外部荷重のみの関数となる．G=一定ではく離が進行すると仮定するとはく離条件は P=一定となる．すなわちはく離の進行は安定と不安定の中間にあって，生じたはく離は一定負荷のもとでは一定速度で進行する[9]．

4. 有限要素法（FEM）によるはく離解析

本章では有限要素法によるコンプライアンス，モードI形およびII形のエネルギー解放率を求める．

使用した有限要素法プログラムは大草[2]の開発したもので，要素としては一次式の変位関数を仮定する三角形要素と積 xy の項を含む長方形要素（各辺は直交座標軸にそれぞれ平行）が用いられている．まず，支点間距離が 550 mm，厚さが 10 mm の単純はりの四点曲げ問題についていくつかの種類の分割を試み，単純はり理論に基づく値と比較した．その結果縦5分割横220分割（1メッシュのサイズが 2.0 m×2.5 mm）のとき着力点の変位として単純はり理論の結果の97.0%の値が得られた．したがって同程度の大きさのメッシュを基本として分割を行った．ただし，図4に示すようにき裂端周りの要素は大きさが1/4ないし1/16になるように細かくした．サンプル形状として L=550 mm，l=500 mm，b=30 mm と固定し h_1, h_2 および $a(=a_1=a_2)$ を変化させて計算した．また材料としてアクリル材を想定し E=2.94 GPa，ポアソン比を0.35とし平面応力条件を仮定した．拘束条件は，支点の片方を x 軸，y 軸方向ともに拘束し他方を y 軸方向のみ拘束した．負荷条件は，三点曲げに対してははり

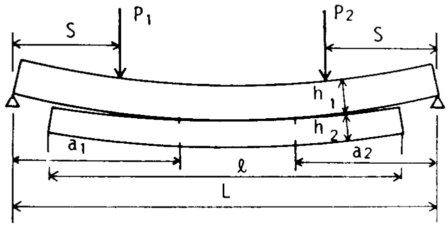


図3 四点曲げによる積層ばりのはく離

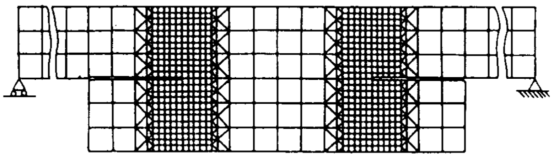
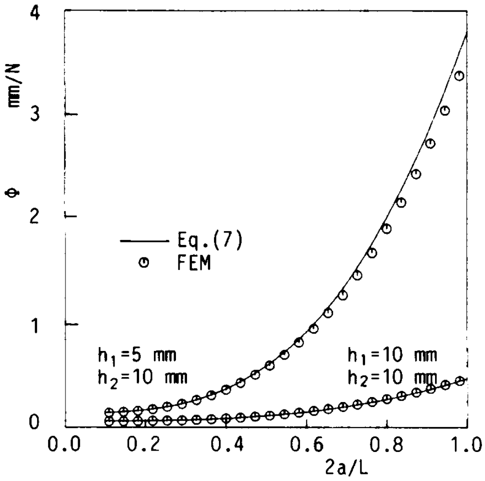


図4 有限要素の分割例

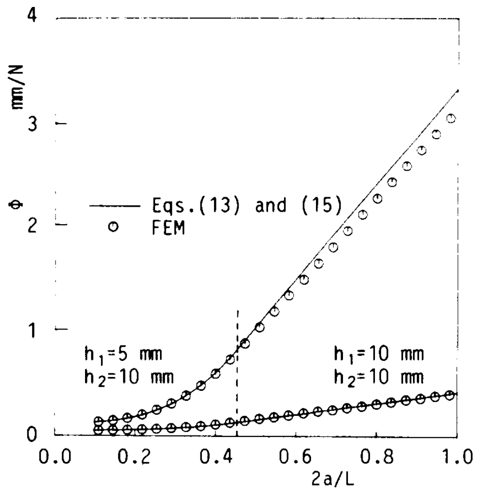
の中心に，四点曲げに対しては支点からの距離が $S=125\,\mathrm{mm}$ の点に荷重 $P=9.8\,\mathrm{N}$ を加えるものとする．また対称なはく離のみを考える．

図5はコンプライアンスとはく離長さ a との関係を示す．①は有限要素法による値，実線は式(7)（三点曲げ）および式(13)，(15)，（四点曲げ）による計算値である．理論値は有限要素法による値よりわずかに大きいが，コンプライアンスのはく離長さ a に対する変化率はほぼ等しく，したがってエネルギー解放率は式(10)または式(14)，(16)を用いることにより精度よく求められることがわかる．

三点および四点曲げによるはく離は混合モードである．すなわち，垂直応力（モードⅠ形）およびせん断応力（モードⅡ形）の双方が界面の分離に寄与する．界面の破壊靱性値はモードⅠ形とⅡ形に対し異なった値



（a） 三点曲げの場合



（b） 四点曲げの場合（$S=125\,\mathrm{mm}$）

図5 コンプライアンス a による変化（$L=550\,\mathrm{mm}$，$l=500\,\mathrm{mm}$，$b=30\,\mathrm{mm}$，$E=2.94\,\mathrm{GPa}$，ポアソン比＝0.35）

を持つと考えられるから，破壊条件を定めるためにはモードⅠ形とⅡ形の混合比をあらかじめ知っておく必要がある．従来の均質材料を対象とした破壊力学においては，モードⅠ形，Ⅱ形の応力拡大係数がき裂端における混合モードを表す適当なパラメータであった．しかし異種材の界面き裂を対象とする場合，先端の応力と変位場は振動する特異性を有するめ一般に受け入れられる合理的な応力拡大係数の定義は存在しない．そこでより一般的な混合モードを特徴づけるパラメータとしてモードⅠ形およびⅡ形のエネルギー解放率 $G_{\mathrm{I}}, G_{\mathrm{II}}$ の使用が考えられる[7][10][11]．

そこで以下に有限要素法を用いて G_{I} と G_{II} を決定する．図6にはく離端近くのメッシュを示す．このとき各モードのエネルギー解放率は

$$G_{\mathrm{I}}=Y(v_a-v_b)/(2b\Delta)$$
$$G_{\mathrm{II}}=X(u_a-u_b)/(2b\Delta) \quad \cdots\cdots(17)$$

で与えられる．ここで Δ はメッシュの幅，Y, X はき裂を Δ の長さだけ閉じ合わせるために節点 a, b に加えるべき y, x 方向の節点力，v_a-v_b，u_a-u_b は y 方向，x 方向の節点 a, b 間の相対変位である．Y, X は以下のローカル・コンプライアンス法[12]により求める．まず図4の左右の支持端の拘束条件のもとに節点 a, d に x 軸の負の方向，節点 b, c には x 軸の正の方向に単位荷重を負荷することによる節点 a, b 間の相対変位（ローカル・コンプライアンス），($\delta_{11}\ \delta_{12}$) を計算する．次に，支持点の拘束をとりさり節点 b の変位を x 軸，y 軸方向ともに拘束し，節点 d は y 軸方向のみ拘束という条件のもとに節点 a, c に y 軸方向に単位荷重を加えることによる相対変位 (δ_{21}, δ_{22}) を計算する．ローカル・コンプライアンスを用いて節点 a, b の相対変位は任意の節点力 (X, Y) につき以下のように表される．

$$u_a-u_b=\delta_{11}X+\delta_{21}Y$$
$$v_a-v_b=\delta_{12}X+\delta_{22}Y \quad \cdots\cdots(18)$$

これより，u_a-u_b，v_a-v_b が与えられると (X, Y) が得られる．

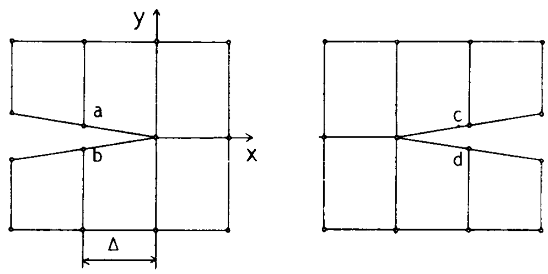


図6 き裂端におけるメッシュ

計算例を図7, 図8に示す．また三点曲げの$h_1=h_2=$ 10 mmの場合のG_I, G_{II}の数値例を表1に示す．全エネルギー解放率，$G=G_I+G_{II}$は小さなaの領域を除いては，はり理論による結果(11)および(14)，(16)とよく一致している．また表1より比G_I/GおよびG_{II}/Gは同一の厚さ比につきはく離長さに無関係にほぼ一定であることがわかる．この理由は次章のJ積分により定性的に説明することができる．

5. J積分の考察

支点とはく離端の距離がaの場合につき界面き裂端を中心として左右に距離$2H(H=h_1+h_2)$の断面で切り離した仮想的な「試験片」を考える．図9に三点

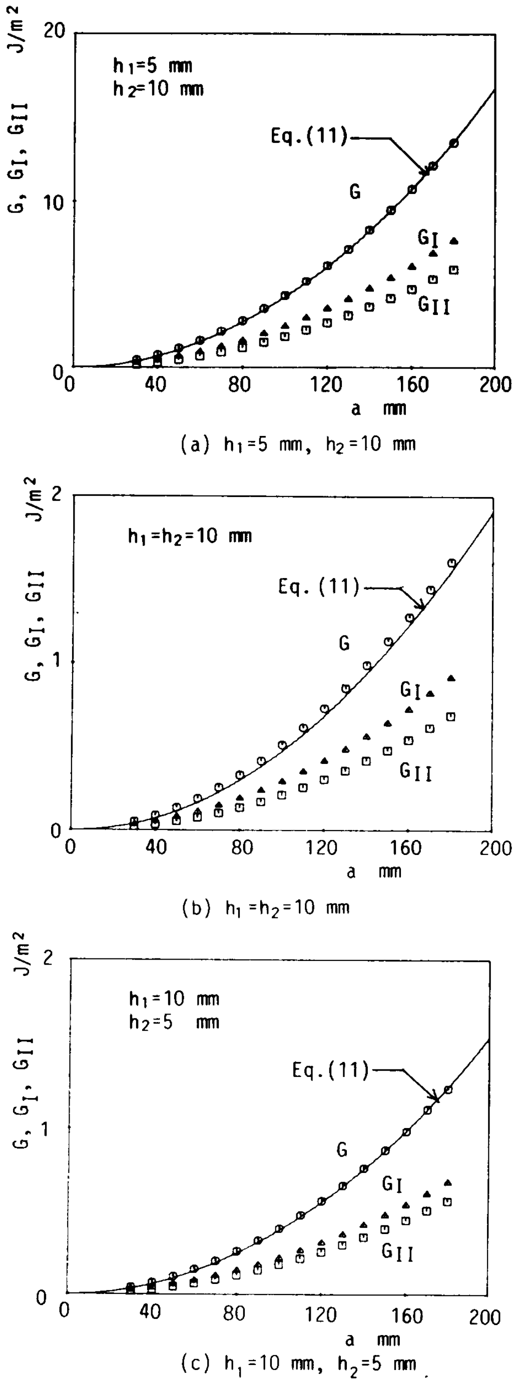


図7 三点曲げにおけるエネルギー解放率のはく離長さによる変化($L=550$ mm, $l=500$ mm, $b=30$ mm, $E=2.94$ GPa, ポアソン比$=0.35$, $P=9.8$ N)

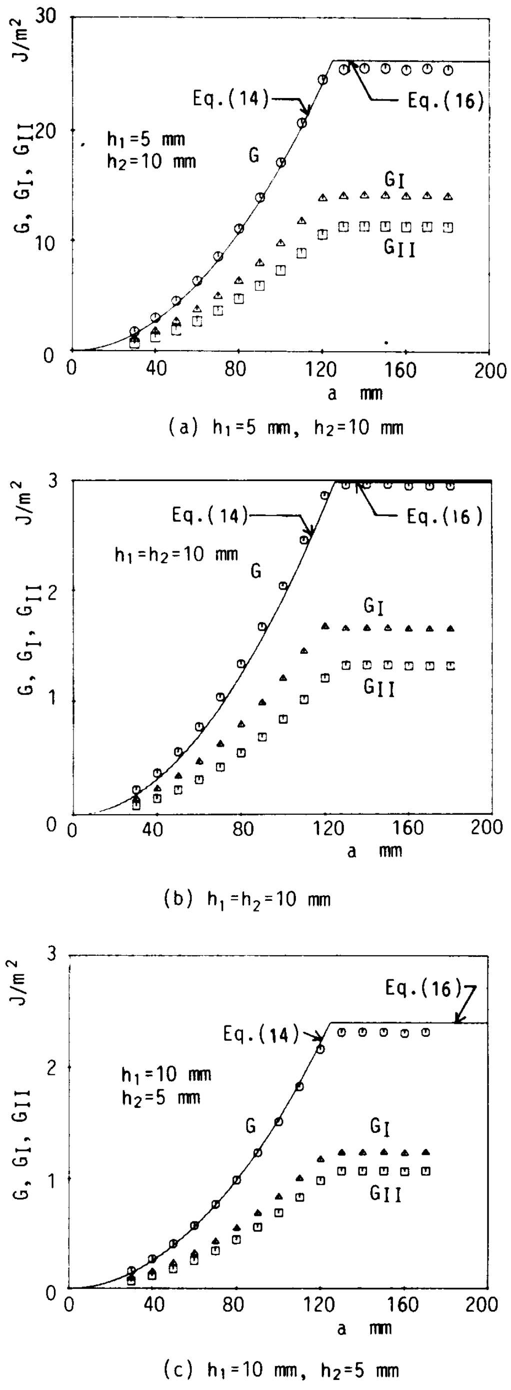


図8 四点曲げにおけるエネルギー解放率のはく離長さによる変化($L=550$ mm, $l=500$ mm, $b=30$ mm, $E=2.94$ GPa, ポアソン比$=0.35$, $P_1=P_2=9.8$ N)

曲げの場合の $a=180\ \mathrm{mm}$ を例にとった有限要素法による断面における応力分布の結果を示す．有限要素法による解は単純はり理論による予測と良く一致していることがわかる．すなわち左右の試験片の縁において σ_x はそれぞれ

$$\sigma_x=-M_L y_1/I_1,\ \sigma_x=-M_R y_2/I_2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

で与えられる．y_1 ははく離部分の上側のはりの中心軸からの垂直方向距離，y_2 は接着部分の中心軸からの垂直方向距離である．M_L, M_R は試験片の左右の縁に働く曲げモーメントで図2の x_1 座標を用い左右端の座標を x_L, x_R とすると次式で与えられる．

$$\left.\begin{aligned}M_L&=Px_L/2=Pa(1-2H/a)/2\\ M_R&=Px_R/2=Pa(1+2H/a)/2\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

せん断応力分布に関しても単純はり理論より導かれる放物線形の布とほぼ一致する．すなわち，試験片左右の縁に対し

$$\left.\begin{aligned}\tau_{xy}&=P(y_1^2-h_1^2/4)/(4I_1)\\ \tau_{xy}&=P(y_2^2-H^2/4)/(4I_2)\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

き裂端の位置 a の増大に対し垂直応力は，ほぼ a に比例して増大するが，せん断応力は a には無関係な一定の分布をすることになる．

ここで図9の試験片に対し J 積分，

$$J=\int_c\left[U dy-\boldsymbol{T}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}ds\right]\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

を計算して見よう．ここで c はき裂端を囲む任意の積分経路，U はひずみエネルギー密度で

$$U=\sigma_x^2/(2E)+\tau_{xy}^2/(2\mu)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$

(μ は剛性率) である．また $\boldsymbol{T}=(T_x, T_y)$ はトラクション，$\boldsymbol{u}=(u, v)$ は変位ベクトル，ds は経路の線要素を表す．周知の通り J はエネルギー解放率 G と等しい．

積分経路を試験片の縁に取ると J 積分には試験片の左右の縁に対応する垂直経路 $C_R(x=x_R,\ -H/2\leqq y_2\leqq H/2)$ および $C_L(x=x_L,\ -h_1/2\leqq y_1\leqq h_2/2)$ のみが寄与する．トラクションは左右の縁で以下のように与えられる．

$$\left.\begin{aligned}&C_L \text{ 上で } T_x=-\sigma_x,\ T_y=-\tau_{xy}\\ &C_R \text{ 上で } T_x=\sigma_x,\ T_y=\tau_{xy}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

Armanios ら[2] は，平面応力条件を仮定して曲げを受けるはりの変位の近似式を導いた．彼らの結果を用いると三点曲げに対し次式を得る．

$$u=-y\frac{dv_0}{dx}-y\alpha(y),\ v=v_0-x\beta(y)\quad\cdots\cdots\cdots(25)$$

ここで

$$\alpha(y)=-P\{4(1+\nu)+(2+\nu)$$
$$\times(1-4y^2/h^2)\}/\{8\mu hb(1+\nu)\}$$
$$\beta(y)-P\nu(1-12y^2/h^2)/\{8\mu hb(1+\nu)\}$$

上式において，y（および h）は左右の各縁に対し，y_1, y_2（および h_1, H）を意味する．v_0 は単純はり理論における y 方向変位［すなわち $v_0''=-M/(EI)$］で x のみの関数である．$\alpha(y), \beta(y)$ はせん断応力分布による変位の補正項であり，ν はポアソン比を表す．

v_0 の計算は容易であり，試験片左右縁における値をそれぞれ，v_{0L}, v_{0R} とすると次式を得る．

$$\left.\begin{aligned}\frac{dv_{0L}}{dx}&=\frac{P(x^2-a^2)}{4EI_1}-\frac{P(L^2-4a^2)}{16EI_2}\\ \frac{dv_{0R}}{dx}&=\frac{P(x^2-a^2)}{4EI_2}-\frac{P(L^2-4a^2)}{16EI_2}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(26)$$

式(23)～(26)を(22)に代入し，さらに式(19)，(21)を用いると J は容易に計算できる．明らかに J は垂直応力 σ_x に起因する項とせん応力 τ_{xy} に起因する項の和によって表される．それぞれを J_σ, J_τ とおくと以下の式が得られる．

$$J_\sigma=\frac{1}{2Eb}\left(\frac{M_L^2}{I_1}-\frac{M_R^2}{I_2}\right)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

$$J_\tau=\frac{P^2}{8Eb}\left(\frac{x_R^2-a^2}{I_2}-\frac{x_L^2-a^2}{I_1}\right)$$
$$-\frac{P^2(6+7\nu)}{40\mu b^2(1+\nu)}\left(\frac{1}{h_1}-\frac{1}{H}\right)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

式(27)と(28)を足し合わせることにより J は式(11)と式(28)の右辺第2項の和となることがわかる．式

表1　エネルギー解放率の数値例
三点曲げ，$h_1=h_2=10\ \mathrm{mm}$

a (mm)	G Eq.(11)	G (FEM)	G_I (FEM)	G_{II} (FEM)	G_I/G	G_{II}/G
		FEM (J/m²)				
40	0.076	0.092	0.056	0.036	0.609	0.391
60	0.172	0.192	0.114	0.078	0.594	0.406
80	0.304	0.330	0.193	0.137	0.585	0.415
100	0.476	0.505	0.291	0.214	0.576	0.424
120	0.686	0.718	0.413	0.305	0.575	0.425
140	0.934	0.967	0.554	0.413	0.573	0.427
160	1.220	1.248	0.712	0.536	0.571	0.429
180	1.544	1.570	0.894	0.676	0.569	0.431
200	1.906	1.937	1.099	0.838	0.567	0.433
220	2.306	2.324	1.317	1.007	0.567	0.433
240	2.744	2.756	1.560	1.196	0.566	0.434
260	3.220	3.251	1.848	1.403	0.568	0.432

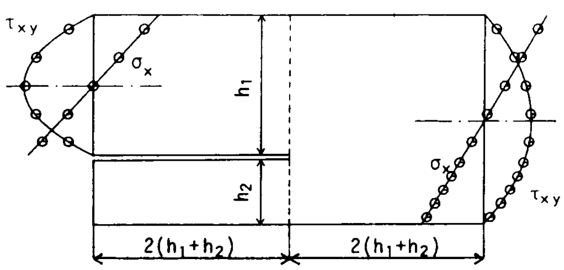


図9　はり断面における応力分布の例
（三点曲げ，$a=180\ \mathrm{mm}$）

(11)と比較するとこの第2項は式(11)の$(H/a)^2$のオーダであり，$a \gg H$の場合には，無視できることがわかる．さらに，$x_R=a-2H$，$x_L=a+2H$を式(28)に代入し式(27)と比較するとJ_τ/J_σはH/aオーダであることがわかる．すなわち両縁に作用するせん断応力のJに対する寄与は小さくJは垂直応力σ_xの分布（曲げモーメント$M \cong Pa/2$）により決まる．このことは，き裂端近傍の特異応力分布もまた，両縁に作用する垂直応力σ_xによってのみ決まることを意味する．

ここで，き裂端がaおよびa'の位置にある場合につき（ただし，$a, a' \gg 2H$），二つの同一形状の仮想試験片を考える．上述の結果よりき裂端近傍の特異応力を求める問題に関しては，縁に作用するせん断応力は無視して考えることができるから，両試験片の境界条件は互に相似であるとみなすことができる（両試験片において，σ_xはそれぞれa, a'に比例する）．したがって，き裂端近傍における特異応力分布も相似となり，G_I/G_{II}は二つの試験片につきほぼ同じであるという結論が得られる．

6. 異種材からなる積層ばりのはく離

3章までに同種材を接着した単純はり理論に基づくエネルギー解放率の解析を行ったが，解析を異種材からなる積層ばりに拡張することは容易である．上下のはりのヤング率をそれぞれE_1, E_2とし上側のはりの断面二次モーメントをI_1とする．はく離部分における曲げ剛性はE_1I_1となり，また接着部分における曲げ剛性は$E_1I_1'+E_2I_2'$と表される．ここでI_1', I_2'は各はりの積層ばり中立軸に対する断面二次モーメントであり

$$E_1I_1'+E_2I_2'=b[E_1\{(h_1-y')^3+y'^3\}+E_2\{(h_1+h_2-y')^3-(h-y')^3\}]/3 \cdots\cdots\cdots (29)$$

ここで

$$y'=\frac{E_1h_1^2+E_2(2h_1+h_2)h_2}{2(E_1h_1+E_2h_2)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (30)$$

3章までの結果において，EI_1の代わりにE_1I_1をEI_2の代わりに式(29)で与えられる$E_1I_1'+E_2I_2'$を用いれば良い．

7. 結　　論

本論文では，同種材を接着した対称はりの三点および四点曲げによる下側のはりの端部から起こるはく離について，単純はり理論に基づく解析を行い有限要素法による数値解と比較した．得られた結論は以下のとおりである．

（1）単純はり理論に基づく解析によって得られたコンプライアンスは有限要素法により得られた値とよく一致している．したがって本論文で行ったはく離のモデル化およびそれへの単純はり理論の適用の妥当性が裏付けられた．

（2）有限要素法解析によりエネルギー解放率Gに占めるモードIとモードIIの両者の割合を決定した．G_I/G_{II}ははく離長さに依存せずほぼ一定の値を取るがこの結果はJ積分の計算により説明される．Gの分離評価を実際の破壊靱性試験に適用することによりG_I, G_{II}をパラメータとするはく離の条件式が確立されることが期待される．

文　　献

(1) Ramkumar, R. L. and Whitcomb, J. D., *ASTM STP*, 876 (1985), 315.
(2) 大草, 鹿児島大学農学部演習林報告, **11** (1983), 1.
(3) 大草, 鹿児島大学農学部学術報告, **33** (1983), 33.
(4) Ashby, M. F., ほか3名, *Proc. R. Soc. Lond.*, A, **398** (1985), 261.
(5) Charalambides, P. G., ほか3名, *J. Appl. Mech.*, **56** (1989), 77.
(6) 戸谷・小野・大納・桐岡, 機論, **55**-516, A (1989), 1877.
(7) 鄭・結城・石川・中野, 機論, **54**-506, A (1988), 1895.
(8) 例えば, Baker, A. A. and Jones, R. 編, *Bonded Repair of Aircraft Structures*, (1988), 31, Martinus Nijhoff Publishers.
(9) Kendall., *Proc. R. Soc. Lond.*, A, **334** (1975), 287.
(10) Wang, S. S., *I. Compos. Mater.*, **17** (1983), 210.
(11) Toya, M., *JSME Int. J.*, Ser. I, **33** (1990), 413.
(12) Armanios, E. A., ほか2名, *ASTM STP*, 893 (1986), 232.