

## 初期たわみを有する片面補強正方形板の自由振動特性\*

### (第1報, 理論解析)

有 富 正 男\*<sup>1</sup>, 角 誠之助\*<sup>2</sup>  
桐 岡 健\*<sup>1</sup>, 戸 谷 眞之\*<sup>1</sup>

## Free Vibration Characteristics of Eccentrically Stiffened Square Plates with an Initial Deflection (1st Report, Theoretical Analyses)

Masao ARITOMI, Seinosuke SUMI,  
Ken KIRIOKA and Masayuki TOYA

Theoretical analyses are presented for free flexural vibrations of eccentrically stiffened rectangular plates with a small initial deflection. Clamped boundary conditions with movable or immovable in-plane edges and the initial deflection with double curvature are assumed. The modal equation is established on the basis of the Galerkin method combined with a multiple-mode approximation and the solution for free nonlinear vibration is obtained by applying the method of successive approximation. Numerical results for stiffened square plates illustrate the influences of stiffening parameters, initial deflections, amplitude and in-plane edge conditions on the natural frequencies.

**Key Words:** Free Vibration, Nonlinear Vibration, Vibration of Continuous System, Eccentrically Stiffened Plate, Initial Deflection

### 1. 緒 言

軽量化が要求される航空機, 船舶, 車両などでは, 必要な剛性を得るために補強薄板構造が用いられることが多く, その基本要素である補強板の振動特性を明らかにすることは構造設計上きわめて重要である。補強平板の振動特性については, これまで多くの研究<sup>(1)~(10)</sup>がなされているが, 実際上重要な初期たわみを考慮した補強曲面板についての研究<sup>(11)(12)</sup>は少なく, さらに大振幅の影響も取り入れた非対称非線形振動に関してなされたものはほとんど見当たらない。

そこで著者らは, 補強材が薄板の両面上で板中央面に関して対称に配置された直交補強板を, 補強材の各剛性を平均化して薄板の剛性に付加する, いわゆる smeared out 法で等価剛性をもつ直交異方性板に置き換え, 板の大たわみ理論により初期たわみを有する補強長方形板の大振幅非線形自由振動に対する支配方程式を導出した<sup>(13)</sup>。さらに, Galerkin 法と逐次近似法を用いて理論解析し, 同時に線形と非線形の振動実験を

行って, 補強材パラメータ, 初期たわみの大きさ, 振幅などが固有振動数や固有振動モードなどの振動特性に及ぼす影響を明らかにした<sup>(13)~(16)</sup>。

本報告ではそれらに引き続いて, まず既報<sup>(13)</sup>の支配方程式を, 偏心補強による曲げと面内伸びの連成を考慮して片面補強長方形板の場合に拡張する。そして, 振動変位を周辺固定の境界条件を満足する多項モードの形で近似して Galerkin 法を適用し, 変位の 2 乗と 3 乗の項を含む連立非線形常微分方程式で表される多自由度系のモード方程式を求める。次に, 片面補強正方形板の線形振動特性を明らかにするために, 9 項モード近似による数値計算を行い, 初期たわみの大きさ, 補強材と板の剛性比などが固有振動数に及ぼす影響を明らかにする。また, 非線形振動に対しては, 1 項モード近似を行ってモード方程式を 1 自由度系の非線形常微分方程式に変換するとともに, 逐次近似法により線形固有振動数に対する非線形固有振動数の比, すなわち振動数比を与える近似式を導出し, 振動数比の振幅依存性に及ぼす初期たわみ, 面内境界条件, 振動モードなどの影響を明らかにする。

### 2. 基 礎 式

両辺の長さがそれぞれ  $a$ ,  $b$ , 板厚が一定値  $h$  の直

\* 平成 2 年 7 月 18 日 第 32 回構造強度に関する講演会において講演, 原稿受付 平成 4 年 6 月 23 日。

\*<sup>1</sup> 正員, 鹿児島大学工学部 (〒890 鹿児島市郡元 1-21-40)。

\*<sup>2</sup> 正員, 久留米工業大学工学部 (〒830 久留米市上津町 2228-66)。

交異方性長方形薄板(以後、本報告ではこれを非補強板と呼ぶ)を考え、この直交異方性の主軸方向は両辺に沿った方向にあるものとする。この薄板が、図1のごとく主軸方向にそれぞれ  $d_s, d_r$  の一定間隔に配置された補強材で、板の片面が全表面にわたって十分密に補強されているものとするれば、この補強板はやはり直交異方性板として取扱うことができる。ところが、薄板が板中央面に関して非対称に補強されている場合、補強板の中立面は非補強板の中央面とは一致しなくなる。本報告では、このような補強板を、補強材1ピッチ間の補強板断面の図心にそれぞれ中立軸をもつ直交異方性板に置き換える。いま図1のように、初期たわみのない状態の補強板の一つの隅角に座標原点をとり、板の各辺に沿って  $x$  軸と  $y$  軸を、それらに垂直に  $z$  軸を定める。そして、非補強板の中央面から補強板断面の図心までの距離を  $c_s, c_r$  とすると、それらは

$$c_s = \frac{e_s A_s}{h d_s + A_s}, \quad c_r = \frac{e_r A_r}{h d_r + A_r} \quad \dots\dots\dots (1)$$

と表される。ただし、 $A_s, A_r$  は補強材の断面積、 $e_s, e_r$  は非補強板の中央面から各補強材の図心までの偏心距離である。

次に、 $z$  軸方向の初期たわみと付加たわみを  $\xi, w$ 、時間を  $t$ 、非補強板の密度を  $\rho$ 、断面力を  $N_x, N_y, N_{xy}$ 、応力関数を  $F$  として

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{x}{b}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \tau = \frac{t}{b^2} \sqrt{\frac{E_{11} h^2}{12 \rho}} \\ (\bar{\xi}, \bar{w}) &= (\xi, w)/h, \quad \bar{F} = 12F/(E_{11} h^3) \\ (\bar{c}_s, \bar{c}_r, \bar{e}_s, \bar{e}_r) &= (c_s, c_r, e_s, e_r)/h \\ (N_\xi, N_\eta, N_{\xi\eta}) &= \frac{12b^2}{E_{11} h^3} (N_x, N_y, N_{xy}) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

のように無次元化すれば、断面力と応力関数の間には

$$N_\xi = \bar{F},_{\eta\eta}, \quad N_\eta = \bar{F},_{\xi\xi}, \quad N_{\xi\eta} = -\bar{F},_{\xi\eta} \quad \dots\dots\dots (3)$$

の関係式が成立し、初期たわみを有する片面補強長方形板の非線形自由振動に対する運動方程式とひずみの適合条件式は

$$\begin{aligned} L(\bar{w}, \bar{F}) &\equiv (1 + \bar{\rho}) \bar{w},_{\tau\tau} + H_\xi \bar{w},_{\xi\xi\xi\xi} \\ &+ 2H_{\xi\eta} \bar{w},_{\xi\xi\eta\eta} + H_\eta \bar{w},_{\eta\eta\eta\eta} - \bar{F},_{\eta\eta} (\bar{w} + \bar{\xi}),_{\xi\xi} \\ &- \bar{F},_{\xi\xi} (\bar{w} + \bar{\xi}),_{\eta\eta} + 2\bar{F},_{\xi\eta} (\bar{w} + \bar{\xi}),_{\xi\eta} \\ &- \Gamma_s \bar{F},_{\xi\xi\xi\xi} - \Gamma_{sr} \bar{F},_{\xi\xi\eta\eta} - \Gamma_r \bar{F},_{\eta\eta\eta\eta} = 0 \quad \dots\dots\dots (4) \\ K_{11} \bar{F},_{\xi\xi\xi\xi} &+ (2K_{12} + K_{33}) \bar{F},_{\xi\xi\eta\eta} + K_{22} \bar{F},_{\eta\eta\eta\eta} \\ &= (\bar{w},_{\xi\eta})^2 - \bar{w},_{\xi\xi} \bar{w},_{\eta\eta} - \bar{\xi},_{\xi\xi} \bar{w},_{\eta\eta} \\ &+ 2\bar{\xi},_{\xi\eta} \bar{w},_{\xi\eta} - \bar{\xi},_{\eta\eta} \bar{w},_{\xi\xi} \\ &- \Gamma_s \bar{w},_{\xi\xi\xi\xi} - \Gamma_{sr} \bar{w},_{\xi\xi\eta\eta} - \Gamma_r \bar{w},_{\eta\eta\eta\eta} \quad \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

で与えられる。これらの式で、コンマの後の添字はそれに関する偏微分を表し、式中の各係数は

$$\left. \begin{aligned} H_\xi &= (1 + \beta_s) + 12 \bar{c}_s^2 - K_{22} \gamma_s^2 - 2K_{12} \gamma_s \gamma_{12} \\ &- K_{11} \gamma_{12}^2 \\ H_\eta &= \left( \frac{E_{22}}{E_{11}} + \beta_r \right) + 12 \frac{E_{22}}{E_{11}} \bar{c}_r^2 - K_{11} \gamma_r^2 \\ &- 2K_{12} \gamma_r \gamma_{21} - K_{22} \gamma_{21}^2 \\ H_{\xi\eta} &= 2 \frac{G}{E_{11}} \{ (1 + \beta_{sr}) + 3(\bar{c}_s + \bar{c}_r)^2 \} \\ &+ \frac{E_{12}}{E_{11}} (1 + 12 \bar{c}_s \bar{c}_r) - K_{22} \gamma_s \gamma_{21} - K_{11} \gamma_r \gamma_{12} \\ &- K_{12} (\gamma_s \gamma_r + \gamma_{12} \gamma_{21}) - 2 \left( \frac{G}{E_{11}} \right)^2 K_{33} \gamma_{sr} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\left. \begin{aligned} K_{11} &= \frac{1 + \alpha_s}{K_0}, \quad K_{22} = \frac{(E_{22}/E_{11}) + \alpha_r}{K_0} \\ K_{12} &= -\frac{E_{12}/E_{11}}{K_0}, \quad K_{33} = \frac{E_{11}/G}{12(1 + \alpha_{sr} + \alpha_{rs})} \\ K_0 &= 12 \left[ (1 + \alpha_s) \left( \frac{E_{22}}{E_{11}} + \alpha_r \right) - \left( \frac{E_{12}}{E_{11}} \right)^2 \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_s &= K_{12} \gamma_s + K_{11} \gamma_{12}, \quad \Gamma_r = K_{12} \gamma_r + K_{22} \gamma_{21} \\ \Gamma_{sr} &= K_{22} \gamma_s + K_{12} (\gamma_{12} + \gamma_{21}) + K_{11} \gamma_r \\ &- 2 \frac{G}{E_{11}} K_{33} \gamma_{sr} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

とおいたものである。ここで、 $G$  は非補強板の横弾性係数で、 $E_{11}, E_{22}, E_{12}$  は非補強板の縦弾性係数  $E_x, E_y$  およびポアソン比  $\nu_{xy}, \nu_{yx}$  を用いて

$$\left. \begin{aligned} E_{11} &= \frac{E_x}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}}, \quad E_{22} = \frac{E_y}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}} \\ E_{12} &= \frac{\nu_{xy} E_x}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}} = \frac{\nu_{yx} E_y}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

で表される。さらに、式(4)の中の  $\bar{\rho}$  は補強材の質量と非補強板の質量との比、すなわち質量比で

$$\bar{\rho} = \left( \frac{\rho_s A_s}{d_s} + \frac{\rho_r A_r}{d_r} - \frac{m_{sr}}{ab} \right) / (\rho h) \quad \dots\dots\dots (10)$$

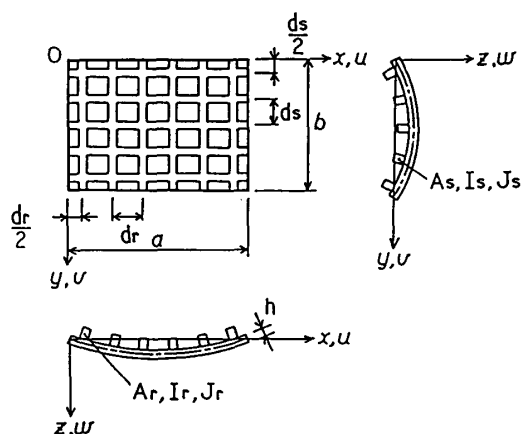


図1 補強材配置と座標系

と表される。また、式(6), (7), (8)の中で、 $\alpha_s, \alpha_r, \alpha_{sr}, \alpha_{rs}$  は補強材の伸び剛性を非補強板のそれで割った伸び剛性比、 $\beta_s, \beta_r$  は同様な曲げ剛性比、 $\beta_{sr}$  はねじり剛性比、 $\gamma_s \sim \gamma_{sr}$  は曲げと面内伸びの無次元連成剛性を表し、それらは

$$\left. \begin{aligned} \alpha_s &= \frac{E_s A_s}{E_{11} h d_s}, \quad \alpha_r = \frac{E_r A_r}{E_{11} h d_r} \\ \alpha_{sr} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{G_s A_s}{G h d_s}, \quad \alpha_{rs} = \frac{1}{2} \cdot \frac{G_r A_r}{G h d_r} \\ \beta_s &= 12 \frac{E_s I_s}{E_{11} h^3 d_s}, \quad \beta_r = 12 \frac{E_r I_r}{E_{11} h^3 d_r} \\ \beta_{sr} &= 3 \left[ \frac{G_s J_s}{G h^3 d_s} + \frac{G_r J_r}{G h^3 d_r} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_s &= 12(\bar{c}_s - \alpha_s(\bar{e}_s - \bar{c}_s)) \\ \gamma_r &= 12 \left\{ \frac{E_{22}}{E_{11}} \bar{c}_r - \alpha_r(\bar{e}_r - \bar{c}_r) \right\} \\ \gamma_{12} &= 12 \frac{E_{12}}{E_{11}} \bar{c}_s, \quad \gamma_{21} = 12 \frac{E_{12}}{E_{11}} \bar{c}_r \\ \gamma_{sr} &= 6[(\bar{c}_s + \bar{c}_r) - 2\alpha_{sr}(\bar{e}_s - \bar{c}_s) - 2\alpha_{rs}(\bar{e}_r - \bar{c}_r)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

で与えられる。ただし、式(10)と式(11)において  $\rho_s, \rho_r$  は補強材の密度、 $m_{sr}$  は  $x$  軸に平行な補強材と  $y$  軸に平行な補強材とが交差する部分の補強材質量、 $E_s$  と  $E_r$  は補強材の縦弾性係数、 $G_s$  と  $G_r$  は補強材の横弾性係数である。また、 $E_s I_s, E_r I_r$  と  $G_s J_s, G_r J_r$  はそれぞれ補強材の補強板断面の中立軸に関する曲げ剛性とねじり剛性を表す。

式(4)と式(5)が、板中央面に関して非対称に補強された補強板が初期たわみを有する場合の非線形自由振動に関する支配方程式であり、これらの方程式は面外方向の慣性力を考慮した Marguerre<sup>(17)</sup> の式を直交異方性板に拡張し、さらに曲げと面内伸びの連成を考慮したものとなっている。補強材が板の両面上で、板中央面に関して対称に配置された両面对称補強板の支配方程式は、式(4)と式(5)で

$$\bar{c}_s = \bar{c}_r = 0, \quad \gamma_s = \gamma_r = \gamma_{12} = \gamma_{21} = \gamma_{sr} = 0 \dots\dots\dots (13)$$

とおけば得られる<sup>(13)</sup>。ただしこの場合、式(10)と式(11)の中の  $A_s, I_s, J_s$  らは板両面の補強材2本一組の各諸量となる。また、Singer と Prucz<sup>(18)</sup> は初期不整を有する片面補強円筒かくの非線形曲げ振動に対して、補強かくの中立面は非補強かくの中央面にある ( $c_s = c_r = 0$ ) と仮定し、また補強材のせん断応力が補強かくの面内せん断力  $N_{xy}$  に及ぼす影響は小さいとして無視して ( $\alpha_{sr} = \alpha_{rs} = 0$ )、同様な形の支配方程式を

求めている。

なお、補強板断面の中立軸の面内変位成分  $u^*, v^*$  とひずみ成分  $\epsilon_x^*, \epsilon_y^*, \epsilon_{xy}^*$  を

$$\left. \begin{aligned} (\bar{u}^*, \bar{v}^*) &= (u^*, v^*)(b/h^2) \\ (\epsilon_x^*, \epsilon_y^*, \epsilon_{xy}^*) &= (\epsilon_x^*, \epsilon_y^*, \epsilon_{xy}^*)(b/h)^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

のように無次元表示すれば、変位成分と応力関数の間には

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x^* &= \bar{u}^*_{,\zeta} + \bar{\xi}_{,\zeta} \bar{w}_{,\zeta} + \frac{1}{2}(\bar{w}_{,\zeta})^2 \\ &= K_{12} \bar{F}_{,\zeta\zeta} + K_{22} \bar{F}_{,\eta\eta} + \Gamma_{22} \bar{w}_{,\zeta\zeta} + \Gamma_r \bar{w}_{,\eta\eta} \\ \epsilon_y^* &= \bar{v}^*_{,\eta} + \bar{\xi}_{,\eta} \bar{w}_{,\eta} + \frac{1}{2}(\bar{w}_{,\eta})^2 \\ &= K_{11} \bar{F}_{,\zeta\zeta} + K_{12} \bar{F}_{,\eta\eta} + \Gamma_s \bar{w}_{,\zeta\zeta} + \Gamma_{11} \bar{w}_{,\eta\eta} \\ \epsilon_{xy}^* &= \bar{u}^*_{,\eta} + \bar{v}^*_{,\zeta} + \bar{\xi}_{,\zeta} \bar{w}_{,\eta} + \bar{\xi}_{,\eta} \bar{w}_{,\zeta} + \bar{w}_{,\zeta} \bar{w}_{,\eta} \\ &= -K_{33} \left( \bar{F}_{,\zeta\eta} - 2 \frac{G}{E_{11}} \gamma_{sr} \bar{w}_{,\zeta\eta} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

の関係が成立する。ただし、 $\Gamma_{11}$  と  $\Gamma_{22}$  は

$$\Gamma_{11} = K_{11} \gamma_r + K_{12} \gamma_{21}, \quad \Gamma_{22} = K_{22} \gamma_s + K_{12} \gamma_{12} \dots (16)$$

である。

### 3. 境界条件と初期たわみ

本報告で取扱う面外境界条件は周辺固定である。したがって、補強長方形板のアスペクト比を

$$\lambda = a/b \dots\dots\dots (17)$$

とおけば

$$\left. \begin{aligned} \zeta = 0, \lambda \text{ において } \bar{w} = 0, \bar{w}_{,\zeta} = 0 \\ \eta = 0, 1 \text{ において } \bar{w} = 0, \bar{w}_{,\eta} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

の境界条件が成立する。次に面内境界条件は、[A] 面内変位が板周辺で拘束を受けない可動周辺と、[B] 面内変位が板周辺で拘束を受ける不動周辺の二とおりを考えると、これらの境界条件は式(15)の関係を使用すれば次のように表される<sup>(19)(8)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \text{[A] 面内可動周辺} \\ \zeta = 0, \lambda \text{ において} \\ P_\zeta = \int_0^1 \bar{F}_{,\eta\eta} d\eta = 0, \quad \bar{F}_{,\zeta\eta} = 0 \\ \eta = 0, 1 \text{ において} \\ P_\eta = \int_0^\lambda \bar{F}_{,\zeta\zeta} d\zeta = 0, \quad \bar{F}_{,\zeta\eta} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

[B] 面内不動周辺

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\lambda \bar{u}^{\circ, \zeta} d\zeta &= \int_0^\lambda \{K_{12}\bar{F}^{\circ, \zeta\zeta} + K_{22}\bar{F}^{\circ, \eta\eta} + \Gamma_{22}\bar{w}^{\circ, \zeta\zeta} \\ &+ \Gamma_r\bar{w}^{\circ, \eta\eta} - \bar{\xi}^{\circ, \zeta}\bar{w}^{\circ, \zeta} - \frac{1}{2}(\bar{w}^{\circ, \zeta})^2\} d\zeta = 0 \\ \int_0^1 \bar{v}^{\circ, \eta} d\eta &= \int_0^1 \{K_{11}\bar{F}^{\circ, \zeta\zeta} + K_{12}\bar{F}^{\circ, \eta\eta} + \Gamma_s\bar{w}^{\circ, \zeta\zeta} \\ &+ \Gamma_{11}\bar{w}^{\circ, \eta\eta} - \bar{\xi}^{\circ, \eta}\bar{w}^{\circ, \eta} - \frac{1}{2}(\bar{w}^{\circ, \eta})^2\} d\eta = 0 \\ \int_0^1 \bar{u}^{\circ, \eta} d\eta &= 0, \int_0^\lambda \bar{v}^{\circ, \zeta} d\zeta = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

ところで、初期たわみとしては全周辺固定の面外境界条件を満足する

$$\bar{\xi}(\zeta, \eta) = \frac{\bar{B}}{4} \left(1 - \cos \frac{2\pi\zeta}{\lambda}\right) (1 - \cos 2\pi\eta) \dots\dots\dots (21)$$

の形を考える。ただし、 $\bar{B}$  は板中央点における初期たわみ  $B$  を非補強板厚さ  $h$  で割った無次元最大初期たわみであり、この  $\bar{B}$  の値は微小初期たわみをもつ補強板としての理論解析に差しつかえない程度の大きさであるとする。

#### 4. 解 法

本報告では、式(21)の余弦曲面の初期たわみを有する補強板の自由振動についての近似解を求めることにする。この場合、生じる振動モードは通常の単純な平板で現れる微小振幅振動と根本的に異なった様相を呈するとは考えられない。また、 $x$  方向と  $y$  方向に同じ補強材を配置した二方向補強正方形板では固有振動数の縮退が起こる。そこで振動変位  $\bar{w}$  は、それぞれ面外境界条件を満足し、かつ微小振動の場合と同様な固有モード  $X_{mn}$  と  $X_{nm}$  を重ね合わせた

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}(\zeta, \eta, \tau) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_{mn}(\tau) Z_{mn}[X_{mn}(\zeta, \eta) \\ &+ k_{mn}X_{nm}(\zeta, \eta)] \\ Z_{mn} &= \frac{1}{[X_{mn}(\zeta, \eta) + k_{mn}X_{nm}(\zeta, \eta)]_{\max}} \\ X_{mn}(\zeta, \eta) &= \left[ \cos \frac{(m-1)\pi\zeta}{\lambda} - \cos \frac{(m+1)\pi\zeta}{\lambda} \right] \\ &\times [\cos(n-1)\pi\eta - \cos(n+1)\pi\eta] \\ & \quad m, n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

の形に仮定する。ただし、 $\bar{A}_{mn}(\tau)$  は最大振動変位  $A_{mn}(\tau)$  を非補強板の厚さ  $h$  で割った無次元変位で未知の時間関数となり、 $k_{mn}$  は任意の定数である。この式(22)の振動変位と式(21)の初期たわみを適合条件式(5)に代入し、面内境界条件(19)もしくは(20)を適用して適合条件式の一般解、すなわち応力関数  $\bar{F}$  を求

める。

次に、得られた応力関数とたわみ関数(21)、(22)を運動方程式(4)に代入し、Galerkin法を適用すると

$$\int_0^\lambda \int_0^1 L(\bar{w}, \bar{F}) [X_{ij}(\zeta, \eta) + k_{ij}X_{ji}(\zeta, \eta)] d\zeta d\eta = 0 \dots\dots\dots (23)$$

の条件式から

$$\left. \begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Z_{mn} q_{ij} \bar{A}_{mn, \tau\tau} &+ \frac{\pi^4}{1 + \bar{\rho}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Z_{mn} \left\{ h_{ij} \right. \\ &+ {}^1\chi_{ij} \bar{B} + ({}^1\mu_{ij} + \Lambda \cdot {}^1v_{ij}) \bar{B}^2 \bar{A}_{mn} \\ &+ \sum_{M=1}^{\infty} \sum_{N=1}^{\infty} Z_{MN} \left[ {}^2\chi_{ij} + ({}^2\mu_{ij} + \Lambda \cdot {}^2v_{ij}) \bar{B} \right] \bar{A}_{mn} \bar{A}_{MN} \\ &+ \left. \sum_{K=1}^{\infty} \sum_{L=1}^{\infty} Z_{KL} ({}^3\mu_{ij} + \Lambda \cdot {}^3v_{ij}) \bar{A}_{mn} \bar{A}_{MN} \bar{A}_{KL} \right\} \bar{A}_{mn} \end{aligned} \right\} = 0 \dots\dots\dots (24)$$

で表される多自由度系のモード方程式を得る。ここで、 $q_{ij}$  は定数、 $h_{ij}$  は曲げ剛性比  $\beta_s, \beta_r$  とねじり剛性比  $\beta_{sr}$ 、さらには伸び剛性比  $\alpha$  と無次元連成剛性  $\gamma$  を含む項である。また、 ${}^1\chi_{ij}, {}^2\chi_{ij}$  は無次元連成剛性  $\gamma$  に、 ${}^1\mu_{ij} \sim {}^3\mu_{ij}$  は伸び剛性比  $\alpha$  に、 ${}^1v_{ij} \sim {}^3v_{ij}$  は面内境界条件に関係する項であるが、それらの詳細は紙面の都合で省略する。さらにまた、 $\Lambda$  は

$$\left. \begin{aligned} [A] \text{ 面内可動周辺: } \Lambda &= 0 \\ [B] \text{ 面内不動周辺: } \Lambda &= 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

の値をとる。したがって、モード方程式(24)より初期たわみを有する補強長方形板の自由振動特性は、補強材と板の曲げ、面内伸び、ねじりの各剛性比や質量比、無次元連成剛性などの補強材パラメータと、初期たわみの大きさ、面内境界条件、補強材の配置様式など多くの因子に依存することがわかる。

#### 5. 数 値 計 算

数値計算例では、非補強板はポアソン比  $\nu = 0.3$  の等方性正方形板であるとして

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= 1, \nu_{xy} = \nu_{yx} = \nu = 0.3 \\ E_{11} = E_{22} &= \frac{E}{1 - \nu^2}, E_{12} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2}, G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

のもとで計算を行った。また、補強材の材質は非補強板のそれとは一般に異なるとしたが、ポアソン比のみについて補強材が  $\nu_s \doteq \nu, \nu_r \doteq \nu$  の値をもつ等方性材とした。なお、このようにおくと、式(11)から伸び剛性比  $\alpha_{sr}$  と  $\alpha_{rs}$  の値は  $\alpha_s, \alpha_r$  によって次のように与えられる。

$$\alpha_{sr} \doteq \frac{\alpha_s}{2(1 - \nu^2)}, \alpha_{rs} \doteq \frac{\alpha_r}{2(1 - \nu^2)} \dots\dots\dots (27)$$

さらに、式(22)の振動変位  $\bar{w}$  の中の  $k_{mn}$  は

$$\left. \begin{aligned}
 [1] \text{ 二方向補強正方形板 } (\alpha_s = \alpha_r, \beta_s = \beta_r) \\
 \left. \begin{aligned}
 k_{13} = 1, k_{31} = -1, \text{ それ以外は } k_{mn} = 0 \\
 [2] \text{ 一方向補強正方形板: } k_{mn} = 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)
 \end{aligned}$$

とおいた。

**5.1 線形振動** 長方形板の固有振動モードは節線の位置により四つのタイプに分類され、その対称性を記号でSS, SA, AS, AAのように表す。ただし、Sは板の中心軸に関して対称なモードを意味し、Aは逆対称なモードを示す。また、数値計算では式(22)の振動変位を9項モード近似の形で仮定し、その振動変位に対応する線形振動のモード方程式は、式(24)の $\bar{A}_{mn}\bar{A}_{MN}$  および  $\bar{A}_{mn}\bar{A}_{MN}\bar{A}_{KL}$  の項は微小であるとして

$$\sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 Z_{mn} \left[ q_{ij} \bar{A}_{mn, \tau\tau} + \frac{\pi^4}{1+\bar{\rho}} \left[ h_{ij} + {}^1x_{ij} \bar{B} + ({}^1\mu_{ij} + \Lambda \cdot {}^1v_{ij}) \bar{B}^2 \right] \bar{A}_{mn} \right] = 0 \dots\dots\dots (29)$$

と表される。この式(29)は4種類の固有振動モードに対して、それぞれ未知の時間関数 $\bar{A}_{mn}(\tau)$ に関する連立線形常微分方程式を形成し、これらを解くと線形固有振動数 $\bar{\omega}_{mn}$ が得られ、同時に $\bar{\omega}_{mn}$ に対応する固有振動モードが求められる。

ところで、モード方程式(29)の中の $\bar{A}_{mn}$ の項の係数は、面内可動周辺( $\Lambda=0$ )の場合よりも面内不動周辺( $\Lambda=1$ )の場合が大きくなり、また初期たわみが大きな値ほど大きくなる。したがって、線形固有振動数は面内不動周辺の場合が面内可動周辺の場合よりも高

い値となり、しかも初期たわみが大きな補強板ほど高くなるものと思われる。ただし、式(29)の中の係数 ${}^1v_{ij}$ は、 $m, n, i, j = 1, 3$ 以外の値のときは常に0となるため、振動変位を式(22)の形で仮定すれば、逆対称形を伴う振動モードの場合の線形固有振動数の値は式(19)と式(20)の面内境界条件には無関係となる。これらのことを具体的に示したのが図2と図3で、図2は二方向補強正方形板の、図3は一方向補強正方形板のそれぞれの代表的なモードの、板中心点の初期たわみに対する線形固有振動数の変化を、縦軸に非補強板の振動数パラメータで無次元化した振動数 $\bar{\omega} = \omega b^2 \sqrt{\rho h/D}$ 、横軸に最大初期たわみ $B$ を非補強板厚さ $h$ で割った無次元初期たわみ $\bar{B} = B/h$ をとって示したものである。ただし、 $D$ は補強材がないと考えたときの非補強板の曲げ剛性であり、また無次元連成剛性 $\gamma$ の値は式(12)で計算でき、それらの値は図2の二方向補強板では $\gamma_s = \gamma_r = 0.6, \gamma_{12} = \gamma_{21} = 1.2, \gamma_{sr} = 0.3$ 、図3の一方向補強板では $\gamma_s = 0.6, \gamma_{12} = 2.2, \gamma_{sr} = 0$ となる。なお、図中には各計算結果に対応する振動モードの節線様式も一緒に示してある。これらの図をみると、線形固有振動数の値は初期たわみが大きな補強板ほど高くなり、その増加の度合は振動モードによって異なることがわかる。

ところで、モード方程式(29)で係数 $h_{ij}$ は初期たわみ $\bar{B}$ に関係しない項で、これは初期たわみのない補強板の線形固有振動数を規定する。そして、曲げ剛性

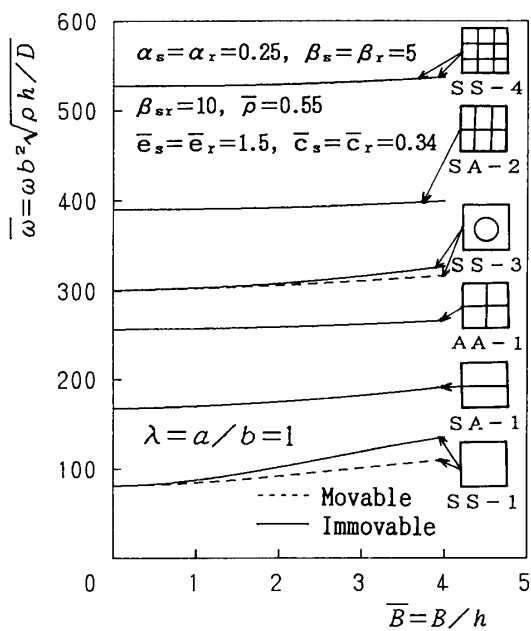


図2 線形固有振動数 $\bar{\omega}$ と初期たわみ $\bar{B}$ の関係 (二方向補強正方形板)

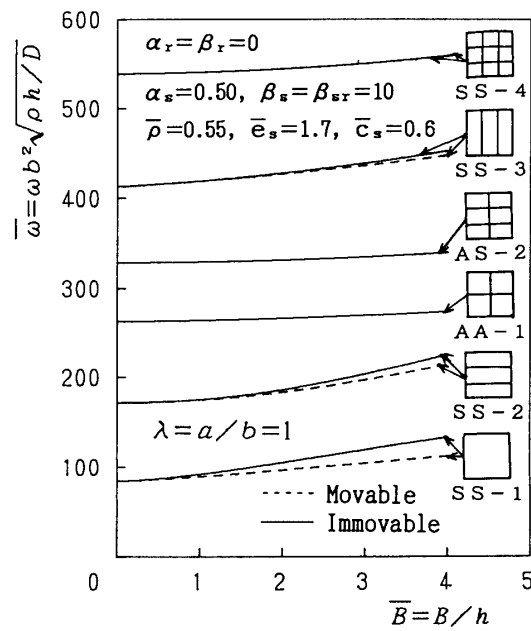


図3 線形固有振動数 $\bar{\omega}$ と初期たわみ $\bar{B}$ の関係 (一方向補強正方形板)

比  $\beta_s, \beta_r$  とねじり剛性比  $\beta_{sr}$  はこの  $h_{ij}$  の項のみに含まれ、しかも  $h_{ij}$  の項は  $\beta_s, \beta_r$  および  $\beta_{sr}$  が大きくなるにつれて増加する。したがって、式(29)の中の  $\bar{A}_{mn}$  の項の係数は、 $\beta_s, \beta_r$  および  $\beta_{sr}$  が大きく、しかも質量比  $\bar{\rho}$  が小さな値ほど大きくなり、その結果、線形固有振動数  $\bar{\omega}$  は曲げ剛性比  $\beta_s, \beta_r$  とねじり剛性比  $\beta_{sr}$  が大きく、質量比  $\bar{\rho}$  が小さな補強板ほど高くなることわかる。また、式(29)において  $\bar{B}$  および  $\bar{B}^2$  の掛かった  ${}^1x_{ij}, {}^1\mu_{ij}, {}^1v_{ij}$  の項には伸び剛性比  $\alpha_s, \alpha_r$  が含まれており、このことは断面力の存在を表す。したがって、初期たわみを有する場合には線形振動においても断面力が発生し、線形固有振動数  $\bar{\omega}$  は初期たわみのない場合よりも高くなるものと思われる。このことを明瞭にするために、一方向補強正方形板の初期たわみによる基本次の線形固有振動数の変化を、伸び剛性比  $\alpha_s$  をパラメータとして図示したものが図4である。この図から、線形固有振動数  $\bar{\omega}$  の値は、初期たわみがない場合には  $\alpha_s$  の値とは無関係にほぼ一定になり、初期たわみを有する場合には  $\bar{B}$  の値が大きくなるにつれて伸び剛性比  $\alpha_s$  の大きな補強板ほど高くなることわかる。

**5.2 非線形振動** 本報告では、初期たわみを有する補強板の大振幅非線形振動問題を明らかにするため、固有振動数を振幅の項で表す逐次近似法による近似解によって検討する。この方法は1自由度系の非線形常微分方程式の近似解法であるので、振動変位  $\bar{w}$  を一モードの形で表す必要がある。この振動変位に対するモード方程式は、多自由度系の非線形常微分方程式(24)で

$$m = M = K = i \equiv m, \quad n = N = L = j \equiv n \quad \dots (30)$$

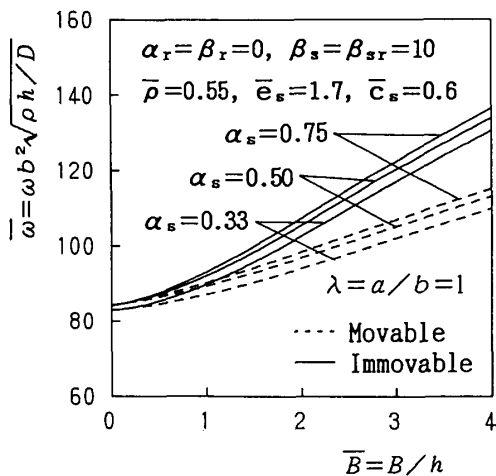


図4 線形固有振動数  $\bar{\omega}$  と初期たわみ  $\bar{B}$  の関係 (伸び剛性比の影響, SS-1)

とおけば

$$q_{mn} \bar{A}_{mn,rr} + \frac{\pi^4}{1 + \bar{\rho}} \left[ (h_{mn} + {}^1x_{mn} \bar{B} + ({}^1\mu_{mn} + \Lambda \cdot {}^1v_{mn}) \bar{B}^2) \bar{A}_{mn} + \{ {}^2x_{mn} + ({}^2\mu_{mn} + \Lambda \cdot {}^2v_{mn}) \bar{B} \} \times Z_{mn} \bar{A}_{mn}^2 + ({}^3\mu_{mn} + \Lambda \cdot {}^3v_{mn}) Z_{mn}^2 \bar{A}_{mn}^3 \right] = 0 \quad \dots (31)$$

のような1自由度系の非線形常微分方程式の形で得られる。この式(31)からわかるように、初期たわみを有する補強板が大振幅曲げ振動を行う場合のモード方程式は、振動変位  $\bar{A}_{mn}$  の2乗の項と3乗の項を含んでいる。このうち  $\bar{A}_{mn}$  の2乗の項は復元力を非対称とするため、初期たわみのたわみ線から曲率の増加する方向への振幅  $\bar{A}_1$  と減少する方向への振幅  $\bar{A}_2$  とでは、その大きさが異なったものとなる。そこでここでは、振動変位  $\bar{A}_{mn}(\tau)$  を曲率の減少する方向への振幅  $\bar{A}_2$  のべき級数で展開して逐次近似法を使用すれば、式(31)の近似解が求められ<sup>(13)</sup>、そしてこのとき、非線形固有振動数  $\omega^*$  と線形固有振動数  $\omega$  との比、すなわち振動数比  $\omega^*/\omega$  は

$$\frac{\omega^*}{\omega} = \left[ 1 + \left\{ \frac{3}{4} \cdot \mu_2 - \frac{5}{6} (\mu_1)^2 \right\} \bar{A}_2^2 - \left\{ \frac{1}{2} \cdot \mu_1 \cdot \mu_2 - \frac{5}{9} (\mu_1)^3 \right\} \bar{A}_2^3 + \left\{ -\frac{3}{128} (\mu_2)^2 + \frac{185}{96} (\mu_1)^2 \mu_2 - \frac{235}{288} (\mu_1)^4 \right\} \bar{A}_2^4 - \dots \right]^{1/2} \quad \dots (32)$$

で近似的に表される。ただし、 $\mu_1$  と  $\mu_2$  は振動の非線形性を表すパラメータで

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= \frac{\{ {}^2x_{mn} + ({}^2\mu_{mn} + \Lambda \cdot {}^2v_{mn}) \bar{B} \} Z_{mn}}{h_{mn} + {}^1x_{mn} \bar{B} + ({}^1\mu_{mn} + \Lambda \cdot {}^1v_{mn}) \bar{B}^2} \\ \mu_2 &= \frac{({}^3\mu_{mn} + \Lambda \cdot {}^3v_{mn}) Z_{mn}^2}{h_{mn} + {}^1x_{mn} \bar{B} + ({}^1\mu_{mn} + \Lambda \cdot {}^1v_{mn}) \bar{B}^2} \end{aligned} \right\} \quad \dots (33)$$

とおいたものである。式(32)に含まれる係数  $\mu_1, \mu_2$  は、質量比  $\bar{\rho}$  を含まず、曲げ剛性比  $\beta_s, \beta_r$  とねじり剛性比  $\beta_{sr}$  を分母にのみもつ式となる。したがって、振動数比  $\omega^*/\omega$  の値は  $\bar{\rho}$  には無関係となり、また  $\beta_s, \beta_r$  と  $\beta_{sr}$  の大きな補強板ほど、振幅  $\bar{A}_2$  が振動数比  $\omega^*/\omega$  の値に及ぼす影響は小さくなる<sup>(14)</sup>。

次に、固有振動数の振幅依存性が振動モードによってどのように変化するかを調べるために示したものが図5から図8の四つの図で、点線と実線はそれぞれ面内可動周辺と面内不動周辺の、式(32)で  $\bar{A}_2$  の4乗の項までとって計算した結果である。またこれらの図は、補強正方形板が  $\bar{B} = 0, 2, 4$  の初期たわみをもつ場合の、振幅  $\bar{A}_2$  に対する振動数比  $\omega^*/\omega$  の値を示したものである。これらの図から、いずれの振動モードにおいても  $\omega^*/\omega$  の値は、面内可動周辺の場合が面内不動周辺

の場合よりも1に近い値をとり、振動数比  $\omega^*/\omega$  の振幅依存性は、面内不動周辺の場合が面内可動周辺の場合よりも大きいことがわかる。

ところで、線形固有振動数  $\omega$  の値は振幅  $\bar{A}_2$  とは無関係に一定である。よって、図5の二方向補強正方形板、図6の一方方向補強正方形板のいずれの場合も基本振動(SS-1)では、初期たわみのない( $\bar{B}=0$ )補強平板の振動は、固有振動数が振幅の増加につれて高くなるハードばねタイプとなるが、初期たわみ  $\bar{B}$  が大きな補強板の振動は、初期たわみのない場合とは異なり固有振動数が振幅の増加につれて低下するソフトばねタイプとなっている。ただし、初期たわみを有する補強板の基本振動においても、振幅がさらに増大していくとハードばねタイプの振動へ反転していくものと思

われる<sup>(15)(20)</sup>。また、対称なSSモードでも振動次数が高くなると、図7に示すように計算した初期たわみの大きさの範囲では、その振動はハードばねタイプとなり、しかも振動数比  $\omega^*/\omega$  の振幅依存性は小さく、初期たわみ  $\bar{B}$  の大きさが  $\omega^*/\omega$  の値に及ぼす影響もかなり小さくなる。

次に、逆対称形を伴うSA, AS, AAモードの場合、モード方程式(31)の中の  $\bar{A}_{mn}^2$  の係数  ${}^2\mu_{mn}$  と  ${}^2\nu_{mn}$  が0となり、 ${}^2\chi_{mn}$  もほぼ0に近い値をとる。このことから、逆対称形を伴うモードの振動はハードばねタイプとなり、しかも曲率の減少方向への振幅  $\bar{A}_2$  と増加方向への振幅  $\bar{A}_1$  の大きさは、初期たわみの有無に関係なく常にほぼ等しいものとなる。このことを明示するために、図6と同じ剛性比をもつ一方方向補強正方形板

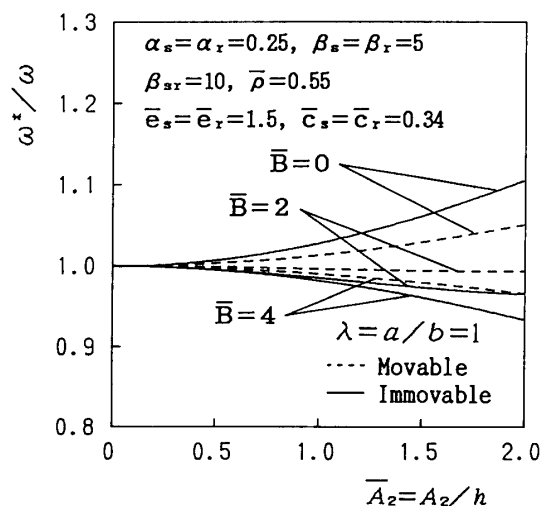


図5 振動数比  $\omega^*/\omega$  と振幅  $\bar{A}_2$  の関係 (二方向補強正方形板, SS-1)

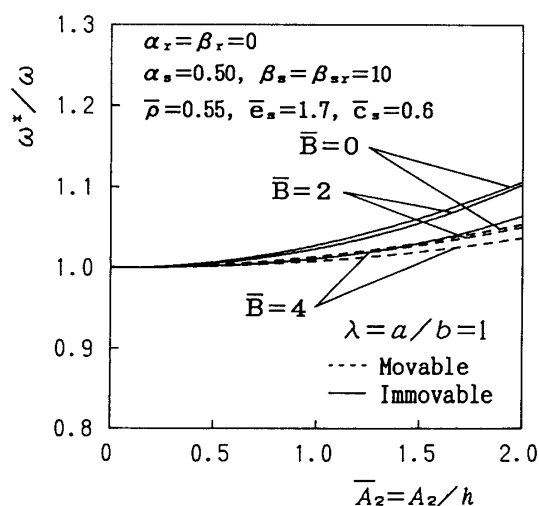


図7 振動数比  $\omega^*/\omega$  と振幅  $\bar{A}_2$  の関係 (一方方向補強正方形板, SS-3)

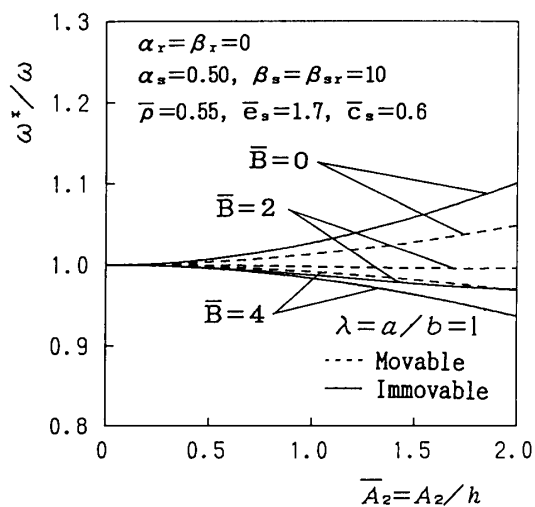


図6 振動数比  $\omega^*/\omega$  と振幅  $\bar{A}_2$  の関係 (一方方向補強正方形板, SS-1)

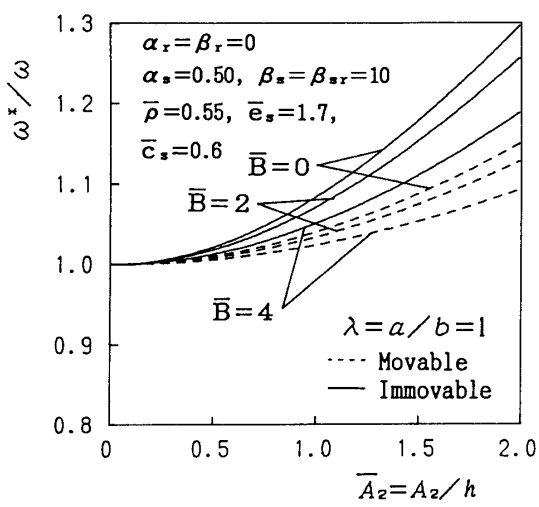


図8 振動数比  $\omega^*/\omega$  と振幅  $\bar{A}_2$  の関係 (一方方向補強正方形板, AS-1)

のAS-1モードについて図示したものが図8で、この図をみると、逆対称形を伴うモードの振動はやはりハードばねタイプとなり、しかも振動数比 $\omega^*/\omega$ は初期たわみ $\bar{B}$ の値が大きな補強板ほど1に近い値をとることがわかる。

## 6. 結 言

本報告は、初期たわみを有する片面補強長方形板の大振幅非線形自由振動に関する解析的手法を導出し、余弦曲面の初期たわみを仮定した正方形板の数値計算例により各種パラメータによる振動特性の変化を明らかにしたものである。得られた結果を要約すると次のとおりである。

(1) 初期たわみを有する補強長方形板の自由振動特性は、補強材と板の曲げ、面内伸び、ねじりの各剛性比や質量比、無次元連成剛性などの補強材パラメータと、初期たわみの大きさ、面内境界条件、補強材の配置様式など多くの因子に依存する。

(2) 線形固有振動数は初期たわみが大きな補強板ほど高くなり、その増加の割合は振動モードによって異なる。

(3) 線形固有振動数は、面内不動周辺の場合が面内可動周辺の場合よりも常に高い値となる。ただし、板の中心軸に関して逆対称な形を伴うSA, AS, AAモードでは、面内境界条件には無関係である。

(4) 非線形固有振動数 $\omega^*$ を線形固有振動数 $\omega$ で割った振動数比 $\omega^*/\omega$ の振幅依存性は、面内不動周辺の場合が面内可動周辺の場合よりも大きくなる。

(5) 対称形のSSモードの振動は、モード次数と初期たわみの大きさによって、非線形固有振動数 $\omega^*$ が振幅の増加につれて低下するソフトばねタイプや高くなるハードばねタイプとなる。

(6) 逆対称形を伴うモードの振動は常にハードばねタイプとなり、しかも振動数比 $\omega^*/\omega$ の振幅依存性は初期たわみ $\bar{B}$ の値が小さな補強板ほど大きくなる。

## 文 献

- (1) 栖原, 造船協会会報, 78(1947), 65.
- (2) Hoppmann, W. H., II and Magness, L. S., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 24(1957), 526.
- (3) 川上, 造船協会誌, 410(1963), 391.
- (4) 成岡・ほか3名, 土木論, 139(1967), 1.
- (5) 清水・佐藤, 造船論, 123(1968), 224.
- (6) Long, B. R., *Shock Vib. Bull.*, 38(1968), 44.
- (7) Madsen, N. F., *J. Ship Res.*, 22-2 (1978), 100.
- (8) Prathap, G. and Varadan, T. K., *J. Sound Vib.*, 57-4 (1978), 583.
- (9) 大富, 機論, 50-456, C(1984), 1381.
- (10) Nicholson, J. W., *AIAA J.*, 24-3(1986), 485.
- (11) Smith, C. S., *J. Ship Res.*, 12(1968), 249.
- (12) 道本・広渡・村上, 造船論, 154(1983), 329.
- (13) 角・有富・桐岡, 航宇誌, 36-416(1988), 418.
- (14) 角・有富・竹内, 航宇誌, 38-439(1990), 405.
- (15) 角・有富・桐岡, 航宇誌, 38-443(1990), 660.
- (16) Sumi, S. and Aritomi, M., *Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci.*, 34-104(1991), 71.
- (17) Marguerre, K., *Proc. 5th Int. Cong. Appl. Mech.*, (1938), 93.
- (18) Singer, J. and Prucz, J., *J. Sound Vib.*, 80-1(1982), 117.
- (19) Yamaki, N., *Z. Angew. Math. Mech.*, 41(1961), 501.
- (20) 田村・岡部・末岡, 機論, 57-537, C(1991), 1431.