

面外せん断クラックのすべり線発生を 伴う安定成長の初期段階[†]

戸谷 眞之* 桐岡 健**

The Initial Stage of the Mode III Stable Crack Growth Accompanied by the Formation of Slip-Lines

by

Masayuki TOYA* and Ken KIRIOKA**

The early stage of the stable mode III crack growth is theoretically analyzed. A tip of the initial crack is blunted by screw dislocations continuously distributed on two slip-planes inclined at equal angles to the crack. It is assumed that at some critical load level the crack starts to grow and that, with a small increase in the applied load, the crack extends over a small distance and then stops due to the formation of a secondary pair of slip-lines. The boundary value problem relevant to this growth step is formulated by use of the notion of the effective friction stress and solved. The increment of the crack shearing displacement at the site of the initial crack tip is expressed as a function of the crack growth distance and the increment of the applied load. It is found that the form of the function is identical with that previously obtained by J. R. Rice and E. P. Sorensen.

キー・ワード：面外せん断クラック，安定成長，すべり帯，き裂せん断変位

1 はじめに

Evans¹⁾ は方位が良くそろった多結晶体のケイ素鋼におけるクラックの安定成長の実験を行った。その実験によると，進展開始前の初期クラックの降伏領域は先端からクラック面に対し約±55°傾いた2本の対称なすべり線に集中する。また，クラックの進展に伴い，最初のすべり線に平行な多数のすべり線の発生が認められる。

このような互いに平行なすべり線を伴うクラック進展の解析は最初 Kanninen²⁾ らにより行われた。彼らは1本のすべり線を1個の巨大転位におきかえるという近似を用いた。より厳密な結果を得るには，すべり線を連続分布する転位群におきかえるモデルを扱う必要がある。一組のすべり線のみを有する初期クラックについてはこのモデルは Vitek³⁾、Riedel⁴⁾ により解析された。くり返し応力下の多数の平行なすべり線を伴うクラックの解析は，Homma⁵⁾ らによりなされた。

以上の解析は，モードI型クラックに関するものであり実際的である。しかし，数値解析に頼らざるを得ないので，クラック進展を特長づけるパラメータ間の関係について明確な描像を得にくいといううらみがある。

著者の一人は先に面外せん断応力のもとにある2本のすべり線により降伏しているクラックを扱った。き

裂せん断変位^{*1}，すべり線の長さ，および外部応力との関係式が閉じた形で得られた。この結果は Vitek や Riedel の結果と良く対応し，面外せん断型モデルがモードI型の近似として有効であることがわかった。このモデルはさらに拡張され⁷⁾，鈍化した初期クラックの先端から鋭いクラックが進展を開始する問題が議論された。

本報告では上述の解析をより発展させ，2本のすべり線により降伏している面外せん断クラックが微小距離進展し，しかも先端に二次すべり線を伴う場合を扱う。2次すべりによるき裂せん断変位の増分は外部応力の増分とき裂進展量の関数として表され，この関数の形は Rice⁸⁾ らがブラントルのすべり線場を仮定して，安定成長をするモードI型クラックに関して得た結果と係数を除けば同じであることが示される。

2 初期クラックの応力関数

初期面外せん断クラックのモデルを Fig.1 に示す。無限体のなかに長さ $2c$ のクラックがある。原点がクラックの先端に一致する x, y 座標系を用いる。クラック面は， $-2c \leq x \leq 0, y = \pm 0$ で，一端は z 軸（紙面に垂直）と一致する。表面で応力は0，すなわち

*1 モードI型クラックに使用されているき裂開口変位 (COD) に対し，モードIII型においては，き裂せん断変位 (CSD) なる語を用いる。

† 原稿受理 昭和62年1月12日 Received Jan.12, 1987

* 正会員 鹿児島大学工学部 鹿児島市郡元, Faculty of Engineering, Kagoshima University, Koorimoto, Kagoshima

** 鹿児島大学工学部 鹿児島市郡元, Faculty of Engineering, Kagoshima University, Koorimoto, Kagoshima

$\tau_{yz}=0$ である。無限遠での外部応力 $\tau_{yz}=\tau^\infty$ のもとで系は面外せん断変形をし、クラック先端からバーガーベクトルが z 軸に平行ならせん転位群が放出される。放出された転位は同一すべり面上に平行に並んでいる。すべり面と $z=0$ 面の交線を以下すべり線と呼ぶ。図のように、2本の長さ L のすべり線が x 軸に对称に $\beta\pi$ の角度で出ているとする。転位は連続的に分布していると仮定し、また転位に対する抵抗力を τ_0 とする。 τ_0 はマクロな塑性論におけるせん断降伏応力と同一と見なすことができる。座標系を反時計方向に $\beta\pi$ だけ回転させ、すべり線と x' 軸が一致するような x', y' 軸を取り、この座標系での応力成分を $\tau_{x'z'}$, $\tau_{y'z'}$ としよう。このとき、上の条件はすべり線上で $\tau_{y'z'}=\tau_0$ となる。同様に下のすべり線に沿って x'' 軸をとると $\tau_{y''z''}=\tau_0$ 。

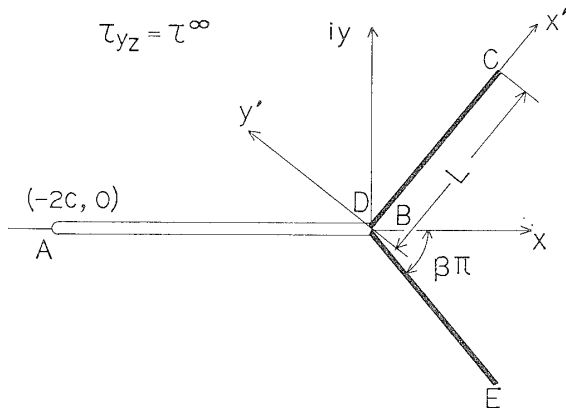


Fig. 1. Schematic picture of the crack and inclined slip-lines. The crack extends over $-2c < x < 0$, $-\infty < z < \infty$.

変位の成分としては z 方向の成分 w のみがある。すべり線の上で w は不連続であり、 w の跳びはすべり線の先端で0でクラック先端で最大となる。2本のすべり線によるクラック先端での変位の跳びの合計をき裂せん断変位 (CSD) と呼ぶ。クラックはそのうえで変位の跳びがある面として定義されるから、この意味ではすべり線は「内圧」 $\tau_{y'z'}=\tau_0$, $\tau_{y''z''}=\tau_0$ を受けるクラックに等しい。結局 Fig.1 のモデルは、部分的に内圧を受ける枝分れクラックと見ることができる。境界条件をまとめると

$$\left. \begin{aligned} & \text{無限遠方で } \tau_{yz}=\tau^\infty \\ & 0 \leq x' \leq L, y' = \pm 0 \text{ で } \tau_{y'z'}=\tau_0 \\ & 0 \leq x'' \leq L, y'' = \pm 0 \text{ で } \tau_{y''z''}=\tau_0 \\ & -2c \leq x \leq 0, y = \pm 0 \text{ で } \tau_{yz}=0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

さらにすべり線の先端で応力は有界という条件が課せられる。

周知のように、変位は応力関数 $\varphi(z)$ (ただし、 $z = x + iy$) の実数部、 $w = \text{Re}\varphi(z)$ と書ける。応力成分は

*2 混同の恐れがないので、 τ_{xz} 等の z と同じ記号を用いる。

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = \mu \frac{d\varphi(z)}{dz} = \mu \frac{\partial w}{\partial x} - i\mu \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2)$$

ここで μ は剛性率を表す。また、 (x', y') 座標系における応力成分は

$$e^{-i\beta\pi}(\tau_{x'z'} - i\tau_{y'z'}) = \mu \frac{d\varphi(z)}{dz} \quad (3)$$

問題は境界条件(1)を満足する応力関数を見出すことに帰着される。以下に等角写像法を用いて $\varphi(z)$ を求める。

さて、Fig.1 のクラックとすべり線からなる Y 字形の切れ目を ζ 面内の単位円の円周に移す写像関数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} z = m(\zeta) &= l\zeta^{-1}(\zeta-1)^{2\beta}(\zeta-e^{i\alpha})^{1-\beta}(\zeta-e^{-i\alpha})^{1-\beta}, \\ & \text{ただし } \zeta = t + iu, \end{aligned} \quad (4)$$

また l は定数である。実際 $\zeta = e^{i\theta}$ とおいて式(4)に代入すると

$$\left. \begin{aligned} z &= 4lf(\theta)e^{i\beta\pi} & 0 \leq \theta \leq \alpha \\ z &= 4lf(\theta)e^{i\pi} & \alpha \leq \theta \leq 2\pi - \alpha \\ z &= 4lf(\theta)e^{-i\beta\pi} & 2\pi - \alpha \leq \theta \leq 2\pi \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここで

$$f(\theta) = \left| \sin \frac{1}{2}\theta \right|^{2\beta} \left| \sin \frac{1}{2}(\alpha - \theta) \right|^{1-\beta} \left| \sin \frac{1}{2}(\theta + \alpha) \right|^{1-\beta} \quad (6)$$

となり、 θ が 0 から 2π まで変化するに伴い、 z は Fig.1 の Y 字型を描くことが確かめられる。すべり線の先端 C に対応する偏角 θ_L は式(5)を θ で微分して 0 とおいて得られる。すなわち

$$\sin^2(\theta_L/2) = \beta \sin^2(\alpha/2) \quad (7)$$

また、クラックの長さ $2c$ 、すべり線の長さ L は α , β により以下のように表される。

$$2c = 2l^{1+\beta}(1 + \cos \alpha)^{1-\beta} \quad (8)$$

$$L = 4l\beta_0 \sin^2(\alpha/2) \quad (9)$$

ただし

$$\beta_0 = \beta^\beta(1-\beta)^{1-\beta}$$

ζ 面内の円柱座標系 (r, θ) に関する応力成分を p_{rN} , $p_{\theta N}$ としよう。添字 N は ζ 面に垂直な方向を意味する。式(3)を参照すると ζ 面において

$$\mu d\varphi/d\zeta = \mu\varphi'(\zeta) = (p_{rN} - ip_{\theta N})e^{-i\theta} \quad (10)$$

式(3), (10)を関係式

$$\mu\varphi'(z) = \mu\varphi'(\zeta)/m'(\zeta) \quad (11)$$

に代入すると

$$p_{rN} - ip_{\theta N} = e^{-i\beta\pi}\zeta m'(\zeta)(\tau_{x'z'} - i\tau_{y'z'}) \quad (12)$$

が得られる。上のすべり線に対応する ζ に関しては

$$\arg m'(\zeta) = \arg dz - \arg d\zeta = \beta\pi - \theta - \pi/2$$

であるから $e^{-i\beta\pi}\zeta m'(\zeta)$ は純虚数となる。したがって式(12)から

$$p_{rN} = -ie^{-i\beta\pi}\zeta m'(\zeta)\tau_{y'z'} = -i\tau_0 e^{-i\beta\pi}\zeta m'(\zeta) \quad (13_1)$$

下のすべり線に対しても同様に

$$p_{rN} = -i\tau_0 e^{i\beta\pi}\zeta m'(\zeta) \quad (13_2)$$

$|z| \rightarrow \infty$ で、式(4)は $z=l\zeta$ となり、したがって $\tau_{yz} = \tau^\infty$ という条件は $p_{uN}^\infty = l\tau^\infty$ となる。

このようにして、境界条件(1)は無遠で外部応力 $p_{uN}^\infty = l\tau^\infty$ が働き、単位円の周上の一部 ($0 \leq \theta \leq \alpha$, $-\alpha \leq \theta \leq 0$) で応力 p_{rN} がそれぞれ(13₁)および(13₂)で与えられ、残りの部分では $p_{rN} = 0$ の円孔の問題に移される。Fig. 2 に ζ 面を示す。 z 面に対応する点は同一の記号で示してある。

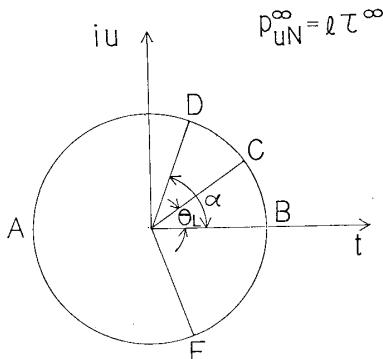


Fig. 2. The $\zeta (=t+iu)$ -plane obtained from the z -plane of Fig. 1 by the conformal transformation (4).

円周上で $p_{rN} = 0$ 、無遠で $p_{uN} = p_{uN}^\infty$ という条件を満たす解は以下のように与えられる。

$$\varphi_1'(\zeta) = -\frac{i p_{uN}^\infty}{\mu} \left(1 + \frac{1}{\zeta^2}\right) \quad (14)$$

つぎに、条件 $|\zeta| \rightarrow \infty$ で $\varphi'(\zeta) \rightarrow 0$ ($1/\zeta^2$)、円周上で式(13)を満たす解は

$$\varphi_2'(\zeta) = \frac{1}{\pi i \mu \zeta} \left(\int_{e^{i\alpha}}^1 \frac{p_{rN}(\zeta') d\zeta'}{\zeta' - \zeta} + \int_1^{e^{-i\alpha}} \frac{p_{rN}(\zeta') d\zeta'}{\zeta' - \zeta} \right) \quad (15)$$

となる。ただし、右辺の第1項の積分中の p_{rN} に対しては(13₁)を用い、第2項の積分中の p_{rN} に対しては式(13₂)を用いる。なお積分は時計回りに円周に沿って行い。

円孔の問題の求める解は式(14)と(15)を足し合せて得られる。 $p_{rN}(1/\zeta) = -p_{rN}(\zeta)$ なる関係を用いて次式を得る。

$$\begin{aligned} \zeta \varphi'(\zeta) &= \zeta(\varphi_1'(\zeta) + \varphi_2'(\zeta)) \\ &= -\frac{1}{\pi i \mu} \int_{e^{i\alpha}}^1 \frac{p_{rN}(\zeta')(1-\zeta'^2) d\zeta'}{\zeta'(\zeta' - \zeta)(\zeta' - 1/\zeta)} \\ &\quad - \frac{i p_{uN}^\infty}{\mu} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) \end{aligned} \quad (16)$$

さて、すべり線の先端において τ_{yz} は一般に $r^{-1/2}$ の特異性を持つ。そこですべり線の長さを決めるために応力は有界という条件を課そう。この条件は

$$\varphi'(\zeta_L) = 0, \quad \text{ただし } \zeta_L = e^{i\theta_L}$$

となる。式(4)を微分して

$$\begin{aligned} m'(\zeta) &= l(1+\zeta)(\zeta-1)^{2\beta-1}(\zeta-e^{i\alpha})^{-\beta}(\zeta-e^{-i\alpha})^{-\beta} \\ &\quad \times (\zeta-e^{i\theta_L})(\zeta-e^{-i\theta_L})/\zeta^2 \end{aligned} \quad (17)$$

式(17)を式(13₁)に代入し、その結果を θ で表すと

$$p_{rN}(\theta) = -l\tau_0 p(\theta) \quad (18)$$

ただし

$$\begin{aligned} p(\theta) &= 2(1-\cos\theta)^{\beta-1}(\cos\theta - \cos\alpha)^{-\beta}(\cos\theta \\ &\quad - \cos\theta_L)\sin\theta \end{aligned} \quad (19)$$

式(16)の積分変数を θ に変換し式(18), (19)を用いると応力有界の条件は次式となる。

$$2l\tau_0 \int_0^\alpha \cos^2 \frac{\theta}{2} \left\{ \frac{1-\cos\theta}{\cos\theta - \cos\alpha} \right\}^\beta d\theta = \pi l\tau^\infty \cos\theta_L \quad (20)$$

ここで小規模降伏を仮定し、 α は 0 に近いとすると

$$\tau_0 \alpha I_L(\beta) = \pi \tau^\infty \quad (21)$$

ここで

$$I_L(\beta) = \int_0^1 t^{\beta-1/2} (1-t)^{-\beta} dt$$

積分はガンマ関数を使って表すことができ、式(21)は次のようになる。

$$\frac{\tau_0 \alpha}{\sin \beta\pi} \frac{\Gamma(\beta+1/2)}{\Gamma(\beta)\Gamma(3/2)} = \tau^\infty \quad (22)$$

一方 $\alpha \approx 0$ のとき、式(8), (9)はそれぞれ

$$c = 2l, \quad L/c = \beta_0 \alpha^2 / 2 \quad (23)$$

となる。式(22)の α に式(23)の α を代入して、すべり線の長さが応力拡大係数 $K (= \tau^\infty \sqrt{\pi c})$ と角度 $\beta\pi$ の関数として以下のように求められる。

$$L = \frac{\beta_0 \sin^2 \beta\pi \Gamma^2(\beta)}{8\Gamma^2(\beta+1/2)} \frac{K^2}{\tau_0^2} \quad (24)$$

つぎにき裂せん断変位を計算する。式(16)を変形して

$$\begin{aligned} \mu \varphi'(\zeta) &= \frac{\tau_0 e^{-i\beta\pi}}{\pi} \frac{d}{d\zeta} \int_{e^{i\alpha}}^1 m(\zeta') \left(\frac{1}{\zeta - \zeta'} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\zeta' - 1/\zeta} \right) d\zeta' - i l \tau^\infty (1 + 1/\zeta^2) \end{aligned} \quad (25)$$

$\zeta = 1$ で変位は 0 という条件を考慮すると

$$\begin{aligned} \mu \varphi(\zeta) &= \frac{\tau_0 e^{-i\beta\pi}}{\pi} \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \int_1^{e^{i\alpha}} \frac{m(\zeta') d\zeta'}{(\zeta' - \zeta)(\zeta' - 1/\zeta)} \\ &\quad - i l \tau^\infty (\zeta - 1/\zeta) \end{aligned} \quad (26)$$

したがって $\zeta = e^{i\alpha}$ においては

$$\begin{aligned} \mu \varphi(e^{i\alpha}) &= -2l \sin \alpha \left[\frac{\tau_0 \sin(\alpha/2)}{\pi} \int_0^1 t^{\beta-1/2} (1-t)^{-\beta} \right. \\ &\quad \left. \times (1-t \sin^2(\alpha/2))^{-1/2} dt - \tau^\infty \right] \end{aligned} \quad (27)$$

となる。式(26), (27)より明らかのように $\varphi(e^{i\theta})$ は実数であり変位そのものを表す。き裂せん断変位 Φ は $2\varphi(e^{i\alpha})$ で定義される。小規模降伏の条件下では式(21)を用いて以下のようになる。

$$\Phi = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(\beta+1/2)\Gamma(1-\beta)} \frac{\tau_0 K^2}{\tau_0^2} \quad (28)$$

ここで τ_0 は降伏ひずみ、 τ_0/μ である。

最後にクラック先端近くでの応力場を調べよう。 x 軸上の点 $x (> 0)$ を考える。対応する ζ はやはり実軸上にあって $\zeta > 1$ である。式(16)を ζ が 1 よりわずかに大きい値に対して計算することにより

$$\tau_{yz} \cong \tau_0 / \cos \beta\pi \quad (29)$$

を得る。クラック先端で応力は有界となり、またクラックの長さや外部応力には依存しない。

3 すべり線発生を伴うクラックの微小距離の成長

ある外部応力 τ^∞ のもとでクラックが進展を開始した状態を考える。外部応力の増分 $\Delta\tau^\infty$ のもとでクラックは長さ L_0 だけ進みそこで Fig. 3 に見るように初期クラックのすべり線と平行な2本の長さ L_1 のすべり線を放出し安定状態に達すると仮定する。 L_0 は例えば考えている材料の介在物の間隔等で決まる材料定数と考えられる。以下では簡単のためこの過程の間初期クラックのすべり線 BC, BE での転位の再配列は起こらないものとする。

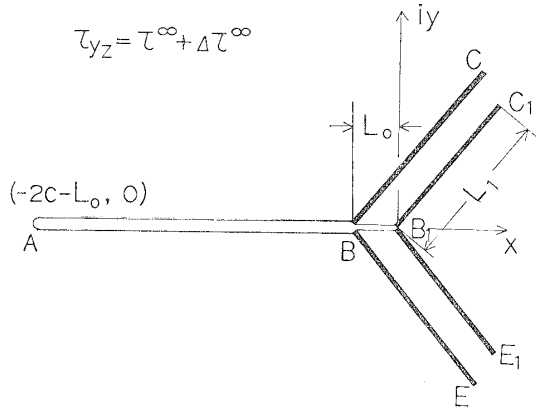


Fig. 3. Model of the first step of stable crack growth. The crack grows over a distance L_0 under an incremental load $\Delta\tau^\infty$ and two inclined slip-lines are newly formed at the tip.

Fig. 3 の状態における長さ $2c+L_0$ のクラックに対する境界条件は次のようになる。すなわち新たに形成された2本のすべり線上では応力は転位に対する抵抗応力に等しく、したがって B_1C_1 上で $\tau_{y'z'} = \tau_0$, B_1E_1 上で $\tau_{y''z''} = \tau_0$ 。また、クラック表面 $-2c-L_0 \leq x \leq 0$ 上で $\tau_{yz} = 0$, 無限遠方で $\tau_{yz} = \tau^\infty + \Delta\tau^\infty$ である。

前節で扱った外部応力が τ^∞ の初期クラックの解を基準にとって、この解に以下に定式化する第2の解を重ね合わせることで上述の境界条件を満足させることを試みる。

まず等価な抵抗応力の考え方を導入する。進展前の第2のすべり線となるべき場所、 B_1C_1 , B_1E_1 上における応力 $\tau_{y'z'}$, $\tau_{y''z''}$ は降伏応力 τ_0 に非常に近い値になっていると予想される。BC の近くにおいては $\tau_{y'z'}$ はすべり線からの距離に比例して減少しその比例定数は BC 上で一定であるとする $\tau_{y'z'}$ は B_1C_1 上で次のように書ける。

$$\tau_{y'z'} = \tau_0 - \tau_0' \quad (30)$$

ここで

$$\tau_0' / \tau_0 = \gamma(L_0 \sin \beta\pi) / L \quad (31)$$

γ は β と外部応力に依存する定数である。式(30), (31)は後節で検証するが $\beta\pi = 45^\circ$ のときには特に良好な近似である。外部応力の増分 $\Delta\tau^\infty$ により B_1C_1 上に新たに生じた転位が受ける抵抗応力はしたがって一定値 τ_0' であると解釈される。 B_1E_1 上での抵抗力も τ_0' となる。

またクラックの距離 L_0 の進展に伴い式(29)で与えられる応力は解放されて0となる。このようにして初期クラックの解に重ね合わせるべき第2の問題の解は以下の境界条件を満たさなければならない。

$$\left. \begin{aligned} & \text{無限遠方で } \tau_{yz} = \Delta\tau^\infty \\ & \text{すべり線 } B_1C_1, B_1E_1 \text{ 上で} \\ & \quad \tau_{y'z'} = \tau_0', \tau_{y''z''} = \tau_0' \\ & - (2c+L_0) \leq x \leq -L_0 \text{ で } \tau_{yz} = 0 \\ & -L_0 \leq x \leq 0 \text{ で } \tau_{yz} = -\tau_0 / \cos \beta\pi \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

なお、座標軸の原点はクラックの新しい先端に取ってある。この境界条件は、条件(32₄)が付け加えられていることを除けば初期クラックに対するものと同じであり以下のように解くことができる。

初期クラックに対応する量を添字1を付けて表す。例えば l を l_1 , c を c_1 , α を α_1 でおきかえて

$$\left. \begin{aligned} 2c_1 &= 2c + L_0 = 2^{1+\beta} l_1 (1 + \cos \alpha_1)^{1-\beta} \\ L_1 &= 4l_1 \beta_0 \sin^2(\alpha_1/2) \\ \sin^2(\theta_{L_1}/2) &= \beta \sin^2(\alpha_1/2) \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

l , α を l_1 , α_1 でおきかえた写像関数、式(4), により Fig. 3 の B_1C_1 , B_1E_1 のすべり線を伴うクラックは ζ 面の単位円に移る。すべり線に対応する円弧, $0 \leq \theta \leq \alpha_1$, $-\alpha_1 \leq \theta \leq 0$, に対し円周上の応力 p_{rN} は τ_0 を τ_0' でおきかえた(13)で与えられる。またクラックの進展部分に対応する長さ L_0 の部分は円弧, $\alpha_1 \leq |\theta| \leq \alpha_1 + \delta$, に移る。 δ は条件, $-L_0 = m(e^{i(\alpha_1 + \delta)})$ により決定され以下のようなになる。

$$\delta = (\beta_0 L_0 / L_1)^{1/(1-\beta)} \tan(\alpha_1/2) \quad (34)$$

ただし, $L_0 \ll L_1$ を仮定し $\delta \ll \alpha_1$ という条件を用いている。円弧, $\alpha_1 < |\theta| < \alpha_1 + \delta$, に対しては(32₄)の応力条件は

$$p_{rN} = i\zeta m'(\zeta) \tau_0 / \cos \beta\pi \quad (35)$$

に移る。応力関数は式(16)とまったく同様に求められ次式を得る。

$$\begin{aligned} \varphi'(\zeta) &= \frac{\tau_0}{i\pi\mu\zeta \cos \beta\pi} \int_{e^{i\alpha_1}}^{e^{i(\alpha_1+\delta)}} \frac{im'(\zeta')(1-\zeta'^2)d\zeta'}{(\zeta'-\zeta)(\zeta'-\zeta^{-1})} \\ &+ \frac{1}{\pi i\mu\zeta} \int_1^{e^{i\alpha_1}} \frac{p_{rN}^1(\zeta')(1-\zeta'^2)d\zeta'}{\zeta'(\zeta'-\zeta)(\zeta'-\zeta^{-1})} \\ &- \frac{i l_1 \Delta\tau^\infty}{\mu} \left(1 + \frac{1}{\zeta^2} \right) \end{aligned} \quad (36)$$

上式で p_{rN}^1 は式(13₁)において τ_0 を τ_0' でおきかえた式を表す。

4 2次すべり線の長さとき裂せん断変位

今までのところ未知であった α_1 は前と同様にすべり線の先端で応力は有界という条件から得られる。式(36)で $\zeta = \zeta_{L1}$ において積分を計算する。ここで $\zeta_{L1} = \exp(i\theta_{L1})$ であり、 θ_{L1} は式(33₃)で与えられる。右辺第2項の積分は式(20)の左辺と同じ形になる。第1項は $\delta \ll \alpha_1$ なる条件を用いて積分を実行でき

$$(\tau_0 / \cos \beta\pi) \cot(\alpha_1/2) L_0 / (1-\beta)$$

を得る。結局、応力有界の条件は次式となる。

$$4L_1\tau_0'\sin(\alpha_1/2)\int_0^1 t^{\beta-1/2}(1-t)^{-\beta}(1-t\sin^2(\alpha_1/2))^{1/2}dt \\ = \frac{\tau_0 L_0 \cot(\alpha_1/2)}{(1-\beta)\cos\beta\pi} + 2\pi l_1 \Delta\tau^\infty \cos\theta_{L1} \quad (37)$$

外部応力の増分 $\Delta\tau^\infty$ とクラックの進展距離 L_0 が与えられると α_1 が決定されたがって第2のすべり線の長さ L_1 が決まる。小規模降伏の場合 ($\alpha_1 \ll 1$) には、式(37)は以下のようになる。

$$2\tau_0'\alpha_1 I(\beta) = \frac{2\beta_0\tau_0 L_0 \alpha_1}{(1-\beta)L_1 \cos\beta\pi} + 2\pi \Delta\tau^\infty \quad (38)$$

つぎに2次すべりによるき裂せん断変位を計算しよう。 $\varphi'(\zeta)$ を積分して $\varphi(\zeta)$ を求める。式(36)の右辺第2項は式(16)と同じ形であり、式(25)、(26)と同様の手順で ζ に関して積分することができる。第1項は部分積分により

$$\frac{\tau_0}{\pi\mu\cos\beta\pi} \left[\frac{m(e^{i(\alpha_1+\delta)})(1-e^{2i(\alpha_1+\delta)})}{\zeta(e^{i(\alpha_1+\delta)}-\zeta)(e^{i(\alpha_1+\delta)}-\zeta^{-1})} - \frac{d}{d\zeta} \int_{e^{i\alpha_1}}^{e^{i(\alpha_1+\delta)}} m(\zeta') \left(\frac{1}{\zeta'-\zeta} + \frac{1}{\zeta'-\zeta^{-1}} \right) d\zeta' \right] \quad (39)$$

と変形できる。こうしたうえで、 δ が α_1 に比較して小さいという条件を用いて、 ζ に関して1から $e^{i\alpha_1}$ まで積分すると

$$\frac{\tau_0 L_0}{\pi\mu\cos\beta\pi} \left[\ln \frac{\sin(\alpha_1+\delta/2)}{\sin(\delta/2)} + \frac{1}{1-\beta} \right] \quad (40)$$

となる。ここで $m(e^{i(\alpha_1+\delta)}) = -L_0$ を用いた。したがって第2のすべりによるき裂せん断変位、 $\Phi_1 = 2\varphi(e^{i\alpha_1})$ は

$$\Phi_1 = \frac{2\tau_0 L_0}{\pi\mu\cos\beta\pi} \left[\ln \frac{\sin(\alpha_1+\delta/2)}{\sin(\delta/2)} + \frac{1}{1-\beta} \right] - \frac{4\tau_0' l_1 \sin\alpha_1 \sin(\alpha_1/2)}{\pi\mu} \int_0^1 \frac{t^{\beta-1/2}(1-t)^{-\beta} dt}{[1-t\sin^2(\alpha_1/2)]^{1/2}} + 4l_1 \Delta\tau^\infty \sin\alpha_1/\mu \quad (41)$$

となる。ここで小規模降伏を仮定し、応力有界の条件式(38)を代入すると

$$\Phi_1 = \sqrt{2L_1 c / \beta_0} \Delta\tau^\infty / \mu + 2\tau_0 L_0 / (\pi\mu\cos\beta\pi) \times \ln 4 [L_1 / (\beta_0 L_0)]^{1/(1-\beta)} \quad (42)$$

クラックの安定成長に対しては、Evans¹⁾の実験より $L_1 \cong L$ である。そこで式(42)の右辺第1項の L_1 、 c に対して式(8)、(9)を用いると Φ_1 は次のようになる。

$$\Phi_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(\beta+1/2)\Gamma(1-\beta)} \frac{\pi c \tau^\infty \Delta\tau^\infty}{\mu \tau_0}$$

$$+ \frac{2\tau_0 L_0}{(1-\beta)\pi\mu\cos\beta\pi} \ln \frac{kL}{L_0} \quad (43)$$

ここで

$$k = (1/\beta_0) \exp[(1-\beta)\ln 4]$$

さらに式(43)は以下のように変形できる。外部応力が τ^∞ の長さ $2c$ の面外せん断クラックのエネルギー解放率 (J積分) は

$$J = \pi c \tau^\infty{}^2 / 2\mu \quad (44)$$

で与えられる。クラックの長さを一定に保ったまま外部応力を $\Delta\tau^\infty$ だけ増大させるときの J の増分は、次式で与えられる。

$$\Delta J = \pi c \tau^\infty \Delta\tau^\infty / \mu \quad (45)$$

式(43)の Φ_1 は弾性変形を無視すると、初期クラックの先端において測った L_0 だけ進展した際のき裂せん断変位の増分、 $\Delta\Phi$ 、と見なすことができる。式(43)を用いると式(43)より $\Delta\Phi$ は以下のように表される。

$$\Delta\Phi = \frac{\sqrt{\pi} \Delta J}{2\tau_0 \Gamma(\beta+1/2)\Gamma(1-\beta)} + \frac{2\tau_0 L_0 \ln(kL/L_0)}{(1-\beta)\pi\mu\cos\beta\pi} \quad (46)$$

Rice⁸⁾らはプラントルのすべり線場が安定成長するクラックにおいても妥当であると仮定しクラックの微小距離 L_0 の進展、および外部応力の増分 ΔJ に帰因するクラック面に近い点における開口変位 (彼らのモデルにおいてはき裂先端における開口変位は定義できない) の増分、 $\Delta\Phi$ 、を以下のように得た。

$$\Delta\Phi = A \frac{\Delta J}{\sigma_0} + B \frac{\sigma_0 L_0}{E} \ln \left(\frac{R}{L_0} \right) \quad (47)$$

ここで、 σ_0 は引張降伏応力、 E はヤング率、 R は塑性域半径、 A 、 B は定数である。 τ_0 に σ_0 が、また μ に E が対応するものとする、式(46)と式(47)の両者は基本的に同一の式であることは興味深い。Rice らは有限要素法による結果から A はほぼ 0.5、また理論的に B は 3.9 としている。一方、式(46)では $\Delta J / \tau_0$ の係数は $\beta = 0.25$ ($\beta\pi = 45^\circ$) に対し 0.59、 $\beta = 0.389$ ($\beta\pi = 70^\circ$) に対し 0.57 となる。また右辺第2項の B に対応する係数は $\beta = 0.25$ に対し 1.20、 $\beta = 0.389$ に対し 3.05 である。 A の値はよく一致するのに対し、 B の値は現モデルにおいては β の値に対し大きく変動し、特に $\beta = 0.25$ に対しては $1/3$ 程度の値となっている。

Rice⁸⁾らの解析によると B の値が大きくなると安定成長する距離は短くなる。したがってすべり線を放出しつつ成長するクラックは、巨視的な塑性論にしたがって降伏するクラックにくらべて、より延性に富み安定であるということが予想される。実際1章で述べた Evans の実験に使用されたケイ素鋼はきわめて延性に富み不安定破壊は起こらなかったがこれは現モデルの予想と定性的には一致している。より厳密には、適当なクラック進展の条件を設定し、第3、第4等々の進

展の解を重ね合わせるにより, 外部応力の増分とクラック進展距離, およびき裂せん断変位間の関係を各ステップごとに追っていくという手続きを取る必要があるが, これは将来の課題としたい。

5 τ_0' の計算

式(46)は τ_0' を陽に含まない。しかし「 τ_0' はすべり線上で一定の値を取る」という仮定 (式(31)) を基礎に導かれた。本節では式(31)の妥当性に対する検証を行う。式(3), (11)より $\tau_{y'z'}$ は以下のように表すことができる。

$$\tau_{y'z'} = Re \frac{i\mu e^{i\beta\pi} \varphi'(\zeta)}{m'(\zeta)} = Re \frac{i\mu(\zeta\varphi'(\zeta))}{\zeta m'(\zeta) e^{-i\beta\pi}} \quad (48)$$

すべり線 BC のすぐ近くの点は ζ 面上では単位円の周の近傍の点, $(1+\varepsilon)e^{i\theta}$, に対応する。ここで ε は小さな正数, また, $0 \leq \theta \leq \theta_L$ である。そこで式(48)の分子, 分母の $\zeta = (1+\varepsilon)e^{i\theta}$ での値を計算する。まず式(15)で与えられる $\mu\zeta\varphi_2'(\zeta)$ の第1項は次のようになる。

$$\frac{1}{\pi i} \int_{e^{i\alpha}}^1 \frac{p_{rN}(\zeta') d\zeta'}{\zeta' - \zeta} = -\frac{1}{\pi} \int_0^\alpha \frac{p_{rN}(\theta')}{k_1(\varepsilon, \theta, \theta')} \times \{1 - (1+\varepsilon)\cos(\theta' - \theta) - i(1+\varepsilon)\sin(\theta' - \theta)\} d\theta' \quad (49)$$

ここに

$$k_1(\varepsilon, \theta, \theta') = 1 + (1+\varepsilon)^2 - 2(1+\varepsilon)\cos(\theta' - \theta) \quad (50)$$

式(49)の実部は変形すると次式になる。

$$Re \left(\frac{1}{\pi i} \int_{e^{i\alpha}}^1 \frac{p_{rN}(\zeta') d\zeta'}{\zeta' - \zeta} \right) = \frac{\varepsilon(2+\varepsilon)p_{rN}(\theta)}{2\pi} \int_0^\alpha \frac{d\theta'}{k_1(\varepsilon, \theta, \theta')} + \frac{\varepsilon(2+\varepsilon)}{2\pi} \int_0^\alpha \frac{p_{rN}(\theta') - p_{rN}(\theta)}{k_1(\varepsilon, \theta, \theta')} d\theta' - \frac{1}{2\pi} \int_0^\alpha p_{rN}(\theta') d\theta' \quad (51)$$

右辺第1項の積分は正確に積分を実行できて

$$\int_0^\alpha \frac{d\theta'}{k_1(\varepsilon, \theta, \theta')} = \frac{2}{\varepsilon(2+\varepsilon)} \left(\pi + \frac{\varepsilon \sin(\alpha/2)}{2 \sin(\theta/2) \sin\{(\theta - \alpha)/2\}} \right) \quad (52)$$

となる。式(15)で与えられる $\mu\zeta\varphi_2'(\zeta)$ の第2項は, 積分区間を1から $e^{i\alpha}$ に変換し, $p_{rN}(\zeta^{-1}) = -p_{rN}(\zeta)$ の関係を使って変形して以下のように書ける。

$$\frac{1}{\pi i} \int_1^{e^{-i\alpha}} \frac{p_{rN}(\zeta') d\zeta'}{\zeta' - \zeta} = -\frac{1}{\pi} \int_0^\alpha \frac{p_{rN}(\theta') d\theta'}{(1+\varepsilon)e^{i\theta}(e^{i\theta} - (1+\varepsilon)^{-1}e^{-i\theta})} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\alpha p_{rN}(\theta') d\theta' - \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^\alpha \frac{p_{rN}(\theta') d\theta'}{\sin^2\{(\theta + \theta')/2\}} + \frac{i}{2\pi} \int_0^\alpha p_{rN}(\theta') \cot \frac{\theta + \theta'}{2} d\theta' \quad (53)$$

式(14)は $\zeta = (1+\varepsilon)e^{i\theta}$ において次式で与えられる。

$$\mu\zeta\varphi_1'(\zeta) = -2i(\cos\theta + i\varepsilon \sin\theta) p_{uN} \quad (54)$$

式(49), (53), (54)を足し合わせるにより, BC の近傍での $\mu\zeta\varphi'(\zeta)$ の値が求められる。式(51), (52)を代入する

ことにより, $\mu\zeta\varphi'(\zeta)$ は

$$\mu\zeta\varphi'(\zeta) = p_{rN}(\theta) - 2i \cos\theta p_{uN} \quad + (\varepsilon \text{ の order の項})$$

という形で表され特に ε が0のときは BC 上での境界条件を満足することが確かめられる。

つぎに式(48)の分母を計算すると

$$e^{-i\beta\pi} \zeta m'(\zeta) = l p(\theta) \exp[i(-\pi + \varepsilon F(\theta))/2] \quad (55)$$

ここで

$$F(\theta) = -(2\beta - 1) \cot(\theta/2) + \tan(\theta/2) - \beta \left(\cot \frac{\alpha - \theta}{2} - \cot \frac{\alpha + \theta}{2} \right) + \cot \frac{\theta_L - \theta}{2} - \cot \frac{\theta_L + \theta}{2} \quad (56)$$

最後に ε を求める。 B_1C_1 とすべり線 BC の間隔は $L_0 \sin \beta\pi$ である。写像の拡大率は $|dz| = |m'(\zeta)| |d\zeta|$ により与えられるから, $|dz| = L_0 \sin \beta\pi$, $|d\zeta| = \varepsilon$ を代入し, また式(9), (18)を用いて次式を得る。

$$\varepsilon = 2\beta_0(1 - \cos \alpha) / p(\theta) \cdot (L_0 \sin \beta\pi / L) \quad (57)$$

式(48)の分子に式(49), (53), (54)を, また分母に式(55)を代入し, 条件式(20)を用いて次式を得る。

$$\tau_{y'z'} = \tau_0 - \tau_0'$$

ここで

$$\frac{\tau_0'}{\tau_0} / \frac{L_0 \sin \beta\pi}{L} = \frac{2\beta_0(1 - \cos \alpha)}{p^2(\theta)} \left[2 \sin \theta \cdot \frac{\tau_0^\infty}{\tau_0} + \frac{1}{2\pi} g(\theta) + (\cos \theta_L - \cos \theta) \left(\frac{\tau_0^\infty}{\tau_0} + \frac{I}{\pi} \right) F(\theta) \right] \quad (58)$$

ただし

$$g(\theta) = -\frac{p(\theta) \sin(\alpha/2)}{\sin(\theta/2) \sin\{(\theta - \alpha)/2\}} - \int_0^\alpha \frac{p(\theta') - p(\theta)}{k_1(\varepsilon, \theta, \theta')} d\theta' + \frac{1}{2} \int_0^\alpha \frac{p(\theta') d\theta'}{\sin^2\{(\theta + \theta')/2\}} \quad (59)$$

$$I = \int_0^\alpha \frac{\sin^2 \theta' (1 - \cos \theta')^{\beta-1} d\theta'}{(\cos \theta' - \cos \alpha)^\beta (\cos \theta - \cos \theta')} \quad (60)$$

与えられたのに対し式(20)より τ_0^∞/τ_0 が, また式(7)より θ_L が決まる。式(58)に表れる積分を数値積分することにより, τ_0'/τ_0 をパラメータ, $L_0 \sin \beta\pi/L$, を含む θ の関数として計算することができる。また, すべり線上の点の原点からの距離を r とすると

$$\frac{r}{L} = \frac{(1 - \cos \theta)^\beta (\cos \theta - \cos \alpha)^{1-\beta}}{\beta_0(1 - \cos \alpha)} \quad (61)$$

であり, これを用いると τ_0'/τ_0 は r/L の関数となる。

例として $\alpha = 60^\circ$ を選んで, すべり線のなす角度が $\beta\pi = 70^\circ$ および 45° の2通りの場合について τ_0'/τ_0 を計算した。 ($\alpha = 60^\circ$ のとき, 式(8), (9), および(20)から $\beta\pi = 70^\circ$ に対し $L/c = 0.31$, $\tau_0^\infty/\tau_0 = 0.64$, また $\beta\pi = 45^\circ$ に対し $L/c = 0.35$, $\tau_0^\infty/\tau_0 = 0.58$ となる。)

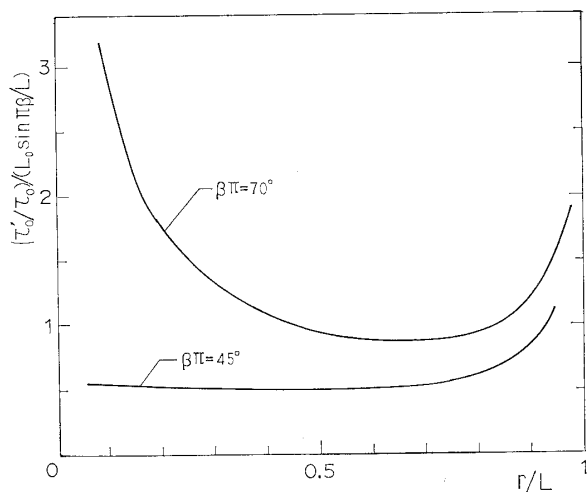


Fig. 4. Variation of the normalized effective friction stress with the distance r/L from the crack tip.

計算は京都大学大型計算機センターの FACOM, M 200 で行い、数値積分にはサブルーチン SSL II の AQE を利用した。相対誤差は 10^{-4} 程度である。結果を Fig. 4 に示す。パラメータ、 $L_0 \sin \beta \pi / L$ の値の 10^{-3} から 10^{-5} の範囲内では式(6)はほぼ一定であった。すなわち τ'_0 / τ_0 はすべり線からの距離に比例して変化すると良好く、Fig. 4 はその比例定数のすべり線上での変化の様子を示したものとなっている。図からわかるように $\beta \pi = 45^\circ$ の場合には、すべり線のはしを除けば τ'_0 は r/L によらずほぼ一定として良く、式(3)の定義による r はほぼ 0.5 である。 $\beta \pi = 70^\circ$ の場合には $\tau'_0 = \text{一定}$ という仮定は相当あるいは近似となる。したがって前節の解析は $\beta \pi = 45^\circ$ の場合に対しては

正当化しうるが、 70° に対しては近似的なものになる。

6 ま と め

すべり線により降伏する面外せん断クラックの安定成長の初期の段階を解析した。最初に初期クラックの解析について述べた。つぎに進展したクラックの解は初期クラックの解に、微小距離の進展に対応する第2の解を重ね合わせるにより得られると仮定し、等価抵抗応力の考えを応用することにより、第2の境界値問題を定式化した。解は閉じた形で得られ、き裂せん断変位の増分と進展距離および外部応力の増分の関係式が導かれた。この関係は定数の値を除けば、マクロな塑性力学を基に Rice⁸⁾ らによって導かれた関係式と一致することがわかった。

参 考 文 献

- 1) J. T. Evans, J. Mech. Phys. Solids, **28**, 95 (1980).
- 2) M. F. Kanninen, C. Atkinson and C. E. Feddersen, ASTM STP 638, 122 (1977).
- 3) V. Vitek, J. Mech. Phys. Solids, **24**, 263 (1976).
- 4) H. Riedel, *ibid.*, **24**, 277 (1976).
- 5) H. Homma, K. Kurihara and H. Nakazawa, *ibid.*, **32**, 213 (1984).
- 6) 戸谷眞之, 材料, **31**, 541 (1982).
- 7) 戸谷眞之, 材料, **32**, 776 (1983).
- 8) J. R. Rice and E. P. Sorensen, J. Mech. Phys. Solids, **26**, 163 (1978).
- 9) C. Darwin, Phil. Mag. Ser. 7, **41**, 1 (1950).
- 10) J. Weertman, Int. Journ. Frac. Mech., **2**, 460 (1966).