

630 温度こう配下における積層円板中の円形はく離

A Disc-Shaped Interface Crack in a Laminated Plate Subject to Thermal Gradients

○正 深川和良 (鹿大院)
正 有富正男 (鹿大)

正 小田美紀男 (鹿大)
正 戸谷眞之 (鹿大)

Kazuyoshi FUKAGAWA, Mikio ODA, Masao ARITOMI, and Masayuki TOYA
Dept. of Mechanical Engineering, 1-21-40, Korimoto, Kagoshima

Key Words : Fracture Mechanics, Delamination, Disc-Shaped Interface Crack, Energy Release Rate, Buckling, Thermal Stress

1. 緒言

円形はく離を有する積層円板が温度こう配下におかれた場合を想定し、熱応力による板の変形およびはく離のエネルギー解放率を、微小たわみの板理論に基づき解析する。

2. たわみの解析

図1に示す様な中央に円形はく離を有する、材質の異なった2枚の円板をはりあわせて作られた積層円板を考える。

板は等方弾性体とし、ヤング率、ポアソン比、熱膨張係数、熱伝導率、板厚を上板(＃1)については $E_1, \nu_1, \alpha_1, k_1, h_1$ 、下の板(＃2)については $E_2, \nu_2, \alpha_2, k_2, h_2$ とする。また、円板の半径を a 、円形はく離の半径を b とする。上板の上面の温度を T_1 、下板の下面の温度 T_2 とし、 $T_1 > T_2$ 、かつ $\alpha_1 > \alpha_2$ とすると、温度差により上に凸になるような軸対称の曲げが生ずる。解析においては $r=b$ にて上記のモデルを分割し円環部分($b \leq r \leq a$)とはく離部分($0 \leq r \leq b$)にわけてそれぞれのたわみを求める。

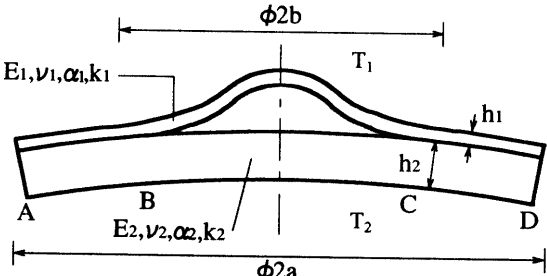


Fig.1 Bending of a circular laminated plate containing a disc-shaped crack due to thermal gradients

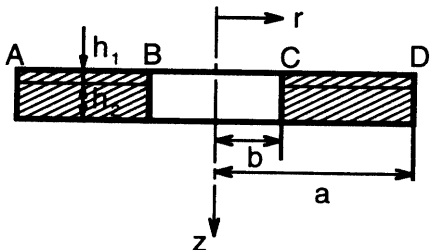


Fig.2 Bonded annular part

まず円環部分のたわみについて考える。この際、基準面を平面ひずみ条件下の積層はりの中立軸と同じ位置に定めると、たわみ w_A および半径方向変位 u_A に関する方程式は簡単になる。円板上面から基準面までの距離 η は以下の式で与えられる。

$$\eta = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{E_1 h_1^2}{1-\nu_1^2} + \frac{E_2 h_2 (2h_1 + h_2)}{1-\nu_2^2} \right) / \left(\frac{E_1 h_1}{1-\nu_1^2} + \frac{E_2 h_2}{1-\nu_2^2} \right) \right\} \dots (1)$$

基準面に関する単位長さ当たりのモーメント M_r およびせん断力 Q_r は以下のようなになる。

$$M_r = \frac{u_A}{r} B_{12} - D \frac{d^2 w_A}{dr^2} - D_{12} \frac{1}{r} \frac{dw_A}{dr} - Q_r \dots (2)$$

$$Q_r = D \left(\frac{d^3 w_A}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w_A}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw_A}{dr} \right) \dots (3)$$

B_{12}, D, D_{12}, Q_r は付録に定義されている定数である。平衡方程式は均質板に対するものと同じになり、基準面の定義を考慮すると、結局次式のようなになる。

$$\left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{d^2}{dr^2} \right) \left(\frac{d^2 w_A}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_A}{dr} \right) = 0 \dots (4)$$

一方、基準面の半径方向変位は

$$u_A = A_1 r + A_2 / r \dots (5)$$

で与えられる (A_1, A_2 は未定定数)。円環部分のたわみは式(4)および $Q_r = 0$ より

$$w_A = C_{1A} + C_{2A} \ln(r/a) + C_{3A} r^2 \dots (6)$$

で与えられる。ここで $C_{1A} \sim C_{3A}$ は未定定数である。

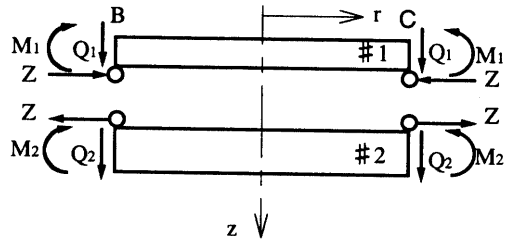


Fig.3 Free-body diagram of the delaminated part

次にはく離部分のたわみ曲線を求める。はく離部分を周辺でヒンジ止めされた重ね円板としてモデル化する。ヒンジの作用は上の円板に対して円板下縁部に中心に向かって水平方向に作用する引張力(単位長さ当たり Z とする)、下の円板に対して円板上縁に作用する圧縮力($-Z$)に置き換えることができる。以下 Z を断面力と呼ぶ。はく離面は非接触であると仮定する。自由体線図は図3に示されるものとなる。

上下の円板のたわみをそれぞれ w_1, w_2 とするとたわみの完全解は以下のようなになる。

$$w_1 = B_1 J_0(k_1 r) + K_{B1}/k_1^2, \quad k_1^2 = Z/D_1 \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$w_2 = B_2 I_0(k_2 r) - K_{B2}/k_2^2, \quad k_2^2 = Z/D_2 \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで K_{B1} , K_{B2} , B_1 , B_2 は未定定数であり, J_0 , I_0 はそれぞれ零次の第一種ベッセル関数および第一種変形ベッセル関数である。

これらの解に $w_A(a)=0$, $M_r(a)=0$, 面内力=0なる境界条件と, $r=b$ におけるたわみと傾き, および, モーメント $M_1 + M_2 = M_r(b)$ の連続条件を用いることですべての未定定数を断面力 Z で表すことができる。

最後に断面力 Z を決定する。ヒンジ止めされた部分の縁は, 変形後もはく離部分の上下の円板の各々の中立面と直角を保つという条件により, 以下の式を得る。

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \int_0^b \left(\frac{dw_1}{dr} \right)^2 dr - \frac{(1-\nu_1)Zb}{E_1 h_1} + \frac{\alpha_1(T_1 + T_A)b}{2} \\ & = -\frac{1}{2} \int_0^b \left(\frac{dw_2}{dr} \right)^2 dr + \frac{(1-\nu_2)Zb}{E_2 h_2} + \frac{\alpha_2(T_B + T_2)b}{2} + \frac{h}{2} \left(\frac{dw_2}{dr} \right)_{r=b} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで T_A , T_B はそれぞれはく離部分における上板下面の温度, 下板上面の温度, B_C はピオ数であり次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} T_A &= \frac{T_1(1+\xi) + B_C(T_1 + \xi T_2)}{(1+B_C)(1+\xi)}, \quad \xi = \frac{k_2 h_1}{k_1 h_2} \\ T_B &= \frac{T_2(1+\xi) + B_C(T_1 + \xi T_2)}{(1+B_C)(1+\xi)} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$B_C = \frac{k_1 h_2 + k_2 h_1}{k_1 k_2} h_c \quad \dots\dots\dots (11)$$

h_c はクラック界面を横切る熱伝導率を表す。

3. たわみ曲線の数値解例とエネルギー解放率

ここで例として, 上下の板ともにアルミナを想定し, 円板の半径は $a=100\text{mm}$, はく離半径は $b=50\text{mm}$, 厚さは上層が $h_1=0.4\text{mm}$, 下層が $h_2=1.6\text{mm}$ のモデル材について, 式(9)の数値解を求め, それに基づいて得られたたわみ曲線を図4に示す。また, $r=0$ における上板と下板のたわみの差 dw と温度差 $T_1 - T_2$ の関係を図5に示す。温度差が小さい時はたわみの差も小さいが, ある温度差付近にてその挙動は変化し急激にたわみの差が増大する。すなわち, 座屈に類似した挙動が生じていることがわかる。

Suo と Hutchinson⁽¹⁾ は一般の負荷を受けている単位幅の積層はりのはく離のエネルギー解放率を与える公式を二次元弾性論に基づいて導いた。彼らの結果に基づいて, エネルギー解放率を計算した例を図6に示す。温度差が大きい程 G が大きいことがわかる。また同条件下にて B_C を変化させると B_C が大きい程 G が小さいこともわかる。

付録

式(2), (3)における定数は以下の通りである。

$$B = \frac{E_1 h_1}{2(1-\nu_1^2)} (-2\eta + h_1) + \frac{E_2 h_2}{2(1-\nu_2^2)} (2h_1 + h_2 - 2\eta) \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$D = \frac{E_1}{3(1-\nu_1^2)} \{\eta^3 + (h_1 - \eta)^3\} + \frac{E_2}{3(1-\nu_2^2)} \{(h - \eta)^3 - (h_1 - \eta)^3\} \dots (13)$$

$$D_{12} = \frac{E_1 \nu_1}{3(1-\nu_1^2)} \{\eta^3 + (h_1 - \eta)^3\} + \frac{E_2 \nu_2}{3(1-\nu_2^2)} \{(h - \eta)^3 - (h_1 - \eta)^3\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\begin{aligned} Q_r &= \frac{\alpha_1 E_1}{1-\nu_1} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{T_0 - T_1}{h_1} \right) \{(h_1 - \eta)^3 + \eta^3\} + \frac{1}{2} \left(\frac{T_0 - T_1}{h_1} \eta + T_1 \right) \{(h_1 - \eta)^2 - \eta^2\} \right] \\ &+ \frac{\alpha_2 E_2}{1-\nu_2} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{T_2 - T_0}{h_2} \right) \{(h - \eta)^3 - (h_1 - \eta)^3\} + \frac{1}{2} \left(\frac{T_2 - T_0}{h_2} (\eta - h) + T_2 \right) \{(h - \eta)^2 - (\eta - h_1)^2\} \right] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここで T_0 は接着部分界面の温度を表し, 次式となる。

$$T_0 = \frac{T_1 + \xi T_2}{1 + \xi} \quad \dots\dots\dots (16)$$

文献

- (1) Suo, Z. and Hutchinson, J. W., Int. J. Fract., 43(1990), 1-18

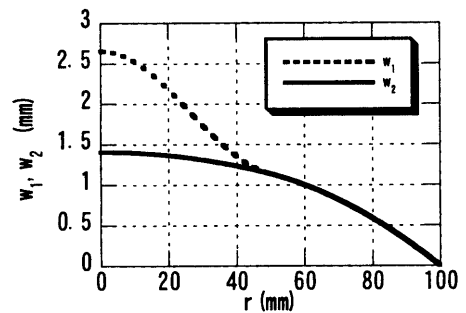


Fig.4 Deflection curves at $T_1 - T_2 = 100^\circ\text{C}$ ($B_C = 0$).

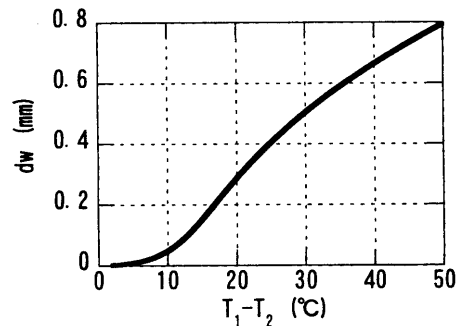


Fig.5 Difference of deflection at the center of the plates between upper and lower-layer ($B_C = 0$).

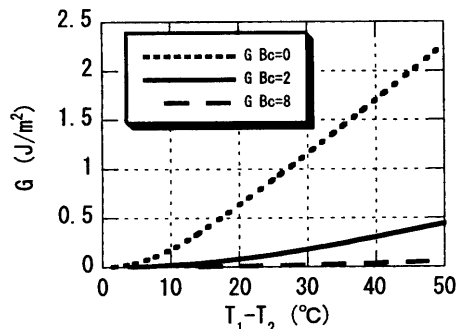


Fig.6 Variation of the energy release rate with temperature difference.