円筒座標系におけるラプラス方程式のノイマン関数

村　島　定　行

（受理　昭和46年5月31日）

NEUMANN FUNCTIONS OF LAPLACE'S EQUATION IN CYLINDRICAL CORDINATE

Sadayuki MURASHIMA

In general, the potential function in cylindrical cordinate is expressed in the three different forms, what is called the z, r and ϕ forms, each of which has its own region of rapid convergence. In this reports, the *Neumann functions* of Laplace's equation for the six cases of non-finite regions are given in those three forms by separation of cordinate. For the cases of finite region, the *Neumann function* does not exist, then the potential due to one pair of positive and negative sources is expressed in the z, r and ϕ forms. The several examples for application of those results are also shown.

円筒座標系でポテンシャルを表示する場合，一般に z 型，ϕ 型，r 型と称する3種の違ったタイプがあり，それぞれ違った急速収束の領域をもっている．この論文ではラプラス方程式のノイマン関数の z 型，ϕ 型，r 型に相当する式を領域が有限でない6つのケースについて変数分離の方法で求めている．有限領域の場合はノイマン関数は存在しないが実際的な応用を考えて正負一対の極がある場合のポテンシャルの表式を与え，さらに若干の応用例を示した．

1. はじめに

円筒座標系によってポテンシャルを表示する場合，偏微分方程式を変数分離する方法の違いにより，z 型，r 型，ϕ 型という3種のタイプが考えられ[1]，それぞれ違った急速収束の領域をもっており，実際に問題の解析を行なう時，適当なタイプの表示を選び，計算を速く収束させなければならない．第一種の境界値問題で重要なラプラス方程式のグリーン関数の r, z, ϕ 型の表示については A. Gray and Mac Robert[2] の著書にまとめられている．

第二種の問題で重要なノイマン関数については，それが定数項だけの不定性を有し，しばしば無限大の定数項を含み発散してしまうことあるいは有限領域の場合にはノイマン関数そのものが物理的に存在しないこと等の理由でグリーン関数の場合より幾分面倒であり，いまだ発表されていないようである．

この論文では円筒座標系で構成される種々の有限でない領域の場合について，ノイマン関数の r, z, ϕ 型の表示を与え，有限領域の場合については正負一対の極が存在する場合のポテンシャルの r, z, ϕ 型の表示を与え，若干の応用例を示した．

この論文の構成を述べると，先ず，最初にノイマン関数の不定性及びガウスの定理との関係を述べ，次に定点（極）からの距離の逆数を変数分離の形で表示する．さらにラプラス方程式の正則解を重ね合わせて，種々の境界上においてノイマン条件を満す解を導く．

有限領域のとき，ノイマン関数は考えられないが，正負一対の極がある場合のポテンシャルは考えることができる．実際に応用する上に重要と思われる極の配値に対して適当な形の表示式を与えた．

ここで得られた表式のうち z 型の表示の応用例について著書は若干の報告を行なっているが[3,4]，r 型，ϕ 型についての応用例を二，三例示した．

従来ノイマン関数について3種の表示がそろっていなかったので，常に収束の速い形を選べる状態ではなかった．例えば H. H. Gegenwarth[5] は z 型の表示を採用すべきところを r 型の表示を採用し，計算に大変な苦労をしている．今後はそういう失敗は少なくなるであろう．

2. ポテンシャル問題について

2·1 ノイマン関数について

今与えられた領域内で次のポアソン方程式

$$\nabla^2\phi=-\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)\delta(z-\zeta)\cdots\cdots\cdots(1)$$

を満たし，境界上で $\phi=0$ となる関数はグリーン関数(第一種のグリーン関数)，又，境界上で境界の法線方向微分 $\dfrac{\partial\phi}{\partial n}=0$ を満たす解をノイマン関数（第二種のグリーン関数）という．

グリーン関数及びノイマン関数の一義性について述べると，簡単な電磁気学の知識により，グリーン関数の場合は，定数を含めて全く一義的に決定される，さらにノイマン関数の場合は定数項を除き一義的に決定されるということが知られている．換言するとノイマン関数は任意の定数項を含み得る．

よく知られていることではあるが，有限領域の全表面で $\dfrac{\partial\phi}{\partial n}=0$ を満たすような解は考えられない．
それはガウスの定理より

$$\int_V \nabla^2\phi dV=\int_S \frac{\partial\phi}{\partial n}dS \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

が成立するが，(2) 式の左辺は領域内の全電荷量を表わすから有限であるが，右辺は領域を囲む全表面で $\dfrac{\partial\phi}{\partial n}=0$ であるので 0 になり，(2) 式は成立しない．つまり領域内に正負等量の電荷があれば (2) 式の左辺は 0 になり得るが，単独の正又は負の電荷がある限り，その領域を囲む全表面で $\dfrac{\partial\phi}{\partial n}=0$ となることはない．

しかしながら有限領域でない（つまり $\dfrac{\partial\phi}{\partial n}=0$ の条件が課せられていない部分がある）領域の場合は (2) 式を満す解が存在する．従って後に示すように有限領域でない 6 つのケースについてノイマン関数を与えた．

2・2 ラプラス方程式の解の 3 種の表示法

円筒座標によるラプラス方程式

$$\frac{1\partial}{r\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0 \quad\cdots\cdots(3)$$

の解を $V(r,\phi,z)=R(r)\Phi(\phi)Z(z)$ と仮定して解いていく際の分離定数の選び方により r 型，z 型，ϕ 型という 3 種の表示法がある．形式を列挙すると

$$V(r,\phi,z)=\sum_{m=0}^{\infty}(a_m\cos m\phi+b_m\sin m\phi)\int_0^\infty(L\cos\mu z+M\sin\mu z)[A_mK_m(\mu r)+B_mI_m(\mu r)]d\mu \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

ここに a_m, b_m は定数，L, M, A_m, B_m は定数または μ の関数である．一般に $K_m(0)\to\infty$, $K_m(\infty)\to 0$; $I_0(0)=1$, $I_m(0)=0$, $I_m(\infty)\to\infty$ であってこの性質が (4) 式を特徴ずけているので，この解を r-型の解とよぶ．

$$V(r,\phi,z)=\sum_{m=0}^{\infty}(a_m\cos m\phi+b_m\sin m\phi)\int_0^\infty(Le^{\lambda z}+Me^{-\lambda z})d\lambda \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

一般に a_m, b_m は定数，L 及び M は λ の関数である．(5) 式の表示は，$z\to+\infty$ において $e^{\lambda z}\to\infty$, $e^{-\lambda z}\to 0$; $z\to-\infty$ において $e^{\lambda z}\to 0$, $e^{-\lambda z}\to\infty$ となり，$R(r)$ および $\Phi(\phi)$ はすべての r および ϕ に対して有限である．このように (5) 式は $V(r,\phi,z)$ の因数のうち，特に $Z(z)$ が重要な性質をもっているので z-型の解とよばれる．

最後の式は ϕ-型とよばれ，一般形は (6) 式である．

$$V(r,\phi,z)=\int_0^\infty\int_0^\infty(L\cos\mu z+M\sin\mu z)(A\cosh s\phi+B\sinh s\phi)K_{is}(\mu r)dsd\mu \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

3. 距離の逆数の展開

いま単位強さの源泉が (r', ϕ', z') にある場合の任意の点 (r,ϕ,z) のポテンシャルは次のポアソンの方程式を満足する．

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{\partial V}{r\partial r}+\frac{\partial^2 V}{r^2\partial\phi^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-\frac{\delta(r-r')}{r}\delta(\phi-\phi')\delta(z-z') \quad\cdots\cdots(7)$$

領域が全空間へ拡っている場合 (7) 式の解は源泉と任意の点の間の距離を d とすると，

$$\begin{cases} V(r,\phi,z;r',\phi',z')=\dfrac{1}{4\pi d} & \cdots\cdots\cdots\cdots(8)\\ d=\sqrt{r^2+r'^2+2rr'\cos(\phi-\phi')+(z-z')^2} & \cdots(9)\end{cases}$$

で与えられる．

円筒座標において，ポテンシャルがまったく異なった 3 種類の展開式で表示されることに対応して，距離の逆数の展開式にも三つの型が考えられる．

ここで，これからの展開において度々引用する重要な関係式をあげておく．

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}=\int_0^\infty e^{-\lambda b}J_0(\lambda a)d\lambda,\ b>0. \quad\cdots\cdots(10)$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\cos\mu b K_0(\mu a)d\mu. \quad\cdots\cdots(11)$$

ベッセル関数に関する加法定理

$$J_0(\lambda R)=J_0(\lambda r)J_0(\lambda r')+2\sum_{m=1}^{\infty}J_m(\lambda r)J_m(\lambda r')\cos m(\phi-\phi') \quad\cdots\cdots(12)$$

$$K_0(\mu R)=K_0(\mu r)I_0(\mu r')+2\sum_{m=1}^{\infty}K_m(\mu r)I_m(\mu r')\cos m(\phi-\phi'),\quad r'<r. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

(12)，(13) 式において R は (14) 式で与えられる．

$$R^2=r^2+r'^2-2rr'\cos(\phi-\phi') \quad \cdots\cdots\cdots(14)$$

(13) 式において $r'>r$ の場合は，r と r' を入れかえる．

さらに次の関係もよく使う．

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cosh s\,(a-\phi+\phi')K_{is}(\lambda r)K_{is}(\lambda r')ds$$
$$=K_0(\lambda r)I_0(\lambda r')$$
$$+2\sum_{m=1}^{\infty}K_m(\lambda r)I_m(\lambda r')\cos m(\phi-\phi'),\ \phi>\phi'. \quad \cdots\cdots(15)$$

(15) 式において $\phi<\phi'$ ならば ϕ と ϕ' とを入れかえる．

Case I　全空間へひろがった領域を最初に考える．

この場合，グリーン関数とノイマン関数に区別はない．ノイマン関数は$\frac{1}{4\pi d}$で与えられるので (10) 式を使って，更に加法定理 (12) 式を使えば

$$V=\frac{1}{4\pi d}=\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty e^{-\lambda|z-z'|}J_0(\lambda R)d\lambda \quad \cdots\cdots(16)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-\lambda|z-z'|}\{\sum_m{}'J_m(\lambda r)J_m(\lambda r')\cos m(\phi-\phi')\}d\lambda \quad \cdots\cdots(17)$$

さらに (11) 式，(13) 式を使うと

$$V=\frac{1}{4\pi d}=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \cos\lambda(z-z')K_0(\lambda R) \quad \cdots(18)$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty \cos\lambda(z-z')\{\sum_m{}'K_m(\lambda r)I_m(\lambda r')\cos m(\phi-\phi')\}d\lambda \quad \cdots\cdots(19)$$

ここで (19) 式は $r>r'$ の場合の式である，$r>r'$ の場合は r と r' とを入れかえる．

3 番目の形は (15) 式と (19) 式を使って得られる．即ち

$$V=\frac{1}{\pi^3}\int_0^\infty \cos\lambda(z-z')d\lambda\int_0^\infty \cosh s(\pi-|\phi-\phi'|)K_{is}(\lambda r)K_{is}(\lambda r')ds,\ 0<|\phi-\phi'|<2\pi. \quad \cdots\cdots(20)$$

ここにあげた 3 種類の展開式 (17)，(19)，(20) 式はそれぞれ z 型，r 型，ϕ 型とよばれる．同じような 3 種類の展開式は他のケースの場合にも得られ，それらの違った形がわかっていれば，それぞれ違った急速収束の領域をもっているので非常に有益である．

4. ノイマン関数の誘導

前章において Case I として全空間にひろがっている領域を考え，単位強さの源泉によるポテンシャルの 3 種類の展開式を示した．

ここでは Case I の場合の解にラプラス方程式の正則解を重ね合せ，与えられた境界上でノイマン条件を満たす解を構成する．

Case II

$z=0,\ z=c>0$ の二つの平面で囲まれた領域．

まず電位をつぎのように仮定する．

$$V=V_c+V^* \quad \cdots\cdots(21)$$

ここで V_c は Case I の場合の電位で (16) 式をとる．V^* は次のように仮定する．

$$V^*=\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty\{Ae^{-\lambda z}+Be^{\lambda z}\}J_0(\lambda R)d\lambda \quad \cdots\cdots(22)$$

$z=0$ 又は $z=c$ の境界面上において$\frac{\partial V}{\partial z}=0$ の条件を満たすように A,B の定数を決定すると，

$$A=\frac{\cosh\lambda(c-z')}{\sinh\lambda c},\ B=\frac{\cosh\lambda z'}{\sinh\lambda c}e^{-\lambda c}. \quad \cdots\cdots(23)$$

従って

$$V=V_c+V^*$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{\cosh\lambda z\cosh\lambda(c-z')}{\sinh\lambda c}J_0(\lambda R)d\lambda,\quad z<z'. \quad \cdots\cdots(24)$$

$z>z'$ の場合は z と z' とを入れかえる．

ここで J. Dougall 氏[6]が定義した関数 $G_n(x)$ を使う．

$$G_n(x)=e^{-\frac{in\pi}{2}}K_n(e^{-\frac{i\pi}{2}}x)$$
$$=\frac{\pi}{2\sin n\pi}\{J_{-n}(x)+e^{-in\pi}J_n(x)\}. \quad \cdots\cdots(25)$$

(25) 式で定義された関数 $G_n(x)$ は次の関係を満たす．

$$\pi iJ_0(\lambda R)=G_0(\lambda R)-G_0(e^{i\pi}\lambda R). \quad \cdots\cdots(26)$$

(26) 式を使って (24) 式を書き直すと，

$$V=\frac{1}{2\pi^2 i}\int_{-\infty}^\infty\frac{\cosh\lambda z\cdot\cosh\lambda(c-z')}{\sinh\lambda c}G_0(\lambda R)d\lambda,\quad z<z'. \quad \cdots\cdots(27)$$

(27) 式を留数の定理を使って書き直すと

$$V=\frac{1}{\pi c}\sum_{p=1}^{\infty}\cos\left(\frac{p\pi z}{c}\right)\cos\left(\frac{p\pi z'}{c}\right)K_0\left(\frac{p\pi R}{c}\right)$$
$$-\frac{\log R}{2\pi c}+\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{2\pi c}\log\left(\frac{1}{\rho}\right). \quad \cdots\cdots(28)$$

(28) 式の最後の項は，座標に関係せず，無限大の定数と考えられる．ノイマン関数としてはこれを除外し

てよい．展開定理 (13) 式を用いて書き直すと，

$$V=-\frac{\log R}{2\pi c}+\frac{2}{\pi c}\sum_{p=1}^{\infty}\cos\left(\frac{p\pi z}{c}\right)\cos\left(\frac{p\pi z'}{c}\right)$$

$$\sum_m{}' K_m\left(\frac{p\pi}{c}r\right)I_m\left(\frac{p\pi}{c}r'\right)\times\cos m(\phi-\phi'),$$

$$r>r'. \quad\cdots\cdots(29)$$

(15) 式を使って (29) 式を書き直すと，

$$V=-\frac{\log R}{2\pi c}+\frac{2}{\pi^2 c}\sum_{p=1}^{\infty}\cos\frac{p\pi z}{c}\cos\frac{p\pi z'}{c}$$

$$\times\int_0^{\infty}\cosh s(\pi-|\phi-\phi'|)\times K_{is}\left(\frac{p\pi r}{c}\right)K_{is}\left(\frac{p\pi}{c}r'\right)ds$$

$$\cdots\cdots(30)$$

Case III

半径 a の無限長円柱この場合に対応するノイマン関数は (19) 式より

$$V=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\infty}\cos\lambda(z-z')\Bigg[\sum^{m}{}'\frac{I_m(\lambda r')}{I_m'(\lambda a)}$$
$$\{I_m'(\lambda a)K_m(\lambda r)-I_m(\lambda r)K_m'(\lambda a)\}$$
$$\times\cos m(\phi-\phi')\Bigg]d\lambda,\ r>r'. \quad\cdots\cdots(31)$$

(31) 式の積分と総和の順序を入れかえると

$$V=\frac{1}{\pi^2}\sum_m{}'\cos m(\phi-\phi')\int_0^{\infty}\cos\lambda(z-z')\frac{I_m(\lambda r')}{I_m'(\lambda a)}$$
$$\{I_m'(\lambda a)K_m(\lambda r)-I_m(\lambda r)K_m'(\lambda a)\}d\lambda$$
$$=\frac{1}{2\pi^2 i}\sum_m{}'\cos m(\phi-\phi')\int_{-i\infty}^{i\infty}e^{-\lambda|z-z'|}\frac{J_m(\lambda r')}{J_m'(\lambda a)}$$
$$\times\{J_m'(\lambda a)G_m(\lambda r)-J_m(\lambda r)G_m'(\lambda a)\}d\lambda.$$
$$\cdots\cdots(32)$$

(32) 式を留数の定理を使って書き直すと

$$V=\frac{1}{\pi^2 a^2}\lim_{\rho\to 0}\left(\frac{1}{\rho}\right)-\frac{1}{2\pi a^2}|z-z'|$$
$$+\frac{1}{2\pi a}\Bigg[\sum_{l=2}^{\infty}\frac{J_0\left(\gamma_{0l}\frac{r}{a}\right)J_0\left(\gamma_{0l}\frac{r'}{a}\right)}{\gamma_{0l}J_0^2(\gamma_{0l})}$$
$$\times\exp\left(-\gamma_{0l}\frac{|z-z'|}{a}\right)$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2\gamma_{nl}J_n\left(\gamma_{nl}\frac{r}{a}\right)J_n\left(\gamma_{nl}\frac{r'}{a}\right)}{(\gamma_{nl}^2-n^2)J_n^2(\gamma_{nl})}$$
$$\times\cos n(\phi-\phi')\exp\left(-\gamma_{nl}\frac{|z-z'|}{a}\right)\Bigg],$$
$$\cdots\cdots(33)$$

ここで γ_{nl} は $J_n'(x)=0$ の l 番目の根である．

(33) 式の最初の項は無限大の定数であるのでノイマン関数としては，この項を除外したものを取ればよい．

3番目の形，即ち ϕ 型の表示を得るために次の関係式を利用する（付録参照）．

$$\int_0^{\infty}\frac{\cosh s(\pi-|\phi-\phi'|)}{\sinh s\pi}\left\{\frac{I_{is}(\lambda r')}{I_{is}'(\lambda a)}-\frac{I_{-is}(\lambda r')}{I'_{-is}(\lambda a)}\right\}$$
$$\times\{I_{is}'(\lambda a)K_{is}(\lambda r)-I_{is}(\lambda r)K_{is}'(\lambda a)\}ds$$
$$=-2\pi i\sum_m{}'\frac{\cos m(\phi-\phi')}{\pi}\frac{I_m(\lambda r')}{I_m'(\lambda a)}$$
$$\times\{I_m'(\lambda a)K_m(\lambda r)-I_m(\lambda r)K'_m(\lambda a)\}.\cdots\cdots(34)$$

従って，ϕ 型の表示は，

$$V=\frac{1}{\pi^3}\int_0^{\infty}\cos\lambda(z-z')d\lambda\int_0^{\infty}\cosh s(\pi-|\phi-\phi'|)$$
$$\times\{I_{is}'(\lambda a)K_{is}(\lambda r')-I_{is}(\lambda r')K_{is}'(\lambda a)\}$$
$$\times\{I_{is}'(\lambda a)K_{is}(\lambda r)-I_{is}(\lambda r)K_{is}'(\lambda a)\}$$
$$\times\frac{ds}{I_{is}'(\lambda a)I_{-is}'(\lambda a)},\quad\cdots\cdots(35)$$

となる．

Case IV

軸に平行な二つの平面 $\phi=0$, $\phi=\alpha>0$ によって囲まれた領域

Case I の ϕ 型の表示 (20) 式に次式のような正則解を重ねると境界上でノイマン条件を満す．

$$-\frac{1}{\pi^3}\int_0^{\infty}\cos\lambda(z-z')\int_0^{\infty}\left\{\frac{\sinh s(\pi-\phi'-\alpha)}{\sinh s\alpha}\cosh s\phi\right.$$
$$\left.+\frac{\sinh s(\pi-\phi')}{\sinh s\alpha}\cosh s(\alpha-\phi)\right\}$$
$$\times K_{is}(\lambda r)K_{is}(\lambda r')ds\,d\lambda.$$

結果は

$$V=\frac{2}{\pi^3}\int_0^{\infty}\cos\lambda(z-z')\int_0^{\infty}\frac{\sinh s\pi}{\sinh s\alpha}\cosh s(\alpha-\phi')\cosh s\phi$$
$$\times K_{is}(\lambda r)K_{is}(\lambda r')ds\,d\lambda,\ \phi>\phi'. \quad\cdots\cdots(36)$$

もし $\phi<\phi'$ ならば ϕ と ϕ' を入れかえる．

(36) 式は次のように書き直せる．

$$V=\frac{i}{\pi^2}\int_0^{\infty}\cos\lambda(z-z')$$
$$\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\cos s(\alpha-\phi)\cos s\phi'}{\sin s\alpha}K_s(\lambda r)I_s(\lambda r')ds\,d\lambda,$$
$$r>r'. \quad\cdots\cdots(37)$$

留数の定理を使って (37) 式の2番目の積分を行なうと，

$$V=\frac{2}{\pi\alpha}\int_0^{\infty}\cos\lambda(z-z')\sum_m{}'$$
$$\left\{\cos\left(\frac{m\pi}{\alpha}\phi\right)\cos\left(\frac{m\pi}{\alpha}\phi'\right)K_{\frac{m\pi}{\alpha}}(\lambda r)I_{\frac{m\pi}{\alpha}}(\lambda r')\right\}$$
$$\times d\lambda,\ r>r'. \quad\cdots\cdots(38)$$

$r<r'$ の場合は (38) 式中の r と r' を交換する．

(38) 式は次のように書き直せる．

$$V=\frac{2}{\pi\alpha}\sum_m{}'\cos\left(\frac{m\pi}{\alpha}\phi\right)\cos\left(\frac{m\pi}{\alpha}\phi'\right)$$
$$\times\int_0^{\infty}\cos\lambda(z-z')$$
$$\times G_{\frac{m\pi}{\alpha}}(i\lambda r)J_{\frac{m\pi}{\alpha}}(i\lambda r')d\lambda. \quad\cdots\cdots(39)$$

(39) 式の積分の部分は次の形になる．

$$\frac{1}{2i}\int_0^{i\infty}\{e^{\lambda(z-z')}+e^{-\lambda(z-z')}\}G_{\frac{m\pi}{\alpha}}(\lambda r)J_{\frac{m\pi}{\alpha}}(\lambda r')d\lambda$$

更に上式の値は次のようになることが文献 1) に示されている．$z>z'$

$$\frac{\pi}{2}\int_0^{\infty}e^{-\lambda|z-z'|}J_{\frac{m\pi}{\alpha}}(\lambda r)J_{\frac{m\pi}{\alpha}}(\lambda r')\,d\lambda.$$

従って，

$$V=\frac{1}{\alpha}\sum_m{}'\cos\left(\frac{m\pi}{\alpha}\phi\right)\cos\left(\frac{m\pi}{\alpha}\phi'\right)$$
$$\times\int_0^{\infty}e^{-\lambda|z-z'|}J_{\frac{m\pi}{\alpha}}(\lambda r)J_{\frac{m\pi}{\alpha}}(\lambda r')d\lambda. \quad\cdots\cdots(40)$$

Case V

二つの平行平面と二つの軸平面とによって囲まれた領域，$\phi=0, \phi=\alpha$, $z=0$, $z=c$.

(40) 式から，Case II で採用したと同様の過程で，次の式が得られる．

$$V=\frac{2}{\alpha}\sum_m{}'\cos\left(\frac{m\pi}{\alpha}\phi\right)\cos\left(\frac{m\pi}{\alpha}\phi'\right)$$
$$\times\int_0^{\infty}\frac{\cosh\lambda z'\cosh\lambda(c-z)}{\sinh\lambda c}J_{\frac{m\pi}{\alpha}}(\lambda r)J_{\frac{m\pi}{\alpha}}(\lambda r')d\lambda$$
$$\cdots\cdots(41)$$

(30) 式から，Case IV で採用したと同様の過程で，この場合のノイマン関数を求めるのであるが，(30)式の第一項は対数ポテンシャルを示しているので違った方法をとらねばならない．第一項は平面内に単独の源泉がある場合のポテンシャルである．$\phi=0, \phi=\alpha$ でノイマン条件を満たすような単独の源泉によるポテンシャルは，等角写像法で簡単に得ることができる．

即ち，第一項に対応するポテンシャルは，

$$-\frac{1}{4\pi c}\Big[[\log\{r^{\frac{2\pi}{\alpha}}+r'^{\frac{2\pi}{\alpha}}-2(rr')^{\frac{\pi}{\alpha}}\cos\frac{\pi}{\alpha}(\phi-\phi')\}$$
$$+\log\{r^{\frac{2\pi}{\alpha}}+r'^{\frac{2\pi}{\alpha}}-2(rr')^{\frac{\pi}{\alpha}}\cos\pi\alpha(\phi+\phi')\}\Big]\cdots(42)$$

第二項に対応するポテンシャルは，

$$\frac{2}{\pi^2 c}\sum_{p=1}^{\infty}\cos\frac{p\pi z}{c}\cos\frac{p\pi z'}{c}$$
$$\int_0^{\infty}\frac{\sinh s\pi}{\sinh s\alpha}\cosh s(a-\phi')\cosh s\phi$$
$$\times K_{is}\left(\frac{p\pi}{c}r\right)K_{is}\left(\frac{p\pi}{c}r'\right)ds \quad\cdots\cdots(43)$$

従って ϕ 型のノイマン関数としては，

$$V=-\frac{1}{4\pi c}\Big[\log\Big\{r^{\frac{2\pi}{\alpha}}+r'^{\frac{2\pi}{\alpha}}-2(rr')^{\frac{\pi}{\alpha}}\cos\frac{\pi}{\alpha}(\phi-\phi)'\Big\}$$
$$+\log\Big\{r^{\frac{2\pi}{\alpha}}+r'^{\frac{2\pi}{\alpha}}-2(rr')^{\frac{\pi}{\alpha}}\cos\frac{\pi}{\alpha}(\phi+\phi')\Big\}\Big]$$
$$+\frac{2}{\pi^2 c}\sum_{p=1}^{\infty}\cos\frac{p\pi z}{c}\cos\frac{p\pi z'}{c}$$
$$\times\int_0^{\infty}\frac{\sinh s\pi}{\sinh s\alpha}\cosh s(\alpha-\phi')\cosh s\phi$$
$$\times K_{is}\left(\frac{p\pi}{c}r\right)K_{is}\left(\frac{p\pi}{c}r'\right)ds \quad\cdots\cdots(44)$$

(44) 式の第二項の積分は (36) から (38) 式を導いたのと同様にして r 型の形に書き直すことができる．即ち (44) 式の第一項はそのままにしておく．

$$V=-\frac{1}{4\pi c}\Big[\log\Big\{r^{\frac{2\pi}{\alpha}}+r'^{\frac{2\pi}{\alpha}}-2(rr')^{\frac{\pi}{\alpha}}\cos\frac{\pi}{\alpha}(\phi-\phi')\Big\}$$
$$+\log\Big\{r^{\frac{2\pi}{\alpha}}+r'^{\frac{2\pi}{\alpha}}-2(rr')^{\frac{\pi}{\alpha}}\cos\frac{\pi}{\alpha}(\phi+\phi')\Big\}\Big]$$
$$+\frac{4}{c\alpha}\sum_{p=1}^{\infty}\cos\frac{p\pi z}{c}\cos\frac{p\pi z'}{c}\sum_m{}'\cos\frac{m\pi}{\alpha}\phi\cos\frac{m\pi}{\alpha}\phi'$$
$$\times K_{\frac{m\pi}{\alpha}}\left(\frac{p\pi r}{c}\right)I_{\frac{m\pi}{\alpha}}\left(\frac{m\pi r'}{c}\right), r>r'. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(45)$$

Case VI

二つの軸平面と円筒によって囲まれた領域；$\phi=0$, $\phi=\alpha$, $r=a$.

Case IV の r 型の表示式 (38) より $r>r'$ ならば

$$V=\frac{2}{\pi\alpha}\int_0^{\infty}\cos\lambda(z-z')d\lambda\sum_m{}'\cos\frac{m\pi}{\alpha}\phi\cos\frac{m\pi}{\alpha}\phi'$$
$$\times\Big\{I_{\frac{m\pi}{\alpha}}{}'(\lambda a)K_{\frac{m\pi}{\alpha}}(\lambda r)-I_{\frac{m\pi}{\alpha}}(\lambda r)K_{\frac{m\pi}{\alpha}}{}'(\lambda a)\}$$
$$I_{\frac{m\pi}{\alpha}}(\lambda r')/I_{\frac{m\pi}{\alpha}}{}'(\lambda a). \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(46)$$

(46) 式を書き直すと

$$V=\frac{1}{\pi i\alpha}\sum_m{}'\cos\frac{m\pi}{\alpha}\phi\cos\frac{m\pi}{\alpha}\phi'\int_{i\infty}^{i\infty}e^{-\lambda|z-z'|}\frac{J_{\frac{m\pi}{\alpha}}(\lambda r')}{J'_{\frac{m\pi}{\alpha}}(\lambda a)}$$
$$\times\Big\{J'_{\frac{m\pi}{\alpha}}(\lambda a)G_{\frac{m\pi}{\alpha}}(\lambda r)-G'_{\frac{m\pi}{\alpha}}(\lambda a)J_{\frac{m\pi}{\alpha}}(\lambda r)\Big\}d\lambda. \quad\cdots(47)$$

コーシーの定理を使って書き直すと，

$$V=-\frac{1}{\alpha a^2}|z-z'|+\frac{1}{\alpha a}\sum_{l=2}^{\infty}\frac{J_0\left(\gamma_{0l}\frac{r}{a}\right)J_0\left(\gamma_{0l}\frac{r'}{a}\right)}{\gamma_{0l}J_0{}^2(\gamma_{0l})}$$
$$\times\exp\left(-\gamma_{0l}\frac{|z-z'|}{a}\right)+\frac{2}{\alpha a}\sum_{m=1}^{\infty}\cos\frac{m\pi}{\alpha}\phi\cos\frac{m\pi}{\alpha}\phi'$$
$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\gamma_{ml}}{\gamma_{ml}{}^2-\left(\frac{m\pi}{\alpha}\right)^2}\frac{J_{\frac{m\pi}{\alpha}}\left(\gamma_{ml}\frac{r}{a}\right)J_{\frac{m\pi}{\alpha}}\left(\gamma_{ml}\frac{r'}{a}\right)}{J_{\frac{m\pi}{\alpha}}{}^2(\gamma_{ml})}$$
$$\times\exp\left(-\gamma_{ml}\frac{|z-z'|}{a}\right). \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(48)$$

(48)式を導くさい，無限大の定数 $\frac{2}{\alpha\pi a^2}\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\rho}$ を除外している．

Case III の ϕ 型の表式 (35) より

$$V=\frac{2}{\pi^3}\int_0^{\infty}\cos\lambda(z-z')d\lambda\int_0^{\infty}\frac{\sinh s\pi}{\sinh s\alpha}\cosh s(\alpha-\phi)$$

$$\cosh s\phi'\cdot f(r)f(r')\times\frac{ds}{I_{is}'(\lambda a)I_{-is}'(\lambda a)}. \qquad \cdots\cdots(49)$$

ここで

$$f(r)=K_{is}(\lambda r)I_{is}'(\lambda a)-I_{is}(\lambda r)K_{is}'(\lambda a). \quad \cdots\cdots(50)$$

この章で導いた解のうち，Case II の z 型の表示，Case III の r,ϕ 型，Case V の z 型，Case VI r 型，ϕ 型の表示は無限大の定数を含んでいる．従ってここで与えられた式に従って計算すると発散してしまう．しかし形式的であってもこれを利用して実際に問題を解くことは可能である．

5. 有限領域の場合

正または負の単独の源泉がある場合，全表面上で $\dfrac{\partial\phi}{\partial n}=0$ の条件を満足させることはできない．従って正，負一対の源泉がある場合のポテンシャルを考えることにする．まず領域として有限長円柱を考える．

Case VII　$z=0,\ z=c,\ r=a$

今 Case II の r 型の表示 (29) 式に注目してみよう．

ラプラス方程式の正則解を重ね合せ，半径 $r=a$ の円筒面上でノイマン条件を満たすようにできるか考えてみる．もし (29) 式の第一項がなければ（こういう仮定は物理的に何の意味もないが）即ち第二項のみであればそれは可能である．ノイマン関数としては第一項があって，はじめて物理的に意味があり，第一項はノイマン問題の特徴をよくあらわしている．

正及び負の源泉が $+1(r_1,\phi_1,z_1)$, $-1(r_2,\phi_2,z_2)$ に存在している時のポテンシャルは，

$$V=-\frac{\log\{R_1\cdot R_1'/R_2\cdot R_2'\}}{2\pi c}+\frac{2}{\pi c}\sum_{p=1}^{\infty}\cos\frac{p\pi z}{c}\cos\frac{p\pi z_1}{c}\sum_m{}'\frac{I_m\left(\frac{p\pi r_1}{c}\right)}{I_m'\left(\frac{p\pi a}{c}\right)}\times\left\{I_m'\left(\frac{p\pi a}{c}\right)K_m\left(\frac{p\pi r}{c}\right)-I_m\left(\frac{p\pi r}{c}\right)K_m'\left(\frac{p\pi a}{c}\right)\right\}$$
$$\cos m(\phi-\phi_1)-\frac{2}{\pi c}\sum_{p=1}^{\infty}\cos\frac{p\pi z}{c}\cdot\times\cos\frac{p\pi z_2}{c}\sum_m{}'\frac{I_m\left(\frac{p\pi r_2}{c}\right)}{I_m'\left(\frac{p\pi a}{c}\right)}\left\{I_m'\left(\frac{p\pi a}{c}\right)K_m\left(\frac{p\pi r}{c}\right)-I_m\left(\frac{p\pi r}{c}\right)K_m'\left(\frac{p\pi a}{c}\right)\right\}\cos m(\phi-\phi_2), \quad\cdots(51)$$

ここで

$$\left.\begin{aligned}R_1&=\sqrt{r^2+r_1^2-2rr_1\cos(\phi-\phi_1)}\\ R_1'&=\sqrt{r^2+\left(\frac{a^2}{r_1}\right)^2-2r\left(\frac{a^2}{r_1}\right)\cos(\phi-\phi_1)}\\ R_2&=\sqrt{r^2+r_2^2-2rr_2\cos(\phi-\phi_2)}\\ R_2'&=\sqrt{r^2+\left(\frac{a^2}{r_2}\right)^2-2r\left(\frac{a^2}{r_2}\right)\cos(\phi-\phi_2)}\end{aligned}\right\}\cdots(52)$$

であり，(51) 式は $r>r_1$, $r>r_2$ の場合の式であって，$r<r_1, r<r_2$ の場合には (51) 式中の対応する項の r, r_1 又は r, r_2 を入れかえるとよい．

z 型の表式を導くため Case III の z 型の式 (33) に注目すると，先の r 型の例と同様，第一項の存在がノイマン関数の特徴を示している．前と同様 (r_1,ϕ_1,z_1) に正の源泉，(r_2,ϕ_2,z_2) に負の源泉がある場合の任意の点のポテンシャルは

$$V(r,\theta,z)=\frac{g(z,z_1,z_2)}{2\pi a^2}+\frac{1}{2\pi a}\Bigg[\sum_{l=2}^{\infty}\frac{J_0\left(\gamma_{0l}\frac{r}{a}\right)}{\gamma_{0l}J^2(\gamma_{0l})}\left\{J_0\left(\gamma_{0l}\frac{r_1}{a}\right)\times\frac{\cosh\gamma_{0l}\frac{z}{a}\cosh\gamma_{0l}\frac{c-z_1}{a}}{\sinh\gamma_{0l}\frac{c}{a}}-J_0\left(\gamma_{0l}\frac{r_2}{a}\right)\frac{\cosh\gamma_{0l}\frac{z}{a}\cosh\gamma_{0l}\frac{c-z_2}{a}}{\sinh\gamma_{0l}\frac{c}{a}}\right\}\Bigg]$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2\gamma_{nl}J_n\left(\gamma_{nl}\frac{r}{a}\right)}{(\gamma_{nl}^2-n^2)J_n^2(\gamma_{nl})}\left\{J_n\left(\gamma_{nl}\frac{r_1}{a}\right)\frac{\cosh\gamma_{nl}\frac{z}{a}\cosh\gamma_{nl}\frac{c-z_1}{a}}{\sinh\gamma_{nl}\frac{c}{a}}-J_n\left(\gamma_{nl}\frac{r_2}{a}\right)\frac{\cosh\gamma_{nl}\frac{z}{a}\cosh\gamma_{nl}\frac{c-z_2}{a}}{\sinh\gamma_{nl}\frac{c}{a}}\right\}\Bigg],$$

$$z_1,\ z_2>z. \quad\cdots\cdots(53)$$

ここで $g(z,z_1,z_2)$ は，次式で与えられる．

$$g(z,z_1,z_2)=\begin{cases}z_2-z_1 & 0\leqq z<z_1,\\ -2z+z_1+z_2 & z_1\leqq z<z_2 \quad\cdots\cdots(54)\\ -(z_2-z_1) & z_2\leqq z\leqq c\end{cases}$$

ただし便益上 $z_2>z_1$ と仮定している．(53) 式は $z>z_2, z>z_1$ の場合，又は $z>z_2, z<z_1, z_2>z>z_1$ の場合に書き直されなければならない．

ϕ 型の表示は，

$$V=-\frac{\log\frac{R_1R_1'}{R_2\cdot R_2'}}{2\pi c}+\frac{2}{\pi^2 c}\Bigg[\sum_{p=1}^{\infty}\cos\frac{p\pi z}{c}\cos\frac{p\pi z_1}{c}$$

$$\times\int_0^\infty \cosh s(\pi-|\phi-\phi_1|)f(r)f(r_1)ds/$$

$$\{I_{is}'(\lambda a)I_{-is}'(\lambda a)\}-\sum_{p=1}^{\infty}\cos\frac{p\pi z}{c}\cos\frac{p\pi z_2}{c}$$

$$\times\int_0^\infty \cosh s(\pi-|\phi-\phi_2|)f(r)f(r_2)ds$$

$$/\left\{I_{is}'\left(\frac{p\pi}{c}a\right)I_{-is}'\left(\frac{p\pi}{c}a\right)\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(55)$$

ここで

$$f(r)=I_{is}'\left(\frac{p\pi}{c}a\right)K_{is}\left(\frac{p\pi}{c}r\right)-I_{is}\left(\frac{p\pi}{c}r\right)K_{is}'\left(\frac{p\pi}{c}a\right).$$

である．

6. 応　用　例

6・1 r 型の問題

有限長円柱の端面に直線状配列の4探針がある場合の解析を行なってみよう．電流端子の位置は $\left(\frac{3}{2}s,\ 0,\ 0\right)$ 及び，$\left(\frac{3}{2}s,\ \pi,\ 0\right)$ ここで s は探針の間隔，である．電圧端子の位置は $\left(\frac{s}{2},\ 0,\ 0\right)$ 及び $\left(\frac{s}{2},\ \pi,\ 0\right)$ とする．この場合は $z=z'$ 及び $\phi=\phi',r\doteqdot r'$ であるので r 型の典型である．(51) 式を採用する．

$\left(\frac{s}{2},\ 0,\ 0\right)$ 点のポテンシャルは $V\left(\frac{s}{2},\ 0,\ 0\right)$ は流入する電流を I 試料の抵抗率を ρ とすると

$$V\left(\frac{s}{2},\ 0,\ 0\right)=+\frac{I\rho}{2\pi c}\left\{-\log\frac{4a^2-3s^2}{4a^2+3s^2}+\log 2\right\}$$

$$+\frac{2I\rho}{\pi c}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_m{}'\frac{I_m\left(p\pi\frac{s}{2c}\right)}{I_m'\left(\frac{p\pi}{c}a\right)}\times\left\{I_m'\left(\frac{p\pi}{c}a\right)K_m\left(\frac{p\pi}{c}\frac{3s}{2}\right)\right.$$

$$\left.-I_m\left(\frac{p\pi}{c}\frac{3s}{2}\right)K_m'\left(\frac{p\pi}{c}a\right)\right\}\{1-(-1)^m\}\cdots\cdots\cdots(56)$$

$V\left(\frac{s}{2},\ 0,\ 0\right)=-\left(\frac{s}{2},\ \pi,\ 0\right)$　の関係があるので

電圧端子間の電位差は

$$\varDelta V=\frac{I\rho}{\pi c}\left[\log 2+\log\frac{4a^2+3s^2}{4a^2-3s^2}+4\sum_{p=1}^{\infty}\sum_m{}'\frac{I_m\left(\frac{p\pi}{c}\frac{s}{2}\right)}{I_m'\left(\frac{p\pi}{c}a\right)}\right.$$

$$\times\left\{I_m'\left(\frac{p\pi}{c}a\right)K_m\left(\frac{p\pi}{c}\frac{3s}{2}\right)\right.$$

$$\left.\left.-I_m\left(\frac{p\pi}{c}\frac{3s}{2}\right)K_m'\left(\frac{p\pi}{c}a\right)\right\}(1-(-1)_m)\right]\cdots(57)$$

従って補正係数 C. D. の定義として文献4) の方法を採用すると

$$\text{C.D.}=\frac{2\pi s}{\rho}\frac{\varDelta V}{I}=\frac{2s}{c}\left[\log 2+\log\frac{4a^2+3s^2}{4a^2-3s^2}\right.$$

$$+8\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{I_{2m-1}\left(\frac{p\pi}{c}\frac{s}{2}\right)}{I_{2m-1}'\left(\frac{p\pi}{c}a\right)}$$

$$\times\left\{I_{2m-1}'\left(\frac{p\pi}{c}a\right)K_{2m-1}\left(\frac{p\pi}{c}\frac{3}{2}s\right)\right.$$

$$\left.\left.-I_{2m-1}\left(\frac{p\pi}{c}\frac{3}{2}s\right)K_{2m-1}'\left(\frac{p\pi}{c}a\right)\right\}\right]\cdots\cdots(58)$$

半無限長の場合には，即ち $c\to\infty$ の場合には

$$\frac{p}{c}\pi=\lambda,\frac{\pi}{c}=d\lambda\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(59)$$

と考えて総和を積分に変える．結果は

$$\text{C.D.}=\frac{16s}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^\infty\frac{I_{2m-1}\left(\lambda\frac{s}{2}\right)}{I_{2m-1}'(\lambda a)}\left\{I_{2m-1}'(\lambda a)K_{2m-1}\left(\lambda\frac{3}{2}s\right)\right.$$

$$\left.-I_{2m-1}\left(\lambda\frac{3}{2}s\right)K_{2m-1}'(\lambda a)\right\}d\lambda\cdots\cdots\cdots\cdots(60)$$

(60) 式は無限長円柱の r 型の表式 (31) からも導き出すことができる．

長さ c が非常に小さい場合，(58) 式中の [ ] 中の第三項は急速に消滅する．従って，

$$C.D.=\frac{2s}{c}\left[\log 2+\log\frac{4a^2+3s^2}{4a^2-3s^2}\right]\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(61)$$

(61) 式は円形板（厚さが非常に小さい）の場合に導かれるものに一致している．

更に有限長円柱の半径 a が非常に大きい時，

$$\text{C.D.}=\frac{2s}{c}\left[\log 2+8\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}I_{2m-1}\left(\frac{p\pi}{c}\frac{s}{2}\right)K_{2m-1}\left(\frac{p\pi}{c}\frac{3}{2}s\right)\right.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(62)$$

となる．(62) 式は Case II の r 型の表式 (29) 式から導かれるものに一致している．

6・2 ϕ 型の問題

有限長円柱の端面中央に方陣配列の4探針がある場合の解析を行なってみよう．方陣の1つの辺の長さを l とする．電流端子の位置は $\left(\frac{l}{\sqrt{2}},0,0\right)$ 及び $\left(\frac{l}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{2},0\right)$ 電圧端子の位置は $\left(\frac{l}{\sqrt{2}},\pi,0\right)$ 及び $\left(\frac{l}{\sqrt{2}},\frac{3}{2}\pi,\ 0\right)$ である．$z=z_1'=0\ r=r'=\frac{l}{\sqrt{2}},\ \phi\doteqdot\phi'$ であるので ϕ 型の典型である．(55) 式を採用すればよい．$\left(\frac{l}{\sqrt{2}},\pi,0\right)$ 点のポテンシャルは，

$$V\left(\frac{l}{\sqrt{2}},\ \pi,\ 0\right)=\frac{I\rho}{4\pi c}\left\{\log 2+\log\frac{(2a^2+l^2)^2}{4a^4+l^4}\right\}+\frac{I\rho}{\pi^2 c}\left[\sum_{p=1}^{\infty}\right.$$

$$\times\int_0^\infty\left(\cosh s\frac{\pi}{2}-1\right)$$

$$\times\cdot\frac{\left\{I_{is}'\left(\frac{p\pi}{c}a\right)K_{is}\left(\frac{p\pi}{c}\frac{l}{\sqrt{2}}\right)-I_{is}\left(\frac{p\pi}{c}\frac{l}{\sqrt{2}}\right)K_{is}\left(\frac{p\pi}{c}a\right)\right\}^2}{I_{is}'\left(\frac{p\pi}{c}a\right)I_{-is}'\left(\frac{p\pi}{c}a\right)}$$

$$\left.ds\right]\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(63)$$

$V\left(\frac{l}{\sqrt{2}},\frac{3}{2}\pi,0\right)=-V\left(\frac{l}{\sqrt{2}},\pi,0\right)$ であるから，

$$\varDelta V=V\left(\frac{l}{\sqrt{2}},\frac{3}{2}\pi,0\right)-V\left(\frac{l}{\sqrt{2}},\pi,0\right)=2V\left(\frac{l}{\sqrt{2}},\pi,0\right)$$

$$=\frac{I\rho}{2\pi c}\left\{\log 2+\log\frac{(2a^2+l^2)^2}{4a^4+l^4}\right\}$$

$$+\frac{2I\rho}{\pi^2 c}\left[\sum_{p=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\left(\cosh s\frac{\pi}{2}-1\right)\right.$$

$$\cdot\frac{\left\{I_{is}'\left(\frac{p\pi}{c}a\right)K_{is}\left(\frac{p\pi}{c}\frac{l}{\sqrt{2}}\right)-I_{is}\left(\frac{p\pi}{c}\frac{l}{\sqrt{2}}\right)K_{is}\left(\frac{p\pi}{c}a\right)\right\}^2}{I_{is}'\left(\frac{p\pi}{c}a\right)I_{-is}'\left(\frac{p\pi}{c}a\right)}$$

$$\left.\times ds\right]\cdots\cdots(64)$$

半無限長の場合は，即ち $c\to\infty$ の場合，前と同様に

$$\frac{p\pi}{c}=\lambda\quad \frac{\pi}{c}=d\lambda$$

と置いて，総和を積分に変える．

$$\varDelta V=\frac{2I\rho}{\pi^3}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\left(\cosh\frac{s\pi}{2}-1\right)$$

$$\cdot\frac{\left\{I_{is}'(\lambda a)K_{is}\left(\lambda\frac{l}{\sqrt{2}}\right)-I_{is}\left(\lambda\frac{l}{\sqrt{2}}\right)K_{is}'(\lambda a)\right\}^2}{I_{is}'(\lambda a)I_{-is}'(\lambda a)}dsd\lambda.$$

$$\cdots\cdots(65)$$

有限長円柱の厚さ c が非常に小さい場合は (64) 式中の第二項は消滅する．即ち，

$$\varDelta V=\frac{I\rho}{2\pi c}\left\{\log 2+\log\frac{(2a^2+l^2)^2}{4a^4+l^4}\right\}.\quad\cdots\cdots(66)$$

6・3　z 型の問題

有限長円柱の同一の母線上に正負の電流源がある場合を考える．電流源の位置は $\left(a,\ 0,\frac{c-3s}{c}\right)$ 及び $\left(a,\ 0,\frac{c+3s}{2}\right)$，電圧端子の位置は $\left(a,\ 0,\frac{c+s}{2}\right)$ 及び $\left(a,\ 0,\frac{c-s}{2}\right)$ とする．$r=r'=a,\ \phi=\phi'=0$ で z 座標のみ違うので z 型の表示式 (53) を採用する．

$\left(a,\ 0,\frac{c-s}{2}\right)$ 点のポテンシャルは，

$$V\left(a,\ 0,\frac{c-s}{2}\right)=\frac{s}{2\pi a^2}+\frac{1}{2\pi a}\left[\sum_{l=2}^{\infty}\frac{\cosh\gamma_{0l}\frac{c-3s}{2a}}{\gamma_{0l}\sinh\gamma_{0l}\frac{c}{a}}\right.$$

$$\times\left\{\cosh\gamma_{0l}\frac{c+s}{2a}-\cosh\gamma_{0l}\frac{c-s}{2a}\right\}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2v_{nl}}{(\gamma_{nl}^2-n^2)}\frac{\cosh\gamma_{nl}\left(\frac{c-3s}{2a}\right)}{\sinh\gamma_{nl}\frac{c}{a}}$$

$$\left.\times\left\{\cosh\gamma_{nl}\frac{c+s}{2a}-\cosh\gamma_{nl}\frac{c-s}{2a}\right\}\right].\quad\cdots\cdots(67)$$

対称性より $V\left(a,\ 0,\frac{c-s}{2}\right)=-V\left(a,\ 0,\frac{c+s}{2}\right)$ であるから $\varDelta V=2V\left(a,\ 0,\frac{c-s}{2}\right)$ である．

従って，

$$\mathrm{C.D.}=2\left(\frac{s}{a}\right)^2$$

$$+2\left(\frac{s}{a}\right)\left[\sum_{l=2}^{\infty}\frac{\cosh\gamma_{0l}\frac{c-3s}{2a}}{\gamma_{0l}\sinh\gamma_{0l}\frac{c}{a}}\left\{\cosh\gamma_{0l}\frac{c+s}{2a}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\cosh\gamma_{0l}\frac{c-s}{2a}\right)\right\}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2\gamma_{nl}\cosh\gamma_{nl}\frac{c-s}{2a}}{(\gamma_{nl}^2-n^2)\sinh\gamma_{nl}\frac{c}{a}}$$

$$\left.\times\left\{\cosh\gamma_{nl}\frac{c+s}{2a}-\cosh\gamma_{nl}\left(\frac{c-s}{2a}\right)\right\}\right].\quad\cdots\cdots(68)$$

$c\to\infty$ の時，

$$\mathrm{C.D.}\simeq 2\left(\frac{s}{a}\right)^2+2\left(\frac{s}{a}\right)\left[\sum_{l=2}^{\infty}\frac{1}{\gamma_{0l}}\left\{e^{-\gamma_{0l}\frac{s}{a}}-e^{-\gamma_{0l}\frac{2s}{a}}\right\}\right.$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2\gamma_{nl}}{\gamma_{nl}^2-n^2}\left\{e^{-\gamma_{nl}\frac{s}{a}}-e^{-\gamma_{nl}\frac{2s}{a}}\right\}\right].\quad\cdots\cdots(69)$$

半径 a が非常に小さい時，

$$\mathrm{C.D.}=2\left(\frac{s}{a}\right)^2.\cdots\cdots(70)$$

7. お わ り に

円筒座標系においてラプラス方程式をノイマン条件のもとに解くことを考えて，その際に必要なノイマン関数を種々のケースについて考察し，いわゆる r, z, ϕ 型の表示に対応する式を与えた．

ディリクレ問題と違ってノイマン問題は種々のむずかしい点があり，ここで著書が導いた式には誤りが含まれているかも知れない．

いままで，ノイマン関数については，一般的な形で系統的には与えられていなかった．特別な場合に対応するノイマン関数が若干の本に散見されるにすぎない．例えば，文献 1) の (4・99) 式，や文献 2) の p. 119 の (12・9) 式などがある．前者は無限長円柱の r 型の表示で $r'=a$ とした場合であり，後者は z 型の表示で $r'=0$ とした場合である．後者について一言付け加えれば $k_l=0$ の項を考慮していないので，そのままでは誤りである．

最後に応用例を若干示したが，悪い応用例を一つあげると H. H. Gegenworth[5] の報告がある．z 型の問題を解析するのに r 型の表示を採用し，$r=r'$ の条件のもとに計算を行なっているが，この論文で既に見てきたように r 型の表示は $r=r'$ の条件の時一番収束が悪い．

今後ラプラス方程式をノイマン条件のもとに解く場合，適当な形のノイマン関数を選んで収束の速い計算

を行なうことができるようになった．

謝　　　辞

終りに，私の研究に対し，興味を示していただき，度々有益な助言をいただきました，京都大学工学部教授清野武氏に心から感謝の意を表します．さらに常々から激励の言辮をいただきます福井工業大学石橋文男博士に感謝の意を表します．

文　　　献

1) 清野　武：電磁気学 I.
2) A. Gray and T.M. MacRobert: Treatise on Bessel Functions and Their Applications to Physics, Dover Publications, New York (1966).
3) S. Murashima et al.: Japan J. appl. Phys. **9** (1970) 58.
4) S. Murashima et al.: Japan J. appl. Phys. **9** (1970) 1340.
5) H.H. Gegenworth: Solid State Electronics **11** (1968) 787.
6) J. Dougall, Proc. Edin. Math. Soc., vol. XVIII
7) 数学概論・応用編：寺沢寛一著.

付　　　録

次の関数を考える．

$$f(m)=\frac{\cos m(\pi-\phi+\phi')}{\sin m\pi}\frac{I_m(\lambda r')}{I_m'(\lambda a)}\{I_m'(\lambda a)K_m(\lambda r)-I_m(\lambda r)K_m'(\lambda a)\}. \quad \cdots\cdots(付1)$$

m 平面上の虚数軸，虚数軸の右側で考えた無限大の半径及び虚数軸の右側で考えた原点のまわりの小円からなる積分路で $f(m)$ を積分することを考えよう．

すると $r>r'$ であると無限大の半円上の積分は消える．従って，

$$\oint f(m)dm=\int_{-i\infty}^{i\infty}f(m)dm+i\frac{I_0(\lambda r')}{I_0'(\lambda a)}\{I_0'(\lambda a)K_0(\lambda r)-I_0(\lambda r)K_0'(\lambda a)\}. \quad \cdots\cdots(付2)$$

（付２）式の第二項は原点のまわりの小半円上での積分である．一方においてこの積分は積分路に含まれる被積分関数 $f(m)$ の極の留数の和の $-2\pi i$ 倍に等しい．即ち，

$$\oint f(m)dm=-2i\sum_{m=1}^{\infty}\cos m(\phi-\phi')\frac{I_m(\lambda r')}{I_m'(\lambda a)}\{I_m'(\lambda a)K_m(\lambda r)-I_m(\lambda r)K_m'(\lambda a)\}. \quad \cdots\cdots(付3)$$

更に（付２）式の第一項は，次のように書き直すことができる．

$$\int_{-i\infty}^{i\infty}f(m)dm=\int_0^{\infty}\frac{\cosh s(\pi-\phi+\phi')}{\sinh s\pi}\left\{\frac{I_{is}(\lambda r')}{I_{is}'(\lambda a)}-\frac{I_{-is}(\lambda r')}{I_{-is}'(\lambda a)}\right\}\times\{I_{is}'(\lambda a)K_{is}(\lambda r)-I_{is}(\lambda r)K_{is}'(\lambda a)\}ds. \quad \cdots\cdots(付4)$$

（付３）を導く際に次の（付５）式を使った．

$$\left.\begin{aligned}&K_t(\xi)=K_{-t}(\xi),\\&K_t(z)=\frac{\pi}{2\sin t\pi}\{I_{-t}(z)-I_t(z)\}.\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(付5)$$

（付２），（付３）及び（付４）式から本文中の (34) 式が導かれる．