

点支持を有する偏平シェルの線形解析

—平行2辺が面内変位を拘束した固定支持, 他の平行2辺に点支持を有する偏平シェルの静的, 及び固有振動数解析—

皆川 洋一・前畑 達実

(受理 昭和60年5月31日)

LINEAR ANALYSES OF SHALLOW TRANSLATIONAL SHELLS WITH POINT SUPPORTS

— Static and Natural Frequency Analyses of Shallow Translational Shells Clamped along Parallel Two Edges and Supported with Points on the other Edges —

Youichi MINAKAWA and Tatumi MAEHATA

This paper adopts the Galerkin's method to analyze shallow translational shells with point supports, and examines the effects of Gaussian curvatures and boundary conditions on displacements, moments, membrane forces, and natural frequencies of the shells.

序

一般のシェルは, その形状に応じた座標系を導入して解析しなければならないが, 偏平シェルは偏平理論を導入すると直交座標で解析することが可能となる。この理論を導入して得られる偏平シェルを支配する Vlasov 式に基づいて, 偏平シェルは解析されるのが通例である。Vlasov 式に基づくことにより, 4 隅点が同一平面上にあり射影面が矩形であるシェルは, 辺長比 γ , Gauß 曲率比 λ , スパンライズ比 μ , 及び Poisson 比 ν をパラメータとして, それらパラメータの変化に伴うシェルの挙動の推移を統一的に調べることができる。

Generalized Levy 解を用いて各種の境界条件のもとで, 偏平シェルの静的解析が行なわれている^{1), 2)}。その中で, 周辺ローラー支持された完全 H. P シェルの場合, 曲率の効果がなく平板に近い挙動を示し, 中央点の変位においては, 周辺ピン支持の場合と比較して約 25 倍もの変位を示すことが報告されており,^{3), 5)} 周辺で面内変位を拘束することの重要性が指摘されている。しかしながら, 現実のシェルが周辺ピンや周辺ローラーの境界条件に近い形で利用されることは少なく, すそ梁や小柱によって端部が支持されるものと考えられる。

一方, シェルを支配するパラメータがシェルの挙動

へ及ぼす影響を的確に把握するためには, 一樣静水圧のもとでの静的解析のみでは不十分であり, これらパラメータがシェルの剛性行列の固有値及び固有モードへ及ぼす効果を調べる必要がある。固有振動数は重要な固有値のひとつである。しかし, Generalized Levy 解を適用して固有振動数を解析する場合, 特性方程式の係数の中に未知の固有振動数が入ってくるため, 振動数方程式を解析するのが困難になることが報告されている⁴⁾。

ここでは, 静的解析, 固有振動数解析の両方に適用できる Galerkin 法を利用して, 点支持を有する偏平シェルの挙動を調べる。研究の一環として⁶⁾, 平行2辺で面内変位を拘束した固定支持とし, 他の平行2辺で任意の数の点支持を有する偏平シェルを解析する。

解析手順として, まず, 平行2辺が面内変位を拘束した固定支持, 他の平行2辺が自由辺である偏平シェルの解析を行ない, 次に点支持を有する偏平シェルの解析を行なう。点支持を有する偏平シェルは付帯条件のある変分問題であり, 自由辺を有する偏平シェルにおける自由辺上に点支持を付加し, その点における変位拘束条件を新たに追加して解析される。

1. 偏平シェルの形状

ここでは中立面の形状が次式で表わされる, 射影面が矩形で, 4 隅点が同一平面上にある偏平シェルの扱ふ。(図1)

$$Z = \frac{1}{2} \left\{ \frac{x(x-a)}{R_x} + \frac{(y-b/2)(y+b/2)}{R_y} \right\} \quad (1)$$

ここに, R_x, R_y は x, y 方向の曲率半径, a, b は x, y 方向の辺長を表わす。

これにより, Gauß 曲率比 $\lambda = R_x/R_y$ を変化させれば偏平シェルは, E. P. シェル ($\lambda > 0$), 円筒シェル ($\lambda = 0$), H. P. シェル ($\lambda < 0$) と推移していく。

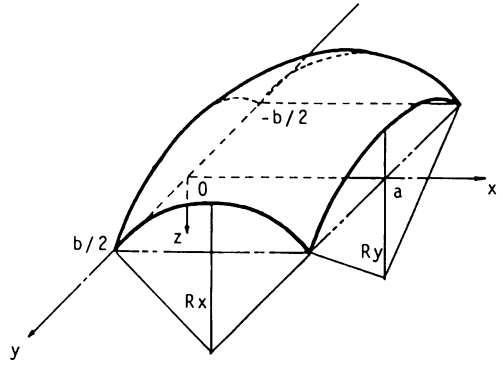


図1 シェルの形状

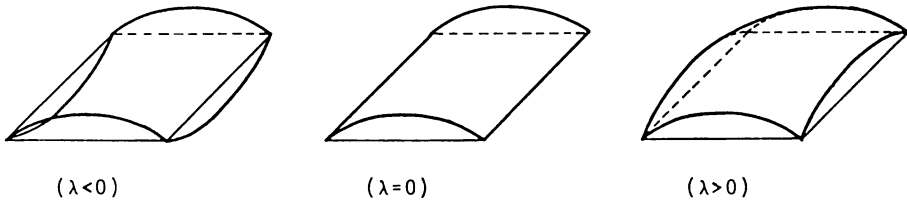


図2 シェルの形状変化

2. 偏平シェルの基礎式

このシェルについて面要素を作る線素の長さ, その線素の $x-y$ 平面への射影の長さが等しいと仮定する。

シェル面が有する $y = \text{const}$ 曲線の接線方向変位を u , $x = \text{const}$ 曲線の接線方向変位を v , 及び法線方向変位を w とする。

また, 中立面の x 方向及び y 方向の歪を $\epsilon_x^0, \epsilon_y^0$, 面内せん断歪 γ_{xy}^0 として次式を採用する。

$$\begin{aligned} \epsilon_x^0 &= \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{w}{R_x} \\ \epsilon_y^0 &= \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R_y} \\ \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (2)$$

面内力 N_x, N_y, N_{xy} , モーメント M_x, M_y, M_{xy} , 及び面内変位 u, v は法線方向変位 w , 応力関数 ϕ を用いて次式のように表わされる。

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} & N_y &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} & N_{xy} &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \\ M_x &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \\ M_{xy} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ V_x &= -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \\ V_y &= -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} u &= \int \left[\frac{1}{Eh} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) + \frac{w}{R_x} \right] dx \\ v &= \int \left[\frac{1}{Eh} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + \frac{w}{R_y} \right] dy \end{aligned}$$

ここに, E: ヤング係数, ν : Poisson 比
D: 板の曲げ剛性

偏平シェルの支配する汎関数 π の第1変分を応力関数 ϕ , モーメント M_x, M_y, M_{xy} , 換算せん断力 V_x, V_y , 及び u, v, w で表わし次式を得る。

$$\begin{aligned} \delta \pi &= \iint \left(D \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{1}{R_x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{1}{R_y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right. \\ &\quad \left. - P + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta w dx dy + \int \left(- \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \delta v + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \delta u + M_y \frac{\partial \delta w}{\partial y} - V_y \delta w \right) dx + \int \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \delta u - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \delta v - Mx \frac{\partial \delta w}{\partial x} + Vx \delta w\right) dy \quad (4)$$

ここに、 h ：シェル厚、 ρ ：質量密度

P ：法線方向分布外力

(2)式の u, v を消去して得られる適合条件式を応力関数 ϕ を用いて表すと次式となる。

$$\frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \phi + \frac{1}{Rx} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{1}{Ry} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \quad (5)$$

(4)式から得られる Euler 方程式と(5)式が Vlasov 型偏平シェルの基礎式である。

3. 自由辺を有する偏平シェルの解析

図1に示すシェルにおいて、 $y = \pm b/2$ が自由辺であり、 $x = 0, a$ において面内変位を拘束した固定支持であるシェルの解析を行う(図3)。また、ここでは、 $x = a/2, y = 0$ に関して対称変形する場合を扱う。

解析手法は、法線方向変位 w に関して支持辺では幾何学的境界条件を満足し、自由辺での境界条件を導入できるように仮定する。その仮定した変位 w を用いて(5)式の適合条件式より応力関数 ϕ の一般解を厳密に求め、(4)式の Euler 方程式に代入し、Galerkin 法を適用する。それにより、離散化された運動方程式が得られる。

この偏平シェルの境界条件は次式となる。

$$x = 0, a \text{ で } w = \partial w / \partial x = 0, u = v = 0$$

$$(6-a, b)$$

$$y = \pm b/2 \text{ で } My = Vy = 0, Ny = Nxy = 0$$

$$(6-c, d)$$

法線方向変位は、(6-a) 式の境界条件を満足し、

$$w(x, y) = \sum_m \left(B_1^m \cosh \frac{m\pi}{a} y + B_2^m \frac{m\pi}{a} y \sinh \frac{m\pi}{a} y + K_s \frac{y^2}{b^2} + K_b \frac{y^4}{b^4} \right) \times \left(\cos \frac{m\pi}{a} x - 1 \right) + \sum_n \left(w_{m0} + \sum_n w_{mn} \cos \frac{n\pi}{b} y \right) \left(\cos \frac{m\pi}{a} x - 1 \right) \quad (7)$$

ここに、 m, n は偶数をとる。

(7)式を(5)式へ代入し、応力関数 ϕ の特解 ϕ_p は次式のように求まる。

$$\begin{aligned} \phi_p = & \frac{Eha^2}{Rx} \left[\sum_m \left[-\frac{1}{8} \left\{ B_1^m (1-\lambda) + B_2^m (1+\lambda) \right\} \frac{y}{a^2} \sinh \frac{m\pi}{a} y \cdot \left(x - \frac{a}{2} \right) \sin \frac{m\pi}{a} x \right. \right. \\ & \left. \left. - B_2^m (1-\lambda) \frac{m\pi}{12a^3} \left\{ y^2 \cosh \frac{m\pi}{a} y \cdot \left(x - \frac{a}{2} \right) \sin \frac{m\pi}{a} x + \frac{1}{2} y \sinh \frac{m\pi}{a} y \cdot \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \times \cos \frac{m\pi}{a} x \right\} + \frac{1}{m^2 \pi^2} \left\{ \left(B_1^m - 2B_2^m \right) \cosh \frac{m\pi}{a} y + B_2^m \frac{m\pi}{a} y \sinh \frac{m\pi}{a} y \right\} \right. \\ & \left. + K_s \left[\frac{1}{12r^2} \frac{y^4}{b^4} + \frac{1}{m^2 \pi^2} \left\{ \lambda \frac{y^2}{b^2} + (2\lambda-1) \frac{2r^2}{m^2 \pi^2} \right\} \cos \frac{m\pi}{a} x \right] \right. \\ & \left. + K_b \left[\frac{1}{30r^2} \frac{y^6}{b^6} + \frac{1}{m^2 \pi^2} \left\{ \lambda \frac{y^4}{b^4} + (2\lambda-1) \frac{12r^2}{m^2 \pi^2} \frac{y^2}{b^2} + (3\lambda-2) \frac{24r^4}{m^4 \pi^4} \right\} \cos \frac{m\pi}{a} x \right] \right] \end{aligned}$$

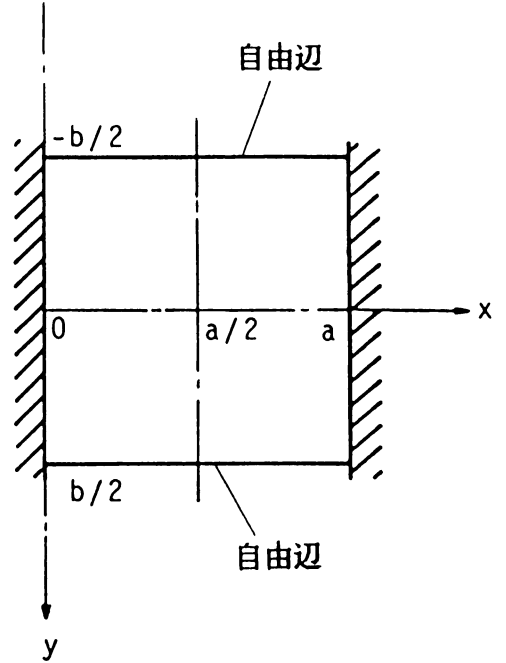


図3 自由辺を有するシェル

$x = a/2, y = 0$ に関して対称な変形を表わすように仮定する。さらに、条件 $My = Vy = 0$ ($y = \pm b/2$) が導入できるように未知パラメータを追加し、それら条件式を Fourier 級数に展開した時の定数項の処理の為の代数関数も追加する。よって、法線方向変位 $w(x, y)$ は次式のように仮定する。

$$+ w_{m_0} \frac{\lambda}{m^2 \pi^2} \cos \frac{m\pi}{a} x + \sum_n w_{m_n} \left[\frac{n^2 r^2 + \lambda m^2}{(m^2 + n^2 r^2) \pi^2} \cos \frac{m\pi}{a} x - \frac{1}{n^2 \pi^2 r^2} \right] \cos \frac{n\pi}{b} y$$

ここに, $r = a/b$

ϕ の斉次解は次式をとる。

$$\begin{aligned} \phi_h = & \frac{E h a^2}{R x} \left[\sum_m \left(C_1^m \cosh \frac{m\pi}{a} y + \frac{m\pi}{a} y \sinh \frac{m\pi}{a} y \right) \cos \frac{m\pi}{a} x \right. \\ & + \sum_n \left[D_1^n \cosh \frac{n\pi}{b} \left(x - \frac{a}{2} \right) + D_2^n \frac{n\pi}{b} \left(x - \frac{a}{2} \right) \sinh \frac{n\pi}{b} \left(x - \frac{a}{2} \right) \right] \cos \frac{n\pi}{b} y \\ & + \frac{K_1}{a^4} \left\{ 3 \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 y^2 - y^4 \right\} + \frac{K_2}{2a^2} \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 + \frac{K_3}{a^4} \left\{ \left(x - \frac{a}{2} \right)^4 - 3 \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 y^2 \right\} \\ & \left. + \frac{K_4}{2b^2} y^2 + \frac{K_7}{a_6} \left\{ \left(x - \frac{a}{2} \right)^6 - 15 \left(x - \frac{a}{2} \right)^4 y^2 + 15 \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 y^4 - y^6 \right\} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

(9)式中の代数関数は, 条件式を Fourier 級数の sine 展開するとき Gibbs 現象を防ぐ為, 及び cosine 展開する時に生ずる定数項処理の為に導入する。

応力関数の一般解 $\phi = \phi_p + \phi_h$, w を(3)式へ代入し, $u(x, y)$, $v(x, y)$, $Ny(x, y)$, $Nxy(x, y)$, $My(x, y)$, $Vy(x, y)$ はそれぞれ次式のように求まる。

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \frac{a}{R x} \left[\sum_m \left[B_1^m \frac{1}{m\pi} \left[\frac{1}{4} \cosh \frac{m\pi}{a} y \left\{ (3+\lambda) \sin \frac{m\pi}{a} x + (1-\lambda) \frac{m\pi}{a} \right. \right. \right. \right. \\ & \times \left. \left. \left. \left(x - \frac{a}{2} \right) \cos \frac{m\pi}{a} x \right\} - \frac{1}{8} (1-\lambda) \frac{m\pi}{a} y \sinh \frac{m\pi}{a} y \left\{ (1-\nu) \sin \frac{m\pi}{a} x \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - (1+\nu) \frac{m\pi}{a} \left(x - \frac{a}{2} \right) \cos \frac{m\pi}{a} x \right\} \right] - B_2^m \frac{1}{m\pi} \left[\frac{1}{8} (1+\lambda) \frac{m\pi}{a} y \sinh \frac{m\pi}{a} y \right. \right. \\ & \times \left. \left. \left. \left\{ (1-\nu) \sin \frac{m\pi}{a} x - (1+\nu) \frac{m\pi}{a} \left(x - \frac{a}{2} \right) \cos \frac{m\pi}{a} x \right\} + \frac{1}{4} (1+\lambda) \cosh \frac{m\pi}{a} y \right. \right. \\ & \times \left. \left. \left. \left\{ \sin \frac{m\pi}{a} x - \frac{m\pi}{a} \left(x - \frac{a}{2} \right) \cos \frac{m\pi}{a} x \right\} + \frac{1}{12} (1-\lambda) \left[\frac{m\pi}{a} y \sinh \frac{m\pi}{a} y \left\{ 3 \sin \frac{m\pi}{a} x \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - (3+\nu) \frac{m\pi}{a} \left(x - \frac{a}{2} \right) \cos \frac{m\pi}{a} x \right\} + \frac{m^2 \pi^2}{a^2} y^2 \cosh \frac{m\pi}{a} y \left\{ (1-\nu) \sin \frac{m\pi}{a} x \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - (1+\nu) \frac{m\pi}{a} \left(x - \frac{a}{2} \right) \cos \frac{m\pi}{a} x \right\} + \frac{1}{2} \left\{ 2 \cosh \frac{m\pi}{a} y + (1+\nu) \frac{m\pi}{a} y \sinh \frac{m\pi}{a} y \right\} \right. \right. \\ & \times \left. \left. \left. \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 \sin \frac{m\pi}{a} x \right] - \frac{m\pi}{a} y \sinh \frac{m\pi}{a} y \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x \right] \right. \\ & + C_1^m m \pi (1+\nu) \cosh \frac{m\pi}{a} y \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x + C_2^m \cdot m \pi \left\{ 2 \cosh \frac{m\pi}{a} y \right. \\ & + (1+\nu) \frac{m\pi}{a} y \cdot \sinh \frac{m\pi}{a} y \left. \right\} \sin \frac{m\pi}{a} x + K_5 \frac{1}{m\pi} \left[\frac{1}{2} (\lambda - \nu + 2\nu\lambda) \frac{4r^2}{m^2 \pi^2} \right. \\ & + (1+\nu\lambda) \frac{y^2}{b^2} \left. \right] \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{a} x + K_6 \frac{1}{m\pi} \left\{ \frac{3}{2} (-1+2\lambda-2\nu+3\nu\lambda) \frac{16r^4}{m^4 \pi^4} \right. \\ & + 3(\lambda-\nu+2\nu\lambda) \frac{4r^2}{m^2 \pi^2} \frac{y^2}{b^2} + (\nu\lambda+1) \frac{y^4}{b^4} \left. \right\} \sin \frac{m\pi}{a} x \\ & + w_{m_0} \left[\frac{1}{m\pi} (\lambda\nu+1) \sin \frac{m\pi}{a} x - \frac{1}{a} \left(x - \frac{a}{2} \right) \right] \\ & - \sum_n w_{m_n} \frac{1}{m\pi} \left[\frac{(n^2 r^2 + \lambda m^2)(n^2 r^2 - \nu m^2)}{(m^2 + n^2 r^2)^2} - 1 \right] \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y \\ & - \sum_n \left[D_1^n n \pi r (1+\nu) \sinh \frac{n\pi}{b} \left(x - \frac{a}{2} \right) \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y + D_2^n \cdot n \pi r \left\{ (1+\nu) \right. \right. \\ & \times \left. \left. \frac{n\pi}{b} \left(x - \frac{a}{2} \right) \cosh \frac{n\pi}{b} \left(x - \frac{a}{2} \right) - (1-\nu) \sinh \frac{n\pi}{b} \left(x - \frac{a}{2} \right) \right\} \cos \frac{n\pi}{b} y \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +K_1 \left[\frac{2}{a^3} \left(x - \frac{a}{2} \right)^3 - \frac{6}{r^2} (2 + \nu) \frac{y^2}{b^2} \frac{1}{a} \left(x - \frac{a}{2} \right) \right] - K_2 \cdot \frac{\nu}{a} \left(x - \frac{a}{2} \right) \\
 & - K_3 \left[2(1 + 2\nu) \frac{1}{a^3} \left(x - \frac{a}{2} \right)^3 - \frac{6\nu}{r^2} \frac{y^2}{b^2} \frac{1}{a} \left(x - \frac{a}{2} \right) + K_4 \cdot \frac{r^2}{a} \left(x - \frac{a}{2} \right) \right. \\
 & \left. - K_7 \cdot 3(1 + \nu) \left\{ \frac{2}{a^5} \left(x - \frac{a}{2} \right)^5 - \frac{5}{a^3} \left(x - \frac{a}{2} \right)^3 \frac{1}{r^2} + \frac{5}{8a} \left(x - \frac{a}{2} \right) \frac{1}{r^4} \right\} \right] \quad (10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v(x, y) = & \frac{a}{R_x} \left[\sum_m \left[B_1^m \frac{1}{m\pi} \left[\frac{1}{8} (1 - \lambda) \left\{ (1 + \nu) \frac{m\pi}{a} y \cosh \frac{m\pi}{a} y - (1 - \nu) \right. \right. \right. \right. \\
 & \times \sin \frac{m\pi}{a} y \left. \right] \frac{m\pi}{a} \left(x - \frac{a}{2} \right) \sin \frac{m\pi}{a} x - (\nu + \lambda) \sinh \frac{m\pi}{a} y - \frac{1}{4} \left\{ (1 - \lambda) \frac{m\pi}{a} y \cosh \frac{m\pi}{a} y \right. \\
 & \left. - (1 + 3\lambda) \sinh \frac{m\pi}{a} y \right\} \cos \frac{m\pi}{a} x \left. \right] + B_2^m \frac{1}{m\pi} \left[\frac{1}{8} (1 + \lambda) \left\{ (1 + \nu) \frac{m\pi}{a} y \cosh \frac{m\pi}{a} y \right. \right. \\
 & \left. \left. - (1 - \nu) \sinh \frac{m\pi}{a} y \right\} \frac{m\pi}{a} \left(x - \frac{a}{2} \right) \sin \frac{m\pi}{a} x + \frac{1}{4} \left(\frac{m\pi}{a} y \cosh \frac{m\pi}{a} y - \sinh \frac{m\pi}{a} y \right) \right. \\
 & \times \left\{ (3\lambda - 1) \cos \frac{m\pi}{a} x - 4(\nu + \lambda) \right\} - \frac{1}{12} (1 - \lambda) \left[-\frac{1}{2} \left\{ (1 + \nu) \frac{m\pi}{a} y \cosh \frac{m\pi}{a} y \right. \right. \\
 & \left. \left. - (1 - \nu) \sinh \frac{m\pi}{a} y \right\} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 \cos \frac{m\pi}{a} x - \left\{ (1 + \nu) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} y^2 \sinh \frac{m\pi}{a} y + 2\nu \right. \right. \\
 & \times \frac{m\pi}{a} y \cosh \frac{m\pi}{a} y \left. \right\} \frac{m\pi}{a} \left(x - \frac{a}{2} \right) \sin \frac{m\pi}{a} x + \left\{ 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} y^2 \sinh \frac{m\pi}{a} y - 3 \left(\frac{m\pi}{a} y \right. \right. \\
 & \times \left. \left. \cos h \frac{m\pi}{a} y - \sinh \frac{m\pi}{a} y \right\} \cos \frac{m\pi}{a} x \right] - C_1^m m\pi (1 + \nu) \sinh \frac{m\pi}{a} y \\
 & \times \cos \frac{m\pi}{a} x - C_2^m \cdot m\pi \left\{ (1 + \nu) \frac{m\pi}{a} y \cosh \frac{m\pi}{a} y - (1 - \nu) \sinh \frac{m\pi}{a} y \right\} \cos \frac{m\pi}{a} x \\
 & + \frac{K_5}{r} \left[\left\{ \frac{1}{2} (1 - \nu\lambda) - \lambda \right\} \frac{4r^2}{m^2 \pi^2} \frac{y}{b} \cdot \cos \frac{m\pi}{a} x - (\nu + \lambda) \frac{1}{3} \frac{y^3}{b^3} \right] \\
 & + \frac{K_6}{r} \left[\left\{ (1 - \nu\lambda - 2\lambda) \frac{4r^2}{m^2 \pi^2} \frac{y^3}{b^3} + \frac{3}{2} (2 - 2\nu\lambda - 3\lambda + \nu) \frac{16r^4}{m^4 \pi^4} \frac{y}{b} \right\} \cos \frac{m\pi}{a} x \right. \\
 & \left. - (\nu + \lambda) \frac{1}{5} \frac{y^5}{b^5} \right] - w_{m0} \frac{\lambda y}{r b} - \sum_n w_{mn} \frac{1}{n\pi r} \left[\left(\frac{(n^2 r^2 + \lambda m^2)(m^2 - \nu n^2 r^2)}{(m^2 + n^2 r^2)^2} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \lambda \right\} \cos \frac{m\pi}{a} x + \lambda + \nu \right] \sin \frac{n\pi}{b} y + \sum_n \left[D_1^n n\pi r (1 + \nu) \cosh \frac{n\pi}{b} \left(x - \frac{a}{2} \right) \sin \frac{n\pi}{b} y \right. \\
 & \left. + D_2^n n\pi r \left\{ 2 \cosh \frac{n\pi}{b} \left(x - \frac{a}{2} \right) + (1 + \nu) \frac{n\pi}{b} \left(x - \frac{a}{2} \right) \sinh \frac{n\pi}{b} \left(x - \frac{a}{2} \right) \right\} \sin \frac{n\pi}{b} y \right] \\
 & + K_1 \left[\frac{2}{r^3} (1 + 2\nu) \frac{y^3}{b^3} - \frac{\nu}{r} \frac{6}{a^2} \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 \frac{y}{b} \right] + \frac{K_2}{r} \frac{y}{b} + K_3 \left[\frac{6}{r} (2 + \nu) \frac{1}{a^2} \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 \frac{y}{b} \right. \\
 & \left. - \frac{2}{r^3} \frac{y^3}{b^3} \right] - K_4 \cdot \nu r \frac{y}{b} + K_7 3(1 + \nu) \left[\frac{5}{r} \frac{1}{a^4} \left(x - \frac{a}{2} \right)^4 - \frac{5}{2r^3} \frac{1}{a^2} \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 + \frac{1}{16r^5} \right] \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Ny(x, y) = & \frac{Eh}{R_x} \left[\sum_m \left[-B_1^m \frac{1}{8} (1 - \lambda) \frac{m\pi}{a} y \sin h \frac{m\pi}{a} y \left\{ 2 \cos \frac{m\pi}{a} x - \frac{m\pi}{a} \left(x - \frac{a}{2} \right) \right. \right. \right. \right. \\
 & \times \sin \frac{m\pi}{a} x \left. \right] - B_2^m \frac{1}{24} \left[\left\{ 2(2 + \lambda) \frac{m\pi}{a} y \sin h \frac{m\pi}{a} y + (1 - \lambda) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} y^2 \cosh \frac{m\pi}{a} y \right\} \right. \\
 & \times \left\{ 2 \cos \frac{m\pi}{a} x - \frac{m\pi}{a} \left(x - \frac{a}{2} \right) \sin \frac{m\pi}{a} x \right\} - (1 - \lambda) \frac{m\pi}{a} y \sin h \frac{m\pi}{a} y \left\{ 3 \frac{m\pi}{a} \left(x - \frac{a}{2} \right) \sin \frac{m\pi}{a} x \right. \\
 & \left. \left. + \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 \cos \frac{m\pi}{a} x \right\} \right] - m^2 \pi^2 \left(C_1^m \cosh \frac{m\pi}{a} y + C_2^m \frac{m\pi}{a} y \sinh \frac{m\pi}{a} y \right) \\
 & \times \cos \frac{m\pi}{a} x + K_5 \left[\frac{2r^2}{m^2 \pi^2} - \lambda \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{4r^2}{m^2 \pi^2} \right) \right] \cos \frac{m\pi}{a} x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + K_6 \left\{ \frac{12r^2}{m^2\pi^2} \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{4r^2}{m^2\pi^2} \right) - \lambda \left(\frac{y^4}{b^4} + \frac{24r^2y^2}{m^2\pi^2b^2} + \frac{72r^4}{m^4\pi^4} \right) \right\} \cos \frac{m\pi}{a} x \\
& - w_{m0} \lambda \cos \frac{m\pi}{a} x - \sum_n w_{mn} \frac{(n^2r^2 + \lambda m^2)m^2}{(m^2 + n^2r^2)^2} \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y \Big] \\
& + \sum_n n^2 \pi^2 r^2 \left[D_1^n \cosh \frac{n\pi}{b} \left(x - \frac{a}{2} \right) + D_2^n \left\{ 2 \cosh \frac{n\pi}{b} \left(x - \frac{a}{2} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{n\pi}{b} \left(x - \frac{a}{2} \right) \sinh \frac{n\pi}{b} \left(x - \frac{a}{2} \right) \right\} \right] \cos \frac{n\pi}{b} y + K_1 \frac{6y^2}{r^2b^2} + K_2 + K_3 \left\{ \frac{12}{a^2} \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 \right. \\
& \left. - \frac{6y^2}{r^2b^2} \right\} + K_7 \left\{ \frac{30}{a^4} \left(x - \frac{a}{2} \right)^4 - \frac{180}{r^2a^2} \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 \frac{y^2}{b^2} + \frac{30y^4}{r^4b^4} \right\} \quad (12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{xy}(x, y) = & \frac{Eh}{R_x} \left[\sum_m \left[-B_1^m \frac{1}{8} (1-\lambda) \left(\sinh \frac{m\pi}{a} y + \frac{m\pi}{a} y \cosh \frac{m\pi}{a} y \right) \left\{ \sin \frac{m\pi}{a} x \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{m\pi}{a} \left(x - \frac{a}{2} \right) \cos \frac{m\pi}{a} x \right\} - B_2^m \frac{1}{24} \left[\left\{ 3(1+\lambda) \sinh \frac{m\pi}{a} y + (7-\lambda) \frac{m\pi}{a} y \cosh \frac{m\pi}{a} y \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + 2(1-\lambda) \frac{m^2\pi^2}{a^2} y^2 \sinh \frac{m\pi}{a} y \right\} \left\{ \sin \frac{m\pi}{a} x + \frac{m\pi}{a} \left(x - \frac{a}{2} \right) \cos \frac{m\pi}{a} x \right\} + (1-\lambda) \left(\sinh \frac{m\pi}{a} y \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{m\pi}{a} y \cosh \frac{m\pi}{a} y \right) \left\{ 2 \frac{m\pi}{a} \left(x - \frac{a}{2} \right) \cos \frac{m\pi}{a} x - \frac{m^2\pi^2}{a^2} \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 \sin \frac{m\pi}{a} x \right\} \right. \\
& \left. - m^2\pi^2 \left\{ C_1^m \sinh \frac{m\pi}{a} y + C_2^m \left(\sinh \frac{m\pi}{a} y + \frac{m\pi}{a} y \cosh \frac{m\pi}{a} y \right) \right\} \sin \frac{m\pi}{a} x \right. \\
& \left. - K_5 \lambda \frac{2r}{m\pi b} \sin \frac{m\pi}{a} x + K_6 \left\{ \frac{24r^3y}{m^3\pi^3b} - \lambda \frac{4r}{m\pi} \left(\frac{y^3}{b^3} + \frac{12r^2y}{m^2\pi^2b} \right) \right\} \sin \frac{m\pi}{a} x \right. \\
& \left. + \sum_n w_{mn} \frac{(n^2r^2 + \lambda m^2)mnr}{(m^2 + n^2r^2)^2} \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \right] \\
& - \sum_n n^2 \pi^2 r^2 \left[D_1^n \sinh \frac{n\pi}{b} \left(x - \frac{a}{2} \right) + D_2^n \left\{ \sinh \frac{n\pi}{b} \left(x - \frac{a}{2} \right) + \frac{n\pi}{b} \left(x - \frac{a}{2} \right) \cosh \left(x - \frac{a}{2} \right) \right\} \right] \\
& \times \sin \frac{n\pi}{b} y + \frac{K_1}{r} \frac{12}{a} \left(x - \frac{a}{2} \right) \frac{y}{b} - \frac{K_3}{r} \frac{12}{a} \left(x - \frac{a}{2} \right) \frac{y}{b} \\
& + K_7 \left[-\frac{120}{r} \frac{1}{a^3} \left(x - \frac{a}{2} \right)^3 \frac{y}{b} + \frac{120}{r^3} \frac{1}{a} \left(x - \frac{a}{2} \right) \frac{y^3}{b^3} \right] \quad (13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
My(x, y) = & -D \frac{\pi^2}{a^2} \left[\sum_m \left[B_1^m m^2 \left\{ (1-\nu) \cos \frac{m\pi}{a} x - 1 \right\} \cosh \frac{m\pi}{a} y \right. \right. \\
& \left. \left. + B_2^m \cdot m^2 \left[\left\{ (1-\nu) \cos \frac{m\pi}{a} x - 1 \right\} \frac{m\pi}{a} y \sinh \frac{m\pi}{a} y + 2 \left(\cos \frac{m\pi}{a} x - 1 \right) \cos \frac{m\pi}{a} y \right] \right. \right. \\
& \left. \left. + K_5 \left\{ \left(\frac{2r^2}{\pi^2} - \nu m^2 \frac{y^2}{b^2} \right) \cos \frac{m\pi}{a} x - \frac{2r^2}{\pi^2} \right\} + K_6 \left\{ \left(\frac{12r^2y^2}{\pi^2b^2} - \nu m^2 \frac{y^4}{b^4} \right) \cos \frac{m\pi}{a} x \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{12r^2y^2}{\pi^2b^2} \right\} - w_{m0} \nu m^2 \cos \frac{m\pi}{a} x - \sum_n w_{mn} \left[(n^2r^2 + \nu m^2) \cos \frac{m\pi}{a} x \right. \right. \\
& \left. \left. - n^2r^2 \right\} \cos \frac{n\pi}{b} y \right] \quad (14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Vy(x, y) = & -D \frac{\pi^3}{a^3} \left[\sum_m \left[-B_1^m \cdot m^3 \left\{ (1-\nu) \cos \frac{m\pi}{a} x + 1 \right\} \sinh \frac{m\pi}{a} y \right. \right. \\
& \left. \left. + B_2^m \cdot m^3 \left[\left\{ (1+\nu) \cos \frac{m\pi}{a} x - 3 \right\} \sinh \frac{m\pi}{a} y - \left\{ (1-\nu) \cos \frac{m\pi}{a} x + 1 \right\} \frac{m\pi}{a} y \cosh \frac{m\pi}{a} y \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - K_5 m^2 (2-\nu) \frac{2r}{\pi b} \cdot \cos \frac{m\pi}{a} x + K_6 \frac{4r}{\pi} \left[\left\{ \frac{6r^2}{\pi^2} - (2-\nu) m^2 \frac{y^2}{b^2} \right\} \cos \frac{m\pi}{a} x \right. \right. \right.
\end{aligned}$$

$$-\frac{6r^2}{\pi^2} \left] \frac{y}{b} + \sum_n w_{mn} \cdot n r \left[\left\{ n^2 r^2 + (2-\nu)m^2 \right\} \cos \frac{m\pi}{a} x - n^2 r^2 \right] \sin \frac{n\pi}{b} y \right]$$

(6-b) 式の境界条件より(10), (11)式に $x=0$ を代入して次式を得る。

$$\begin{aligned} u(0, y) &= \frac{a}{R_x} \left[\sum_m \left[-B_1^m \left[\frac{1}{8}(1-\lambda) \cosh \frac{m\pi}{a} y + \frac{1}{16}(1-\lambda)(1+\nu) \frac{m\pi}{a} y \sinh \frac{m\pi}{a} y \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - B_2^m \left[\frac{1}{8}(1+\lambda) \cosh \frac{m\pi}{a} y + \frac{1}{48} \{ 3(3-\lambda) + \nu(5+\lambda) \} \frac{m\pi}{a} y \sinh \frac{m\pi}{a} y \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{1}{24}(1-\lambda)(1+\nu) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} y^2 \cosh \frac{m\pi}{a} y \right] + \frac{1}{2} w_{m0} \right] + \sum_n n \pi r \left[D_1^n (1+\nu) \right. \\ &\quad \left. \times \sinh \frac{n\pi r}{2} + D_2^n \left\{ (1+\nu) \frac{n\pi r}{2} \cosh \frac{n\pi r}{2} - (1-\nu) \sinh \frac{n\pi r}{2} \right\} \right] \cos \frac{n\pi}{b} y \\ &\quad + K_1 \left\{ -\frac{1}{4} + (2+\nu) \frac{3}{r^2} \frac{y^2}{b^2} \right\} + K_2 \frac{\nu}{2} + K_3 \left\{ \frac{1}{4}(1+2\nu) - \frac{3\nu}{r^2} \frac{y^2}{b^2} \right\} \\ &\quad - K_4 \frac{r^2}{2} + K_7 \cdot 3(1+\nu) \left\{ \frac{1}{16} - \frac{5}{2r^2} \frac{y^2}{b^2} + \frac{5}{r^4} \frac{y^4}{b^4} \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} v(0, y) &= \frac{a}{R_x} \left[\sum_m \left[-B_1^m \frac{1}{4m\pi} \left\{ (1-\lambda) \frac{m\pi}{a} y \cosh \frac{m\pi}{a} y - (1-\lambda-4\nu) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \sinh \frac{m\pi}{a} y \right\} - B_2^m \left[\frac{1}{4m\pi} (1+\lambda+4\nu) \left(\frac{m\pi}{a} y \cosh \frac{m\pi}{a} y - \sinh \frac{m\pi}{a} y \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (1-\lambda) \left[\frac{1}{12m\pi} \left(2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} y^2 \sinh \frac{m\pi}{a} y - 3 \frac{m\pi}{a} y \cosh \frac{m\pi}{a} y + 3 \sinh \frac{m\pi}{a} y \right) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{m\pi}{96} \left\{ (1+\nu) \frac{m\pi}{a} y \cosh \frac{m\pi}{a} y - (1-\nu) \sinh \frac{m\pi}{a} y \right\} \right] - C_7^m \cdot (1+\nu) \right. \\ &\quad \left. \times m\pi \cdot \sinh \frac{m\pi}{a} y - C_2^m \cdot m\pi \left\{ (1+\nu) \frac{m\pi}{a} y \cosh \frac{m\pi}{a} y - (1-\nu) \sinh \frac{m\pi}{a} y \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{K_5}{r} \left[\frac{2r^2}{m^2 \pi^2} \left\{ 1-\lambda(2+\nu) \right\} \frac{y}{b} - \frac{1}{3} (\lambda+\nu) \frac{y^3}{b^3} \right] + \frac{K_6}{r} \left[\frac{24r^4}{m^4 \pi^4} (2-3\lambda) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2\nu\lambda + \nu \right] \frac{y}{b} + \frac{4}{m^2 \pi^2} \left\{ 1-\lambda(2+\nu) \right\} \frac{y^3}{b^3} - (\lambda+\nu) \frac{1}{5} \frac{y^5}{b^5} \right] \\ &\quad - w_{m0} \frac{\lambda y}{r b} - \sum_n w_{mn} \frac{1}{n\pi r} \left[\frac{(n^2 r^2 + \lambda m^2)(m^2 - \nu n^2 r^2)}{(n^2 r^2 + m^2)^2} + \nu \right] \sin \frac{n\pi}{b} y \\ &\quad + \sum_n n \pi r \left[D_1^n (1+\nu) \cosh \frac{n\pi r}{2} + D_2^n \left\{ 2 \cosh \frac{n\pi r}{2} + (1+\nu) \frac{n\pi r}{2} \sinh \frac{n\pi r}{2} \right\} \right] \sin \frac{n\pi}{b} y \\ &\quad + K_1 \left\{ 2(1+2\nu) \frac{y^2}{a^2} - \frac{3\nu y}{2a} \right\} + K_2 \frac{y}{a} + K_3 \left\{ \frac{3}{2}(2+\nu) \frac{y}{a} - 2 \frac{y^3}{a^3} \right\} \\ &\quad - K_4 \nu r^2 \frac{y}{a} + K_7 \cdot 3(1+\nu) \left\{ \frac{5}{8} \frac{y}{r b} - \frac{5}{r^3} \frac{y^3}{b^3} + \frac{2}{r^5} \frac{y^5}{b^5} \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

(6-c, d) の境界条件より, (12)~(15)式に $y=b/2$ を代入して次式を得る。

$$\begin{aligned} N y(x, b/2) &= \frac{Eh}{R_x} \left[\sum_m \left[-B_1^m \frac{1}{8} (1-\lambda) \frac{m\pi}{2r} \sinh \frac{m\pi}{2r} \left\{ 2 \cos \frac{m\pi}{a} x \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{m\pi}{a} \left(x - \frac{a}{2} \right) \sin \frac{m\pi}{a} x \right\} - B_2^m \frac{1}{24} \left[2 \left\{ (2+\lambda) \frac{m\pi}{2r} \sinh \frac{m\pi}{2r} + (1-\lambda) \frac{m^2 \pi^2}{4r^2} \cosh \frac{m\pi}{2r} \right\} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left\{ 2 \cos \frac{m\pi}{a} x - \frac{m\pi}{a} \left(x - \frac{a}{2} \right) \sin \frac{m\pi}{a} x \right\} - (1-\lambda) \frac{m\pi}{2r} \sinh \frac{m\pi}{2r} \left\{ 3 \frac{m\pi}{a} \left(x - \frac{a}{2} \right) \sin \frac{m\pi}{a} x \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 \cos \frac{m\pi}{a} x \right\} \right] - m^2 \pi^2 \left(C_1^m \cosh \frac{m\pi}{2r} + C_2^m \frac{m\pi}{2r} \sinh \frac{m\pi}{2r} \right) \cos \frac{m\pi}{a} x \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +K_5 \left\{ \frac{2r^2}{m^2\pi^2} - \lambda \left(\frac{1}{4} + \frac{4r^2}{m^2\pi^2} \right) \right\} \cos \frac{m\pi}{a} x + K_6 \left\{ \frac{12r^2}{m^2\pi^2} \left(\frac{1}{4} + \frac{4r^2}{m^2\pi^2} \right) - \lambda \left(\frac{1}{16} + \frac{6r^2}{m^2\pi^2} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{72r^4}{m^4\pi^4} \right) \right\} \cos \frac{m\pi}{a} x - w_{m0} \lambda \cos \frac{m\pi}{a} x - \sum_n w_{mn} \frac{(n^2 r^2 + \lambda m^2) m^2}{(m^2 + n^2 r^2)^2} \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{2} \\
& + \sum_n n^2 \pi^2 r^2 \left[D_1^n \cosh \frac{n\pi}{b} \left(x - \frac{a}{2} \right) + D_2^n \left\{ 2 \cosh \frac{n\pi}{b} \left(x - \frac{a}{2} \right) + \frac{n\pi}{b} \left(x - \frac{a}{2} \right) \sinh \frac{n\pi}{b} \left(x - \frac{a}{2} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. \right\} \right] \cos \frac{n\pi}{2} + K_1 \frac{3}{2r^2} + K_2 + K_3 \left\{ \frac{12}{a^2} \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 - \frac{3}{2r^2} \right\} \\
& K_7 \cdot 15 \left\{ \frac{2}{a^4} \left(x - \frac{a}{2} \right)^4 - \frac{3}{r^2 a^2} \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 + \frac{1}{8r^4} \right\} \tag{18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Nxy(x, b/2) &= -\frac{Eh}{Rx} \left[\sum_m \left[-B_1^m \frac{1}{8} (1-\lambda) \left(\sinh \frac{m\pi}{2r} + \frac{m\pi}{2r} \cosh \frac{m\pi}{2r} \right) \right. \right. \\
& \times \left\{ \sin \frac{m\pi}{a} x + \frac{m\pi}{a} \left(x - \frac{a}{2} \right) \cos \frac{m\pi}{a} x \right\} - B_2^m \frac{1}{24} \left[\left\{ 3(1+\lambda) \sinh \frac{m\pi}{2r} + (7-\lambda) \right. \right. \\
& \times \frac{m\pi}{2r} \cosh \frac{m\pi}{2r} + 2(1-\lambda) \frac{m^2 \pi^2}{4r^2} \sinh \frac{m\pi}{2r} \right] \left\{ \sin \frac{m\pi}{a} x + \frac{m\pi}{a} \left(x - \frac{a}{2} \right) \cos \frac{m\pi}{a} x \right\} \\
& \left. \left. + (1-\lambda) \left(\sinh \frac{m\pi}{2r} + \frac{m\pi}{2r} \cosh \frac{m\pi}{2r} \right) \left\{ 2 \frac{m\pi}{a} \left(x - \frac{a}{2} \right) \cos \frac{m\pi}{a} x - \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 \sin \frac{m\pi}{a} x \right\} \right] \right. \\
& - m^2 \pi^2 \left\{ C_1^m \sinh \frac{m\pi}{2r} + C_2^m \left(\sinh \frac{m\pi}{2r} + \frac{m\pi}{2r} \cosh \frac{m\pi}{2r} \right) \right\} \sin \frac{m\pi}{a} x \\
& - K_5 \frac{\lambda r}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{a} x + K_6 \left\{ \frac{12r^3}{m^3 \pi^3} - \lambda \frac{4r}{m\pi} \left(\frac{1}{8} + \frac{6r^2}{m^2 \pi^2} \right) \right\} \sin \frac{m\pi}{a} x \\
& \left. \left. + \frac{K_1}{r} \frac{6}{a} \left(x - \frac{a}{2} \right) - \frac{K_3}{r} \frac{6}{a} \left(x - \frac{a}{2} \right) + K_7 \frac{15}{r} \left[-\frac{4}{a^3} \left(x - \frac{a}{2} \right)^3 + \frac{1}{r^3} \frac{1}{a} \left(x - \frac{a}{2} \right) \right] \right\} \tag{19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
My(x, b/2) &= -D \frac{\pi^2}{a^2} \left[\sum_m \left[B_1^m \cdot m^2 \cosh \frac{m\pi}{2r} \left\{ (1-\nu) \cos \frac{m\pi}{a} x - 1 \right\} \right. \right. \\
& + B_2^m \cdot m^2 \left\{ \left\{ (1-\nu) \cos \frac{m\pi}{a} x - 1 \right\} \frac{m\pi}{2r} \sinh \frac{m\pi}{2r} + 2 \left(\cos \frac{m\pi}{a} x - 1 \right) \cosh \frac{m\pi}{2r} \right\} \right. \\
& \left. \left. + K_5 \left\{ \left(\frac{2r^2}{\pi^2} - \frac{\nu m^2}{4} \right) \cos \frac{m\pi}{a} x - \frac{2r^2}{\pi^2} \right\} + K_6 \left\{ \left(\frac{3r^2}{\pi^2} - \frac{\nu m^2}{16} \right) \cos \frac{m\pi}{a} x - \frac{3r^2}{\pi^2} \right\} \right] \right. \\
& \left. - w_{m0} \nu \cdot m^2 \cdot \cos \frac{m\pi}{a} x - \sum_n w_{mn} \left\{ (n^2 r^2 + \nu m^2) \cos \frac{m\pi}{a} x - n^2 r^2 \right\} \cos \frac{n\pi}{2} \right] \tag{20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Vy(x, b/2) &= -D \frac{\pi^3}{a^3} \left[\sum_m \left[-B_1^m \cdot m^3 \cdot \sinh \frac{m\pi}{2r} \left\{ (1-\nu) \cos \frac{m\pi}{a} x + 1 \right\} \right. \right. \\
& + B_2^m \cdot m^3 \left\{ \left\{ (1+\nu) \cos \frac{m\pi}{a} x - 3 \right\} \sinh \frac{m\pi}{2r} - \left\{ (1-\nu) \cos \frac{m\pi}{a} x + 1 \right\} \frac{m\pi}{2r} \cosh \frac{m\pi}{2r} \right\} \right. \\
& \left. \left. - K_5 (2-\nu) \frac{r m^2}{\pi} \cos \frac{m\pi}{a} x + K_6 \frac{2r}{\pi} \left[\left\{ \frac{6r^2}{\pi^2} - (2-\nu) \frac{m^2}{4} \right\} \cos \frac{m\pi}{a} x - \frac{6r^2}{\pi^2} \right] \right] \right] \tag{21}
\end{aligned}$$

(16)~(21)式をゼロにするために次式のように Fourier 級数展開した式を用いる。

$$u(0, y) = \frac{a}{Rx} \left\{ u_{m0} + \sum_n \left(\sum_m u_{mn} \right) \cos \frac{n\pi}{b} y \right\} \tag{22-a}$$

$$v(0, y) = \frac{a}{Rx} \sum_n \left(\sum_m v_{mn} \right) \sin \frac{n\pi}{b} y \tag{22-b}$$

$$Ny(x, b/2) = \frac{Eh}{Rx} \left\{ N_{m0} + \sum_n \left(\sum_m N_{mn} \right) \cos \frac{m\pi}{a} x \right\} \tag{22-c}$$

$$Nxy(x, b/2) = -\frac{Eh}{Rx} \sum_m \left(\sum_n N_{mn} \right) \sin \frac{m\pi}{a} x \tag{22-d}$$

$$M_y(x, b/2) = -D \frac{\pi^2}{a^2} \left(y M_{m_0} + \sum_m y M_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \right) \quad (22-e)$$

$$V_y(x, b/2) = -D \frac{\pi^3}{a^3} \left(y V_{m_0} + \sum_m y V_m \cos \frac{m\pi}{a} x \right) \quad (22-f)$$

(22)式が恒等的に成立するために次式を満足しなければならない。

$$u_{m_0} = 0 \quad (23-a) \quad u_{mn} = 0 \quad (n=2,4,6\cdots) \quad (23-b)$$

$$v_{mn} = 0 \quad (n=2,4,6\cdots) \quad (23-c) \quad y N_{m_0} = 0 \quad (23-d)$$

$$y N_{mn} = 0 \quad (n=2,4,6\cdots) \quad (23-e) \quad x y N_{mn} = 0 \quad (n=2,4,6\cdots) \quad (23-f)$$

$$y M_{m_0} = 0 \quad (23-g) \quad y M_{mn} = 0 \quad (n=2,4,6\cdots) \quad (23-h)$$

$$y V_{m_0} = 0 \quad (23-i) \quad y V_{mn} = 0 \quad (n=2,4,6\cdots) \quad (23-j)$$

さらに (22-b), 及び (22-d) 式の Sine 展開が閉区間で一様収束するために, 端部で次式を満足させなければならない。

$$\begin{aligned} v(0, b/2) = & \frac{a}{R_x} \left[\sum_m \left[-B_1^n \frac{1}{4m\pi} \left\{ (1-\lambda) \frac{m\pi}{2r} \cosh \frac{m\pi}{2r} - (1-\lambda-4\nu) \sinh \frac{m\pi}{2r} \right\} \right. \right. \\ & - B_2^n \left[\frac{1}{4m\pi} (1+\lambda+4\nu) \left(\frac{m\pi}{2r} \cosh \frac{m\pi}{2r} - \sinh \frac{m\pi}{2r} \right) + (1-\lambda) \left[\frac{1}{12m\pi} \right. \right. \\ & \times \left(2 \frac{m^2 \pi^2}{4r^2} \sinh \frac{m\pi}{2r} - 3 \frac{m\pi}{2r} \cosh \frac{m\pi}{2r} + 3 \sinh \frac{m\pi}{2r} \right) - \frac{m\pi}{96} \left\{ (1+\nu) \frac{m\pi}{2r} \cosh \frac{m\pi}{2r} \right. \\ & \left. \left. - (1-\nu) \sinh \frac{m\pi}{2r} \right\} \right] - C_1^n (1+\nu) m\pi \sinh \frac{m\pi}{2r} - C_2^n \cdot m\pi \left\{ (1+\nu) \right. \\ & \times \frac{m\pi}{2r} \cosh \frac{m\pi}{2r} - (1-\nu) \sinh \frac{m\pi}{2r} \left. \right\} + K_s \left\{ \frac{r}{m^2 \pi^2} (1-2\lambda-\lambda\nu) - \frac{1}{24r} (\lambda+\nu) \right\} \\ & + K_6 \left\{ \frac{12r^3}{m^4 \pi^4} (2-3\lambda-2\nu\lambda+\nu) + \frac{r}{2m^2 \pi^2} (1-2\lambda-\lambda\nu) - \frac{1}{160r} (\lambda+\nu) \right\} \\ & - w_{m_0} \frac{\lambda}{2r} \left. \right] + K_1 \left\{ (1+2\nu) \frac{1}{4r^3} - \frac{3\nu}{4r} \right\} + K_2 \frac{1}{2r} + K_3 \left\{ \frac{3}{4r} (2+\nu) - \frac{1}{4r^3} \right\} \\ & - K_4 \frac{\nu r}{2} + (1+\nu) \frac{3}{8} \left(\frac{5}{2r} - \frac{5}{r^3} + \frac{1}{2r^5} \right) \left. \right] = 0 \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{xy}(0, b/2) = & -\frac{Eh}{R_x} \left[\sum_m \left[B_1^n \frac{1}{8} (1-\lambda) \left(\sinh \frac{m\pi}{2r} + \frac{m\pi}{2r} \cosh \frac{m\pi}{2r} \right) \frac{m\pi}{2} \right. \right. \\ & B_2^n \left[\frac{1}{8} (1+\lambda) \left(\sinh \frac{m\pi}{2r} + \frac{m\pi}{2r} \cosh \frac{m\pi}{2r} \right) + \frac{1}{12} (1-\lambda) \left[3 \frac{m\pi}{2r} \cosh \frac{m\pi}{2r} \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{m^2 \pi^2}{4r^2} + 1 \right) \sinh \frac{m\pi}{2r} \right] \right] \frac{m\pi}{2} - K_1 \frac{3}{r} + K_3 \frac{3}{r} + K_7 \frac{15}{2r} \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) \left. \right] = 0 \quad (25) \end{aligned}$$

また, 面内力 N_y が端部で大きく乱れるのを防ぐために次式を追加した。

$$\begin{aligned} N_y(0, b/2) = & \frac{Eh}{R_x} \left[\sum_m \left[-B_1^n \frac{1}{4} (1-\lambda) \frac{m\pi}{2r} \sinh \frac{m\pi}{2r} + B_2^n \frac{1}{6} \frac{m\pi}{2r} \left[\right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \left\{ \frac{m^2 \pi^2}{16} (1-\lambda) - (2+\lambda) \right\} \sinh \frac{m\pi}{2r} - (1-\lambda) \frac{m\pi}{2r} \cosh \frac{m\pi}{2r} \right] - \left(C_1^n \cosh \frac{m\pi}{2r} \right. \right. \right. \\ & C_2^n \frac{m\pi}{2r} \sinh \frac{m\pi}{2r} \left. \right) m^2 \pi^2 + K_s \left\{ \frac{2r^2}{m^2 \pi^2} - \lambda \left(\frac{1}{4} + \frac{4r^2}{m^2 \pi^2} \right) \right\} + K_6 \left\{ \frac{12r^2}{m^2 \pi^2} \left(\frac{1}{4} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{4r^2}{m^2 \pi^2} \right) - \lambda \left(\frac{1}{16} + \frac{6r^2}{m^2 \pi^2} + \frac{72r^4}{m^4 \pi^4} \right) \right\} - \sum_n w_{mn} \frac{m^2 (n^2 r^2 + \lambda m^2)}{(n^2 r^2 + m^2)^2} \cdot \cos \frac{n\pi}{2} \\ & \left. \left. \left. - w_{m_0} \cdot \lambda \right] + \sum_n n^2 \pi^2 r^2 \left[D_1^n \cosh \frac{n\pi r}{2} + D_2^n \left(2 \cosh \frac{n\pi r}{2} + \frac{n\pi r}{2} \sinh \frac{n\pi r}{2} \right) \right] \right. \right. \\ & \left. \left. \times \cos \frac{n\pi}{2} + K_1 \frac{3}{2r^2} + K_2 + K_3 \left[3 - \frac{3}{2r^2} \right] + \frac{15}{8} \left(1 - \frac{6}{r^2} + \frac{1}{r^4} \right) \right] \right] = 0 \quad (26) \end{aligned}$$

$m=2, 4, 6, \dots, 2N, n=2, 4, 6, \dots, 2N$ とすれば, (23)式より $6N+4$ 本の条件式が得られ, さらに(24), (25), (26)を加えて $6N+7$ 本の条件式となる。それら条件式は未定係数 $B_1^i, \dots, B_{2N}^i, B_2^i, \dots, B_{2N}^i, C_1^i, \dots, C_{2N}^i, C_2^i, \dots, C_{2N}^i, D_1^i, \dots, D_{2N}^i, D_2^i, \dots, D_{2N}^i, K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, K_7$ ($6N+7$ 個) と未定係数 w_{mn} ($NN+N$ 個) の関係を与え, 次式のように *matrix* 表示される。

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_2 \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\begin{bmatrix} S_2 \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_3 \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ \end{bmatrix} \quad (28)$$

ここに, $|d_1|^T = |w_{20}, w_{22}, \dots, w_{2N,2N}|$

$|d_2|^T = |B_1^i, \dots, B_{2N}^i, B_2^i, \dots, B_{2N}^i, C_1^i, \dots, C_{2N}^i, C_2^i, \dots, C_{2N}^i, D_1^i, \dots, D_{2N}^i, D_2^i, \dots, D_{2N}^i, K_1, \dots, K_7|$

$|d_3|^T = |B_1^i, \dots, B_{2N}^i, B_2^i, \dots, B_{2N}^i, K_5, K_6|$

(27), (28)式の $|d_2|, |d_3|$ を $|d_1|$ で表わすと次式となる。

$$\begin{bmatrix} d_2 \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1^{-1} F_1 \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix} d_3 \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_2^{-1} F_2 \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ \end{bmatrix} \quad (30)$$

(4)式から求まる Euler 方程式に法線方向変位 w , 及び ϕ を代入して次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{R_2^2}{Eh} L(w, \phi) = & \frac{1}{12\mu^2(1-\nu^2)} \left[\sum_n \left[-B_1^m m^4 \pi^4 \cosh \frac{m\pi}{a} y \right. \right. \\ & - B_2^m m^4 \pi^4 \left(4 \cosh \frac{m\pi}{a} y + \frac{m\pi}{a} y \sinh \frac{m\pi}{a} y \right) + K_5 m^2 \pi^2 \left(m^2 \pi^2 \frac{y^2}{b^2} \right. \\ & - 4r^2 \left. \right) \cos \frac{m\pi}{a} x + K_6 \left(m^4 \pi^4 \frac{y^4}{b^4} - 24r^2 m^2 \pi^2 \frac{y^2}{b^2} + 24r^4 \right) \cos \frac{m\pi}{a} x \\ & - 24r^4 \left. \right] + w_{m0} m^4 \pi^4 \cos \frac{m\pi}{a} x + \sum_n w_{mn} \left[(m^2 \pi^2 + n^2 \pi^2 r^2) \cos \frac{m\pi}{a} x \right. \\ & - n^4 \pi^4 r^4 \left. \right] \cos \frac{n\pi}{b} y \left. \right] + \sum_{m \in L} \left[B_1^m \left[\frac{1}{8} (1-\lambda) \left((1-\lambda) \frac{m\pi}{a} y \sinh \frac{m\pi}{a} y \right. \right. \right. \\ & + 2 \cosh \frac{m\pi}{a} y \left. \right) \frac{m\pi}{a} \left(x - \frac{a}{2} \right) \sin \frac{m\pi}{a} x + \frac{1}{4} \lambda (1-\lambda) \frac{m\pi}{a} y \sinh \frac{m\pi}{a} y \cdot \cos \frac{m\pi}{a} x \\ & - \cosh \frac{m\pi}{a} y \left. \right] + B_2^m \left[\frac{1}{24} \left[4\lambda \left((2+\lambda) \frac{m\pi}{a} y \sinh \frac{m\pi}{a} y + (1-\lambda) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} y^2 \cosh \frac{m\pi}{a} y \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \right] \cos \frac{m\pi}{a} x + \left(2(5+\lambda) \cosh \frac{m\pi}{a} y + (1-\lambda)(1-\lambda) \frac{m\pi}{a} y \sinh \frac{m\pi}{a} y \right. \right. \right. \\ & + 2(1-\lambda)^2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} y^2 \cosh \frac{m\pi}{a} y \left. \right] \frac{m\pi}{a} \left(x - \frac{a}{2} \right) \sin \frac{m\pi}{a} x + (1-\lambda) \left[2 \cosh \frac{m\pi}{a} y \right. \\ & + (1-\lambda) \frac{m\pi}{a} y \sinh \frac{m\pi}{a} y \left. \right] \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 \cos \frac{m\pi}{a} x \left. \right] - \frac{m\pi}{a} y \sinh \frac{m\pi}{a} y \left. \right] \\ & - m^2 \pi^2 \left[C_1^m (1-\lambda) \cosh \frac{m\pi}{a} y + C_2^m \left[2 \cosh \frac{m\pi}{a} y + (1-\lambda) \frac{m\pi}{a} y \sinh \frac{m\pi}{a} y \right] \right] \\ & \times \cos \frac{m\pi}{a} x - K_5 \left[\lambda (1-\lambda) \frac{4r^2}{m^2 \pi^2} \cos \frac{m\pi}{a} x + \left(1-\lambda^2 \cos \frac{m\pi}{a} x \right) \frac{y^2}{b^2} \right] \\ & - K_6 \left[(1-\lambda) \frac{24r^2}{m^2 \pi^2} \left\{ (3\lambda-1) \frac{r^2}{m^2 \pi^2} + \lambda \frac{y^2}{b^2} \right\} \cos \frac{m\pi}{a} x + \left(1-\lambda^2 \cos \frac{m\pi}{a} x \right) \right. \\ & \times \frac{y^4}{b^4} \left. \right] + w_{m0} \lambda^2 \cos \frac{m\pi}{a} x + \sum_n w_{mn} \left[\frac{(n^2 r^2 + \lambda m^2)^2}{(m^2 + n^2 r^2)^2} \cos \frac{m\pi}{a} x - 1 \right] \cos \frac{n\pi}{b} y \left. \right] \\ & + \sum_n n^2 \pi^2 r^2 \left[D_1^n (1-\lambda) \cosh \frac{n\pi}{b} \left(x - \frac{a}{2} \right) + D_2^n \left\{ (1-\lambda) \frac{n\pi}{b} \left(x - \frac{a}{2} \right) \sin \frac{n\pi}{b} \left(x - \frac{a}{2} \right) \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -2\lambda\cosh\frac{n\pi}{b}\left(x-\frac{a}{2}\right)\left]\cos\frac{n\pi}{b}y-K_6\left[\frac{1}{a^2}\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-(2-\lambda)\frac{1}{r^2}\frac{y^2}{b^2}\right]\right. \\
 & -K_2\cdot\lambda+K_3\cdot6\left[\left(1-2\lambda\right)\frac{1}{a^2}\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{\lambda}{r^2}\frac{y^2}{b^2}\right]-K_4\cdot r^2 \\
 & +K_7\cdot30\cdot(1-\lambda)\left[\frac{1}{a^4}\left(x-\frac{a}{2}\right)^4-\frac{6}{a^2}\left(x-\frac{a}{2}\right)^2\frac{1}{r^2}\frac{y^2}{b^2}+\frac{1}{r^4}\frac{y^4}{b^4}\right] \\
 & +\rho\frac{R_x^2}{E}\left[\sum_m\left(\ddot{B}_m^n\cosh\frac{m\pi}{a}y+\ddot{B}_2^m\frac{m\pi}{a}y\sinh\frac{m\pi}{a}y+\ddot{K}_5\frac{y^2}{b^2}+\ddot{K}_6\frac{y^4}{b^4}\right.\right. \\
 & \left.\left.-\ddot{w}_{m0}\right)\left(\cos\frac{m\pi}{a}x-1\right)+\sum_n\ddot{w}_{mn}\left(\cos\frac{m\pi}{a}x-1\right)\cos\frac{n\pi}{b}y\right]-\frac{Pa^4}{\mu^2Eh^3}
 \end{aligned} \tag{31}$$

ここに、 $\mu=\frac{a^2}{R_xh}$

(4)式に Galerkin 法を適用する。Galerkin 法は境界条件が変位で与えられる場合に、この条件を満足するような変位モードを仮定して適用するのが通例である。ここでは変位仮定において 5 種類の変位モードを用いているので、Galerkin 法を用いると、次式が得られる。

$$\frac{R_x^2}{Eh} \frac{2}{ab} \int_0^a \int_0^{b/2} L(w, \phi) \left(\cos \frac{\tilde{m}\pi}{a} x - 1 \right) \cos \frac{\tilde{n}\pi}{b} y dx dy \tag{32}$$

$$\frac{R_x^2}{Eh} \frac{2}{ab} \int_0^a \int_0^{b/2} L(w, \phi) \left(\cos \frac{\tilde{m}\pi}{a} x - 1 \right) \cosh \frac{\tilde{m}\pi}{a} y dx dy \tag{33}$$

$$\frac{R_x^2}{Eh} \frac{2}{ab} \int_0^a \int_0^{b/2} L(w, \phi) \left(\cos \frac{\tilde{m}\pi}{a} x - 1 \right) \frac{\tilde{m}\pi}{a} y \sinh \frac{\tilde{m}\pi}{a} y dx dy \tag{34}$$

$$\frac{R_x^2}{Eh} \frac{2}{ab} \int_0^a \int_0^{b/2} L(w, \phi) \sum_m \frac{y^2}{b^2} \left(\cos \frac{\tilde{m}\pi}{a} x - 1 \right) dx dy \tag{35}$$

$$\frac{R_x^2}{Eh} \frac{2}{ab} \int_0^a \int_0^{b/2} L(w, \phi) \sum_m \frac{y^4}{b^4} \left(\cos \frac{\tilde{m}\pi}{a} x - 1 \right) dx dy \tag{36}$$

ここに、 $\tilde{m}=2, 4, 6, \dots, 2N$, $\tilde{n}=2, 4, 6, \dots, 2N$ (32)~(36)式を次式のように matrix 表示する。

$$\rho \frac{R_x^2}{E} \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} \tag{37}$$

ここで、(29)、(30)式の関係を用いて(37)式を未定係数が $\{d_1\}$, $\{d_2\}$ だけの式で表わせ、次式を得る。

$$\rho \frac{R_x^2}{E} [M] \{d_1\} + [K] \{d_1\} = \{P\} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ここに、} [M] &= [M_{11}] + [M_{12}][S_1^T F_1] + [S_2^T F_2][M_{21}] \\
 & \quad + [S_2^T F_2][M_{22}][S_1^T F_1]
 \end{aligned}$$

$$[K] = [K_{11}] + [K_{12}][S_1^T F_1] + [S_2^T F_2][K_{21}] + [S_2^T F_2][K_{22}][S_1^T F_1]$$

$$\{P\} = \{P_1\} + [S_2^T F_2]\{P_2\}$$

(38)式に基づいて静的、及び固有振動数解析を行なう。ここで用いた解法は、自然境界条件をすべて満足するような解法なので $[K]$ は実対称であり、固有振動数は標準的な固有値問題の解法を利用して求められる。

4. 点支持を有する偏平シェルの解析

点支持を有する偏平シェルの解析は、これまで束縛条件として境界条件だけであったのに対し、新たに束縛条件が課せられた変分問題となる。すなわち、点支持した点の変位拘束条件を付帯条件とした変分問題である。

ここで扱う解析モデルは図 4 に示すように $x=0$, a は従来通り面内変位を拘束した固定支持辺であり、 $y=\pm b/2$ においては任意の点に固定点支持を有する偏平シェルである。支持点では変位 u , v , w , 及び y 方向の傾き $\frac{\partial w}{\partial y}$ を拘束する。

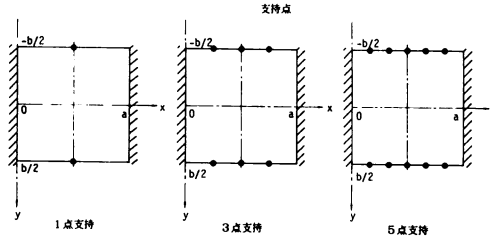


図4 点支持を有するシェル

(4)式を導くのに用いた汎関数 π に、これらの付帯条件と Lagrange 乗数の積を累加することにより、新たな汎関数 π^* を次式のように定義する。

$$\begin{aligned} \pi^* = & \pi + \lambda_i^u \cdot u(x_i, b/2) + \lambda_i^v \cdot v(x_i, \pm b/2) + \lambda_i^w \cdot w(x_i, \pm b/2) \\ & + \lambda_i^s \cdot \frac{\partial}{\partial y} w(x_i, \pm b/2) \end{aligned} \quad (39)$$

ここに、 λ_i^u , λ_i^v , λ_i^w , λ_i^s : Lagrange 乗数
 x_i : 支持点の x 座標

(39)式の第1変分をとると次式となる。

$$\begin{aligned} \delta \pi^* = & - \iint (D \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{1}{Rx} Nx - \frac{1}{Ry} Ny - P + \rho h \dot{w}) \delta w dx dy \\ & + \int (Nx \delta u + Nxy \delta v - Mx \frac{\partial \delta w}{\partial x} + Vx \delta w) dy \\ & - \left[\int Nxy \delta u dx + \{ Nxy(x_i, \pm b/2) + \lambda_i^u \} \delta u(x_i, \pm b/2) \right] \\ & - \left[\int Ny \delta v dx + \{ Ny(x_i, \pm b/2) + \lambda_i^v \} \delta v(x_i, \pm b/2) \right] \\ & - \left[\int Vy \delta w dx + \{ Vy(x_i, \pm b/2) + \lambda_i^w \} \delta w(x_i, \pm b/2) \right] \\ & + \left[\int My \frac{\partial \delta w}{\partial y} dx + \{ My(x_i, \pm b/2) + \lambda_i^s \} \frac{\partial}{\partial y} \delta w(x_i, \pm b/2) \right] \\ & + \delta \lambda_i^u \cdot u(x_i, \pm b/2) + \delta \lambda_i^v \cdot v(x_i, \pm b/2) + \delta \lambda_i^w \cdot w(x_i, \pm b/2) \\ & + \delta \lambda_i^s \cdot \frac{\partial}{\partial y} w(x_i, \pm b/2) \end{aligned} \quad (40)$$

(40)式より、点支持を有する辺における応力境界条件は次式となる。

$$\begin{aligned} My(x, \pm b/2) = 0 \quad \text{ただし} \quad My(x_i, \pm b/2) = -\lambda_i^s \\ Vy(x, \pm b/2) = 0 \quad \text{ただし} \quad Vy(x_i, \pm b/2) = -\lambda_i^w \\ Ny(x, \pm b/2) = 0 \quad \text{ただし} \quad Ny(x_i, \pm b/2) = -\lambda_i^v \\ Nxy(x, \pm b/2) = 0 \quad \text{ただし} \quad Nxy(x_i, \pm b/2) = -\lambda_i^u \end{aligned} \quad (41)$$

また、変位境界条件として次式を得る。

$$\begin{aligned} u(x_i, \pm b/2) = 0, \quad v(x_i, \pm b/2) = 0 \\ w(x_i, \pm b/2) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} w(x_i, \pm b/2) = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

(41)式の境界条件を満足させるために、点支持したところだけで値を表現できるデルタ関数を用いる。これを Fourier 級数展開すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \sum_m y M_m \cos \frac{m\pi}{a} x + y M_0 &= -\lambda_i^s \left(\sum_m \delta_m^s \cos \frac{m\pi}{a} x + \delta_0^s \right) \\ \sum_m y V_m \cos \frac{m\pi}{a} x + y V_0 &= -\lambda_m^w \left(\sum_m \delta_m^w \cos \frac{m\pi}{a} x + \delta_0^w \right) \\ \sum_m \left(\sum_n y N_{mn} \right) \cos \frac{m\pi}{a} x + y N_0 &= -\lambda_i^v \left(\sum_m \delta_m^v \cos \frac{m\pi}{a} x + \delta_0^v \right) \\ \sum_m \left(\sum_n x y N_{mn} \right) \sin \frac{m\pi}{a} x &= -\lambda_i^u \sum_m \delta_m^u \sin \frac{m\pi}{a} x \end{aligned} \quad (43)$$

(43)式を恒等的に成立させるために次式を満足させなければならない。

$$\begin{aligned} y M_m &= -\lambda_i^s \cdot \delta_m^s \quad (m=2, 4, 6, \dots) \\ y M_0 &= -\lambda_i^s \cdot \delta_0^s \\ y V_m &= -\lambda_m^w \cdot \delta_m^w \quad (m=2, 4, 6, \dots) \\ y V_0 &= -\lambda_i^w \cdot \delta_0^w \\ \sum_n y N_{mn} &= -\lambda_i^v \cdot \delta_m^v \quad (m=2, 4, 6, \dots) \\ y N_0 &= -\lambda_i^v \cdot \delta_0^v \\ \sum_n x y N_{mn} &= -\lambda_i^u \cdot \delta_m^u \quad (m=2, 4, 6, \dots) \end{aligned} \quad (44)$$

(27), (28)式を用いれば, (44)式は次のように *matrix* 表示される。

$$[S_1] \{d_2\} = [F_1] \{d_1\} + [D_1] \{\ell\} \quad (45)$$

$$[S_2] \{d_3\} = [F_2] \{d_1\} + [D_2] \{\ell\} \quad (46)$$

ここに, $|\ell|^T = |\lambda_i^s, \lambda_2^s, \dots, \lambda_{NP}^s, \lambda_i^w, \dots, \lambda_{NP}^w, \lambda_i^v, \dots, \lambda_{NP}^v, \lambda_i^u, \dots, \lambda_{NP}^u|$, NP: 点支持数
また(42)式を *matrix* 表示して次式を得る。

$$[S_3] \{d_2\} + [F_3] \{d_1\} = 0 \quad (47)$$

(45)式を(47)式へ代入して $|\ell|$ を $\{d_1\}$ のみで表すと次式となる。

$$\{\ell\} = -[S_3 \cdot S_1^{-1} \cdot D_1]^{-1} [S_3 \cdot S_1^{-1} \cdot F_1 + F_3] \{d_1\} \quad (48)$$

さらに, (45), (46)式へ(48)式を代入する事により, $\{d_2\}, \{d_3\}$ は $\{d_1\}$ のみで表わされ, これを次式のように書き表わす。

$$\{d_2\} = [R_1] \{d_1\} \quad (49)$$

$$\{d_3\} = [R_2] \{d_1\} \quad (50)$$

ここに, $[R_1] = [S_1^{-1} \cdot F_1] - [S_1^{-1} \cdot D_1] [S_3 \cdot S_1^{-1} \cdot D_1]^{-1} [S_3 \cdot S_1^{-1} \cdot F_1 + F_3]$

$[R_2] = [S_2^{-1} \cdot F_2] - [S_2^{-1} \cdot D_2] [S_3 \cdot S_1^{-1} \cdot D_1]^{-1} [S_3 \cdot S_1^{-1} \cdot F_1 + F_3]$

以降の計算は, 自由辺を有する偏平シェルの解析において, 関係式(29), (30)の代わりに(49), (50)式を用いるだけで良く, (31)式以降同様に演算を行ない, 静的, 及び固有振動数解析を行なう。

5. 解析結果

法線方向等分布荷重を受ける、自由辺を有するシェル及び点支持を有するシェルの静的解析を行ない、点支持の数によりシェルの挙動がどのように推移していくか、 $\lambda=-1$, $\lambda=0$, $\lambda=1$ のそれぞれの場合について検討する。また支持点において面内変位を拘束した場合と、しない場合との比較検討も行なう。

解析モデルは、辺長比 $r=1$ 、スパンライズ比 $\mu=50$ 、Poisson 比 $\nu=0.3$ である完全球形シェル ($\lambda=1$)、円筒シェル ($\lambda=1$)、及び完全 H. P. シェル ($\lambda=-1$) とし、平行 2 辺が固定支持、他平行 2 が 1 ~ 11 点で点支持されているか、または自由であるシェルである。

図 5 と図 6 はそれぞれ自由辺から点支持を 1 点、3 点、5 点、7 点、9 点、11 点と増やしていったときの中央点変位 w_{mid} と平均変位 \bar{w} を表わした図であり、細い線は周辺固定されたシェルの解⁵⁾である。Fourier 級数の項数は $N=15$ とした。

これによると、中央点の変位は $\lambda=0$ のとき周辺固定のシェルの変位ときほど差を生じない。自由辺を持つ $\lambda=0$ のシェルは周辺固定に対して 8.1 % の差しかなく、それに対して $\lambda=-1$, $\lambda=1$ のシェルはそれぞれ 59.4 %, 108.0 % も違っている。平均変位においても $\lambda=0$ のとき 42.6 % と差は大きいのだが、 $\lambda=-1$, $\lambda=1$ のときそれぞれ 82.7 %, 185.7 % であるのに比べれば差は小さいと言える。これは $\lambda=0$ のとき y 方向面内力が $\lambda=-1$, $\lambda=1$ のときより小さいので、 y 方向変位を拘束してもその影響が比較的小さいからであると思われる。

以降、点支持の数を 1 点から順次増やしていくと、中央点の変位 w_{mid} 、及び平均変位 \bar{w} は、周辺固定のそれに収束していくのが分かる。

中央点における周辺固定に対する変位差は、1 点を点支持した場合 $\lambda=-1$ のとき 37.5 %, $\lambda=0$ のとき 2.7 %, $\lambda=1$ のとき 39.7 % となり、 $\lambda=1$ の場合 1 点追加するだけで 68 % も中央点の変位差が減少してお

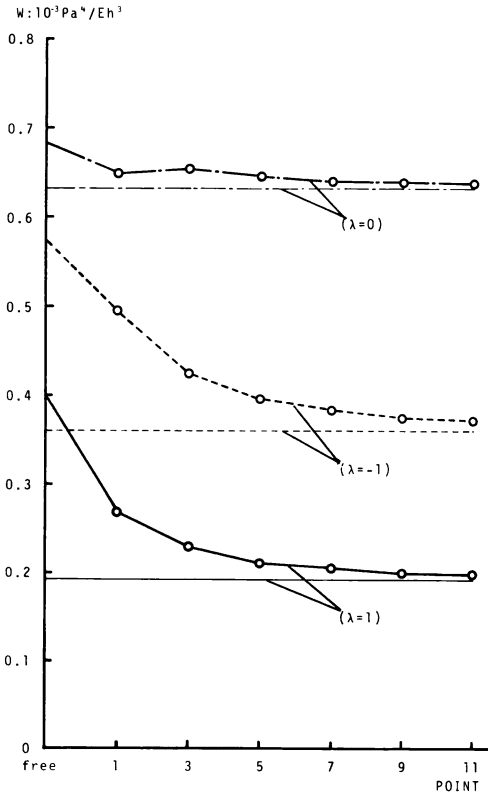


図 5 中央点変位 w_{mid}

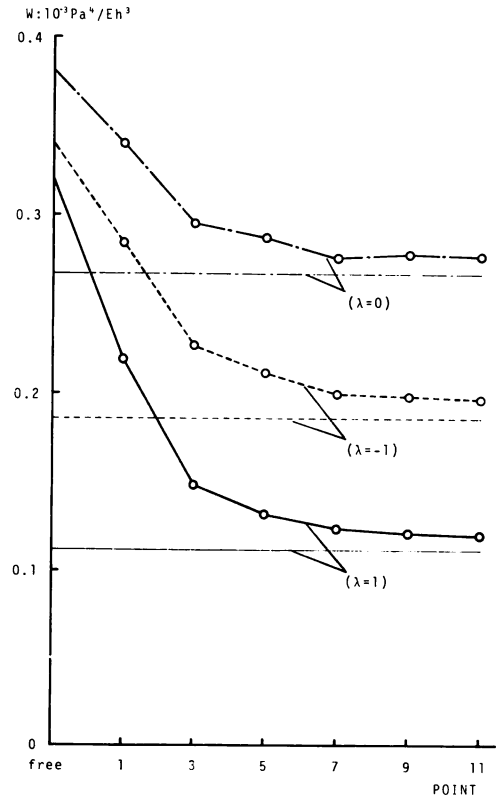


図 6 平均変位 \bar{w}

り、平均変位でも同様の現象がみられ、 $\lambda=1$ の場合 89.8 % も減少している。これは、 $\lambda=1$ の自由辺を有するシェルは自由辺上で最も変位が大きいという特性、つまり周辺に大きな力が生じる形状をしている為であると思われる。

点支持の数を増やしていき、11 点で点支持すると、かなり周辺固定の変位に近くなり、中央点の変位及び平均変位において λ がどの場合でも、その変位差は 8 % 以下となる。

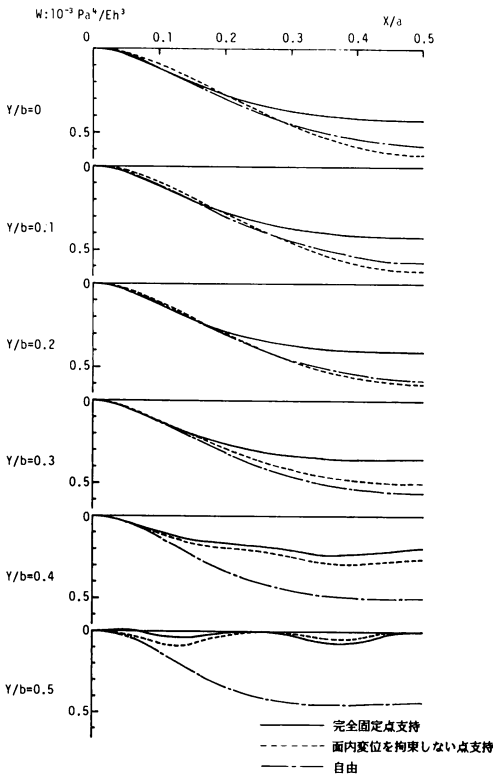


図7 3点支持したシェルの変位分布図

図7は、完全固定の3点支持（実線）、面内変位を拘束しない固定の3点支持（破線）、及び自由辺を有するシェル（一点鎖線）の変位分布図である。これらの平均変位は順に $\bar{w} = .226 \times 10^{-3}$, $.281 \times 10^{-3}$, $.340 \times 10^{-3}$ (Pa^2/Eh^3) であり、図からも分るように完全固定点支持が最も変位が小さく、面内変位を拘束しない点支持の場合は、それより平均変位で 24 % も大きい。また、面内変位を拘束しない点支持を持つシェルは中央点付近において、自由辺を有するシェルより変位が大きくなっており、不利な状態になっている。

参考文献

- 1) 坪井, 高橋 “周辺固定支持された H. P. シェルのフーリエ解析” 日本建築学会論文報告集第104号 昭和39年
- 2) 中田, 坪井 “偏平 H. P. および E. P. シェルのフーリエ弾性解析” 日本建築学会論文報告集第318号 昭和57年
- 3) 清水, 真瀬, 伊藤, 和泉 “偏平推動殻の応力分布へ及ぼす曲率の影響” 建築学会東北支部 昭和52年
- 4) 横尾, 国枝 “偏平シェルの振動 (I)” 及び (II) 日本建築学会論文報告集第114号 昭和40年
- 5) 皆川 “Vlasov 型基礎式に基づく面内変位を抑えた偏平シェルの解析” 建築学会大会 昭和57年
- 6) 皆川, 坂尾 “自由辺に点支持を追加した偏平シェルの線形解析” 建築学会大会 昭和59年
- 7) 皆川 “周辺固定の偏平推動殻の線形解析” 建築学会大会 昭和58年
- 8) 坪井善勝 “連続体力学序説” 産業図書