

# 1/2 超対称な背景時空における M 膜の非超対称な配位に対するゲージ固定された作用

道下 洋二\*

(2010 年 10 月 26 日 受理)

Gauge-Fixed Super M-brane Actions for Nonsupersymmetric Configurations  
in Half Supersymmetric Backgrounds

MICHISHITA Yoji

## 要約

$\kappa$  対称な M 膜の作用の構成は、最大限に超対称な背景時空、すなわち平坦時空、 $AdS_4 \times S^7$ 、 $AdS_7 \times S^4$  でしか可能でない。それは主に超場の成分表示が複雑なことからくる技術的な困難のためである。そこで本稿では、 $\kappa$  対称性をあらかじめゲージ固定することによってその複雑さを避け作用を構成することができることを、1/2 超対称な背景時空における非超対称な配位に対して示す。例として M2 膜背景での M2 膜と Brinkmann 波背景での超粒子を扱う。

キーワード：弦理論、M 理論、超対称性、超空間形式

---

\* 鹿児島大学教育学部 准教授

## 1 はじめに

11次元における  $\kappa$  対称な M 膜の作用と 10次元における  $\kappa$  対称な D 膜の作用は超場形式によって与えられている。また基本弦の Green-Schwarz 型と pure spinor 型の作用も超場形式が元になっている。しかしそれらを座標  $X^m$  やフェルミオン座標  $\theta^\mu$  で書き直すには超場の成分表示について知らなければならない。11次元では超場の  $\theta^\mu$  による展開には  $(\theta)^0$  から  $(\theta)^{32}$  までの 33 個の成分があり、それらを順番に決定し、超重力理論の場に対応する  $(\theta)^0$  の成分で表していく手続きが [2, 3] で与えられているが、この手続きでは  $\theta^\mu$  の高い次数の成分を決定するには莫大な量の計算が必要になる。したがって一般の背景時空ではそれらの具体的表示は知られていない。平坦時空、 $AdS_4 \times S^7$ 、 $AdS_7 \times S^4$  のような最大限に超対称な背景時空のときのみ全次数での成分表示が知られているのが現状である。

しかしながら、Green-Schwarz 型の膜の作用の場合には  $\kappa$  対称性があった。そこでその対称性の適切なゲージ固定条件によってわからない成分を消去することで作用を構成できる可能性がある。本稿では、超振率の 1 次の成分がランク 1/2 の射影演算子を  $\theta$  にかけてものに比例しているという場合にはこのことが実際に可能になることを見る。この条件は 1/2 超対称な背景時空では通常成り立っている。このゲージ固定の後では、背景時空によっては破られていない超対称変換がすべて非斉次項を持ち、そのため自発的に破れてしまう。そのような配位に対してだけこのゲージ固定条件を課すことができる。

記号の定義などは [1] のものをそのまま使うことにする。[1] でも説明しているように、最大限に超対称な場合は成分表示がすべて決定されている。1/2 超対称な場合にはさらに余分な項が成分にあらわれるが、適切なゲージ固定によってそれらを消去できて結果として超場が最大限に超対称な場合と同じになることを第 2 節で示す。第 3 節で例として Brinkmann 波背景での超粒子と M2 膜背景での M2 膜を扱う。付録ではゲージ固定後に破れずに残る対称性の一般形を与える。

## 2 1/2 超対称な背景時空の場合

1/2 超対称な背景時空を議論する前に、最大限に超対称な 11 次元背景時空の場合にどのように超場の成分表示が決定されたかを思い出してみると、その場合は [1] の (4.19)-(4.31)、(4.35) など与えられる再帰関係式を完全に解くことができた。それは  $[T_{ab}{}^\alpha]_1 = ([\tilde{D}_m(\omega), \tilde{D}_n(\omega)]\theta)^\alpha = 0$  のためであった。1/2 超対称な時は Killing スピノルは 16 個しかなく、 $[T_{ab}{}^\alpha]_1$  はゼロではない。 $[\tilde{D}_m(\omega), \tilde{D}_n(\omega)]$  はゼロ固有値の固有ベクトルを 16 個もつので、ランク 1/2 の行列になっている。その構造をいくつかの例で見よう。

最初の例は M2 膜背景である：

$$ds^2 = H^{-2/3}(-dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + H^{1/3}((dy^3)^2 + \dots + (dy^{10})^2), \quad (2.1)$$

$$\tilde{F}_{012m_2} = H^{-2}\partial_{m_2}H. \quad (2.2)$$

ここで  $H = H(y)$  は  $\partial_{m_2}\partial_{m_2}H(y) = 0$  を満たす関数である。  $m_1$  のように 1 のついた添字は 0 から 2 まで、2 のついた添字は 3 から 10 まで動く。多脚場を対角に取ると、 $\tilde{D}_m$  は

$$\tilde{D}_{m_1}(\omega)\epsilon = H^{-1/6}\partial_{m_1}(H^{1/6}\epsilon) - \frac{1}{6}H^{-3/2}\partial_{n_2}H\Gamma_{a_1=m_1}{}^{a_2=n_2}(1 - \Gamma^{012})\epsilon, \quad (2.3)$$

$$\tilde{D}_{m_2}(\omega)\epsilon = H^{-1/6}\partial_{m_2}(H^{1/6}\epsilon) + \frac{1}{12}H^{-1}\partial_{n_2}H(\Gamma_{a_2=m_2}{}^{b_2=n_2} - 2\delta_{m_2}{}^{n_2})(1 - \Gamma^{012})\epsilon, \quad (2.4)$$

となるので、

$$[\tilde{D}_{m_1}(\omega), \tilde{D}_{n_1}(\omega)]\epsilon = 0, \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} [\tilde{D}_{m_1}(\omega), \tilde{D}_{n_2}(\omega)]\epsilon &= \Gamma_{a_1=m_1}{}^{a_2=l_2} \left( \frac{1}{6}H^{-3/2}\partial_{n_2}\partial_{l_2}H - \frac{7}{36}H^{-5/2}\partial_{n_2}H\partial_{l_2}H \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{36}H^{-5/2}\partial_{l_2}H\partial_{p_2}H\Gamma_{c_2=n_2}{}^{b_2=p_2} \right) (1 - \Gamma^{012})\epsilon, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} [\tilde{D}_{m_2}(\omega), \tilde{D}_{n_2}(\omega)]\epsilon &= \left[ \left( \frac{1}{6}H^{-1}\partial_{l_2}\partial_{[m_2}H - \frac{7}{36}H^{-2}\partial_{l_2}H\partial_{[m_2}H \right) \Gamma_{a_2=n_2]}{}^{b_2=l_2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{72}H^{-2}\partial_{l_2}H\partial_{l_2}H\Gamma_{a_2=m_2, b_2=n_2} \right] (1 - \Gamma^{012})\epsilon. \end{aligned} \quad (2.7)$$

期待した通り、 $[\tilde{D}_m(\omega), \tilde{D}_n(\omega)]$  は射影演算子  $\frac{1}{2}(1 - \Gamma^{012})$  に比例している。

2 つ目の例は M5 膜背景である：

$$\begin{aligned} ds^2 &= H^{-1/3}(y)(-dx^0)^2 + (dx^1)^2 + \dots + (dx^5)^2 \\ &\quad + H^{2/3}(y)((dy^6)^2 + \dots + (dy^{10})^2), \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\tilde{F}_{m_2n_2l_2p_2} = \epsilon_{m_2n_2l_2p_2q_2}\partial_{q_2}H. \quad (2.9)$$

ここで  $H = H(y)$  は  $\partial_{m_2}\partial_{m_2}H(y) = 0$  を満たす関数である。  $m_1$  のように 1 のついた添字は 0 から 5 まで、2 のついた添字は 6 から 10 まで動く。多脚場を対角に取ると、 $\tilde{D}_m$  は

$$\tilde{D}_{m_1}(\omega)\epsilon = H^{-1/12}\partial_{m_1}(H^{1/12}\epsilon) - \frac{1}{12}H^{-3/2}\partial_{n_2}H\Gamma_{a_1=m_1}{}^{b_2=n_2}(1 - \Gamma^{6789,10})\epsilon, \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{m_2}(\omega)\epsilon &= H^{-1/12}\partial_{m_2}(H^{1/12}\epsilon) \\ &\quad + \frac{1}{12}H^{-1}\partial_{n_2}H(2\Gamma_{a_2=m_2}{}^{b_2=n_2} - \delta_{m_2}{}^{n_2})(1 - \Gamma^{6789,10})\epsilon, \end{aligned} \quad (2.11)$$

となるので、

$$[\tilde{D}_{m_1}(\omega), \tilde{D}_{n_1}(\omega)]\epsilon = 0, \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} [\tilde{D}_{m_1}(\omega), \tilde{D}_{n_2}(\omega)]\epsilon &= \Gamma_{a_1=m_1}{}^{a_2=l_2} \left( \frac{1}{12}H^{-3/2}\partial_{n_2}\partial_{l_2}H - \frac{1}{9}H^{-5/2}\partial_{n_2}H\partial_{l_2}H \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{36}H^{-5/2}\partial_{l_2}H\partial_{p_2}H\Gamma_{c_2=n_2}{}^{b_2=p_2} \right) (1 - \Gamma^{6789,10})\epsilon, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} [\tilde{D}_{m_2}(\omega), \tilde{D}_{n_2}(\omega)]\epsilon &= \left[ \left( \frac{1}{3}H^{-1}\partial_{l_2}\partial_{[m_2}H - \frac{1}{9}H^{-2}\partial_{l_2}H\partial_{[m_2}H \right) \Gamma_{a_2=n_2]}{}^{b_2=l_2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{9}H^{-2}\partial_{l_2}H\partial_{l_2}H\Gamma_{a_2=m_2, b_2=n_2} \right] (1 - \Gamma^{6789,10})\epsilon, \end{aligned} \quad (2.14)$$

と  $[\tilde{D}_m(\omega), \tilde{D}_n(\omega)]$  は射影演算子  $\frac{1}{2}(1 - \Gamma^{6789,10})$  に比例している。

最後の例は Brinkmann 波背景である：

$$ds^2 = -(2 - H)dt^2 + Hdy^2 - 2(1 - H)dtdy + dx_2^2 + \dots + dx_{10}^2 \quad (2.15)$$

$$= -(dt - dy)(dt + dy) + (H - 1)(dt + dy)^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_{10}^2, \quad (2.16)$$

ここで  $H = H(t + y, x_2, \dots, x_{10})$  は  $\partial_i \partial_i H = 0$  を満たす関数である。添字  $i, j$  は 2 から 10 まで動く。多脚場を以下のようにきめる：

$$\begin{pmatrix} e_t^t & e_t^y \\ e_y^t & e_y^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H^{-1/2} & -(1-H)H^{-1/2} \\ 0 & H^{1/2} \end{pmatrix}, \quad e_i^j = \delta_i^j. \quad (2.17)$$

すると  $\tilde{D}_m$  は、

$$\tilde{D}_t(\omega)\epsilon = H^{-1/4}\partial_t(H^{1/4}\epsilon) - \frac{1}{4}[H^{-1}\partial_y H + H^{-1/2}\partial_i H\Gamma^{it}](1 - \Gamma^{ty})\epsilon, \quad (2.18)$$

$$\tilde{D}_y(\omega)\epsilon = H^{-1/4}\partial_y(H^{1/4}\epsilon) - \frac{1}{4}[H^{-1}\partial_y H + H^{-1/2}\partial_i H\Gamma^{it}](1 - \Gamma^{ty})\epsilon, \quad (2.19)$$

$$\tilde{D}_i(\omega)\epsilon = H^{-1/4}\partial_i(H^{1/4}\epsilon) - \frac{1}{4}H^{-1}\partial_i H(1 - \Gamma^{ty})\epsilon. \quad (2.20)$$

$[\tilde{D}_m(\omega), \tilde{D}_n(\omega)]$  は射影演算子  $\frac{1}{2}(1 - \Gamma^{ty})$  に比例している：

$$[\tilde{D}_t(\omega), \tilde{D}_y(\omega)]\epsilon = 0, \quad [\tilde{D}_i(\omega), \tilde{D}_j(\omega)]\epsilon = 0, \quad (2.21)$$

$$[\tilde{D}_t(\omega), \tilde{D}_i(\omega)]\epsilon = [\tilde{D}_y(\omega), \tilde{D}_i(\omega)]\epsilon = \frac{1}{4}H^{-1/2}\partial_i \partial_j H\Gamma^{jt}(1 - \Gamma^{ty})\epsilon. \quad (2.22)$$

そこで以下では  $[\tilde{D}_m(\omega), \tilde{D}_n(\omega)]$  は何らかのランク 1/2 射影演算子に比例しているものと仮定する。 $[\tilde{D}_m(\omega), \tilde{D}_n(\omega)]\epsilon = 0$  であるから、Killing スピノル  $\epsilon$  は  $\mathcal{P}\epsilon = 0$  を満たす。上の例では  $\tilde{D}_m(\omega)\epsilon$  は次の形をしていた：

$$\tilde{D}_m(\omega)\epsilon = f\partial_m(f^{-1}\epsilon) + G_m\mathcal{P}\epsilon. \quad (2.23)$$

ここで  $f$  は何らかの関数で、 $G_m$  はガンマ行列から作られた行列であり、座標依存性があってもよいとする。もし  $\mathcal{P}$  が定数行列ならば、 $\mathcal{P}\epsilon_0 = 0$  を満たす定数スピノル  $\epsilon_0$  を用いて  $\epsilon = f\epsilon_0$  と書ける。

再帰関係式より、最大限に超対称な場合からの成分表示のずれは  $[T_{ab}{}^\alpha]_1 \propto \mathcal{P}\theta$  に起因することが分かる。したがってこの場合の成分表示は [1] の (4.69)-(4.78) に  $\mathcal{P}\theta$  に比例する余分な項を加えたものになる。例えば、

$$E_m{}^\alpha = e_m{}^\alpha - \frac{i}{2}\left(\bar{\theta}\Gamma^a\mathcal{M}^{-2}\sinh^2\frac{\mathcal{M}}{2}\right)_\alpha[E_m{}^\alpha]_1 + O(\mathcal{P}\theta). \quad (2.24)$$

$\mathcal{P}\theta$  を含む項を決定するには再帰関係式を適用しなければならず、技術的困難からそれらの具体形は知ることができない。したがって超場から作られた  $\kappa$  対称な膜の作用の具体形を知ることができない。しかしながら、 $\kappa$  対称性のゲージ固定条件として  $\mathcal{P}\theta = 0$  をとることで超場の未知の部分の消して具体的な膜の作用を書き下すことができる。

そのようなゲージ固定条件を許す配位はどのようなものであるか考えてみよう。 $\theta$  は、射影  $\mathcal{P}$  で消される部分と、残る部分とに分けられる：

$$\theta_- \equiv \mathcal{P}\theta, \quad \theta_+ \equiv (1 - \mathcal{P})\theta. \quad (2.25)$$

ゲージ固定条件は  $\theta_- = 0$  である。背景時空は 16 成分の Killing スピノル  $\epsilon$  を持っているので、膜の作用は 16 個の超対称性  $\delta X^m = \Xi^m, \delta\theta^\mu = \Xi^\mu$  を持つ。 $\Xi^m$  と  $\Xi^\mu$  は付録で与えられるとおりである。世界面上の場  $X^m$  と  $\theta^\mu$  の真空の配位が破れていない対称性を持つかどうか考えてみよう。 $\theta^\mu$  は普通ゼロとされる。その場合超対称性は  $\delta\theta^\mu = \epsilon^\mu$  である。 $\epsilon$  は  $\mathcal{P}\epsilon = 0$  を満たすので、超対称性は  $\theta_-$

を動かさない。このことから 16 個の超対称性はすべて自発的に破れていることが分かる。補償的  $\kappa$  対称性によって消せるものが破れずに残る超対称性だからである。

したがって  $\kappa$  対称性の固定条件  $\theta_- = 0$  は 1/2 超対称な背景時空上の非超対称な配位に適した条件であることになる。次節でいくつかの例を見ることにする。なおより超対称性が少ない背景場の場合は、 $[\tilde{D}_m(\omega), \tilde{D}_n(\omega)]$  はランクが 1/2 より大きい行列となるので、 $\theta$  の半分以上の成分が  $[T_{ab}{}^\alpha]_1$  の中に残ることになり、 $\kappa$  対称性で消すことはできなくなる。

### 3 例

前節での議論の最初の応用として、Brinkmann 波背景での超粒子の作用を考えよう。まず一般の背景時空での超粒子の作用は

$$S = \int d\tau L = - \int d\tau \frac{1}{2e} E_\tau{}^a E_{\tau a}, \quad (3.1)$$

である。ここで  $E_\tau{}^A = \partial_\tau Z^M E_M{}^A$  であり、 $e$  は 1 脚場である。変分  $\delta e$  と  $\delta Z^M$  から得られる運動方程式はそれぞれ

$$\delta e \rightarrow 0 = E_\tau{}^a E_{\tau a}, \quad (3.2)$$

$$\delta Z^M \rightarrow 0 = E_M{}^a e \partial_\tau \left( \frac{1}{e} E_{\tau a} \right) + 2 \partial_\tau Z^N \partial_{[N} E_{M]}{}^a E_{\tau a}. \quad (3.3)$$

[1] の (1.5) で  $x = -1/4$  とした拘束条件のもとで、この作用は以下であたえられる  $\kappa$  対称性を持つ：

$$\delta_\kappa Z^M E_M{}^\alpha = E_\tau{}^a (\Gamma_a \kappa)^\alpha, \quad \delta_\kappa Z^M E_M{}^a = 0, \quad \delta_\kappa e = -\frac{i}{2} e \kappa_\alpha E_\tau{}^\alpha. \quad (3.4)$$

射影演算子は  $\mathcal{P} = \frac{1}{2}(1 - \Gamma^{45})$  で、 $\kappa$  対称性の固定条件は、この場合は通常半光円錐ゲージと呼ばれる  $\theta_- = \mathcal{P}\theta = 0$  になる。この条件はマヨラナ条件と両立する。すなわち  $\theta_+$  はマヨラナフェルミオンである。Brinkmann 波背景では  $\mathcal{M}^2 = 0$  のために超多脚場と超接続は次のような簡単な形となる：

$$\begin{pmatrix} E_m{}^a & E_m{}^\alpha \\ E_\mu{}^a & E_\mu{}^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_m{}^a & \frac{1}{4} H^{-1} \partial_m H \theta_+^\alpha \\ \frac{i}{8} (\bar{\theta}_+ \Gamma^a)_\mu & \delta_\mu{}^\alpha \end{pmatrix} + O(\theta_-), \quad (3.5)$$

$$\begin{pmatrix} E_a{}^m & E_a{}^\mu \\ E_\alpha{}^m & E_\alpha{}^\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_a{}^m & -\frac{1}{4} e_a{}^m H^{-1} \partial_m H \theta_+^\mu \\ -\frac{i}{8} (\bar{\theta}_+ \Gamma^m)_\alpha & \delta_\alpha{}^\mu + \frac{i}{32} H^{-1} \partial_m H (\bar{\theta}_+ \Gamma^m)_\alpha \theta_+^\mu \end{pmatrix} + O(\theta_-), \quad (3.6)$$

$$\Omega_{mab} = -\omega_{mab} + O(\theta_-), \quad \Omega_{\mu ab} = O(\theta_-). \quad (3.7)$$

超多脚場の引き戻しは

$$E_\tau{}^t = \partial_\tau X^m e_m{}^t + \frac{i}{8} \bar{\theta}_+ \Gamma_y \partial_\tau \theta_+ + O(\theta_-), \quad (3.8)$$

$$E_\tau{}^y = \partial_\tau X^m e_m{}^y - \frac{i}{8} \bar{\theta}_+ \Gamma_y \partial_\tau \theta_+ + O(\theta_-), \quad (3.9)$$

$$E_\tau{}^i = \partial_\tau x^i + O(\theta_-). \quad (3.10)$$

ゲージ固定の後で  $\theta_-$  に対する運動方程式を拘束条件として課さなければならない：

$$0 = \mathcal{P}^\nu{}_\mu \left[ E_\nu{}^a e \partial_\tau \left( \frac{1}{e} E_{\tau a} \right) + 2 \partial_\tau Z^N \partial_{[N} E_{\nu]}{}^a E_{\tau a} \right]. \quad (3.11)$$

これは次のように書きなおせる。

$$0 = (\bar{\theta}_+ \Gamma_i)_\mu \left[ e \partial_\tau \left( \frac{1}{e} \partial_\tau x^i \right) - \frac{1}{2} \partial_i H (\partial_\tau t + \partial_\tau y)^2 \right] + 2H^{-1/4} \partial_\tau (H^{1/4} \bar{\theta}_+ \Gamma_i)_\mu \partial_\tau x^i. \quad (3.12)$$

実はこの拘束条件は、 $\partial_\tau t + \partial_\tau y \neq 0$  であれば他の世界線上の場の運動方程式から導くことができる。そのことは直接の計算でもわかるが、以下のようにしてもわかる。 $\theta_- = 0$  の条件のもとで、 $\theta_-$  の  $\kappa$  変換は

$$\begin{aligned} \delta_\kappa \theta_-^\mu &= E_\tau^\alpha (\Gamma_a \kappa)^\alpha E_a^\nu \mathcal{P}^\mu{}_\nu \\ &= H^{1/2} (\partial_\tau t + \partial_\tau y) (\mathcal{P} \Gamma_y \kappa)^\mu + \partial_\tau x^i (\mathcal{P} \Gamma_i \kappa)^\mu. \end{aligned} \quad (3.13)$$

$\chi(\tau)$  を任意のスピンノルとして、 $\kappa$  が  $(1 - \mathcal{P}) \Gamma_y \chi(\tau)$  であるときには

$$\delta_\kappa \theta_-^\mu = H^{1/2} (\partial_\tau t + \partial_\tau y) (\mathcal{P} \chi(\tau))^\mu. \quad (3.14)$$

これから、 $\partial_\tau t + \partial_\tau y \neq 0$  でありさえすれば  $\kappa$  変換によって  $\theta_-$  はどのような値にでもすることができる。ゲージ固定前の作用は  $\kappa$  不変なので、多少不正確な書き方をすると、

$$0 = \delta_\kappa S = \int d\tau \left[ \delta_\kappa e \frac{\delta L}{\delta e} + \delta_\kappa X^m \frac{\delta L}{\delta X^m} + \delta_\kappa \theta_+^\mu \frac{\delta L}{\delta \theta_+^\mu} + \delta_\kappa \theta_-^\mu \frac{\delta L}{\delta \theta_-^\mu} \right], \quad (3.15)$$

が成り立つ。これと、 $\delta_\kappa \theta_-$  がどのような値でも取れるということから、 $\frac{\delta L}{\delta \theta_-^\mu}$  は必ず  $\frac{\delta L}{\delta e}$ 、 $\frac{\delta L}{\delta X^m}$ 、 $\frac{\delta L}{\delta \theta_+^\mu}$  の線形結合で書くことができる。ことがわかる。

ゲージ固定された作用は  $\theta_+$  について 2 次になっている：

$$S = - \int d\tau \frac{1}{2e} \left[ G_{mn} \partial_\tau X^m \partial_\tau X^n - \frac{i}{4} H^{1/2} (\partial_\tau t + \partial_\tau y) \bar{\theta}_+ \Gamma_y \partial_\tau \theta_+ \right]. \quad (3.16)$$

(A.24) と (A.27) で与えられる超対称変換も  $\mathcal{M}^2 = 0$  のために簡単な形となる：

$$\delta t = -\frac{i}{8} \bar{\epsilon} \Gamma_y \theta_+, \quad \delta y = \frac{i}{8} \bar{\epsilon} \Gamma_y \theta_+, \quad \delta X^i = 0, \quad \delta \theta_+ = \epsilon, \quad \delta e = 0. \quad (3.17)$$

ここで  $\epsilon$  は Killing スピンノルである：

$$\epsilon = H^{-1/4} \epsilon_0, \quad \epsilon_0 : \text{const}, \quad \mathcal{P} \epsilon_0 = 0. \quad (3.18)$$

世界面の一般座標変換についてのゲージ固定はまだ行っていないことに注意せよ。光円錐ゲージ  $t + y \propto \tau$  をとればさらに簡単になることはすぐわかるであろう。この例のように、3 形式背景場がない場合には  $\mathcal{M}^2 = 0$  になるので、つねに成分表示が簡単になる。

次に 2 つ目の例を与えよう：M2 膜背景時空での M2 膜の作用を考える。作用は一般に [4, 5]

$$S = -T_{M2} \int d^3 \sigma \left[ \frac{1}{2} \sqrt{-h} h^{ij} E_i^a E_{ja} - \frac{1}{2} \sqrt{-h} \pm \frac{1}{6} \epsilon^{ijk} E_i^C E_j^B E_k^A A_{ABC} \right], \quad (3.19)$$

ここで  $E_i^A = \partial_i Z^M E_M^A$  で、 $T_{M2}$  は M2 膜の張力、 $h_{ij}$  は世界面の計量である。複号は M2 膜か反 M2 膜かに対応する。[1] の (1.5) と (2.25) で  $x = -y = -1/4$  とした拘束条件のもとで、変分  $\delta h_{ij}$  と  $\delta Z^M$  から得られる運動方程式は

$$\delta h_{ij} \rightarrow h_{ij} = E_i^a E_{ja} \equiv T_{ij}, \quad (3.20)$$

$$\delta Z^M \rightarrow 0 = E_M^A \mathcal{E}_A. \quad (3.21)$$

ここで

$$\mathcal{E}_a = \partial_i (\sqrt{-h} h^{ij} \partial_i E_{ja}) + \sqrt{-h} h^{ij} E_i^b E_j^A \Omega_{Aba}$$

$$\pm \epsilon^{ijk} E_i^b E_j^c E_k^d F_{abcd} \mp \frac{3}{4} i \epsilon^{ijk} E_i^b E_j^a E_k^\beta (C^{-1} \Gamma_{ab})_{\alpha\beta}, \quad (3.22)$$

$$\mathcal{E}_\alpha = -\frac{1}{4} i \sqrt{-h} h^{ij} E_i^a E_j^\beta (C^{-1} \Gamma_a)_{\alpha\beta} \pm \frac{3}{4} i \epsilon^{ijk} E_i^a E_j^b E_k^\beta (C^{-1} \Gamma_{ab})_{\alpha\beta}, \quad (3.23)$$

であり、 $\Omega_{Ab} = E_A^M \Omega_{Mab}$  である。この作用は次の  $\kappa$  対称性を持つ：

$$\delta Z^M E_M^\alpha = (1 \mp \Gamma)^\alpha{}_\beta \kappa^\beta, \quad \delta Z^M E_M^a = 0, \quad \delta h_{ij} = 2(X_{ij} - h_{ij} X_k^k). \quad (3.24)$$

ここで

$$\Gamma = \frac{1}{6\sqrt{-h}} \epsilon^{ijk} E_i^a E_j^b E_k^c \Gamma_{abc}, \quad (3.25)$$

$$X_{ij} = \frac{1}{2} xi \left[ \mp \frac{1}{2\sqrt{-h}} h_{ik} \epsilon^{klm} E_l^a E_m^b E_j^\alpha (C^{-1} \Gamma_{ab})_{\alpha\beta} \right. \\ \left. - h_{ij} (T_k{}^k T_l{}^l + \delta_k{}^k T_l{}^l + \delta_k{}^k \delta_l{}^l) h^{mn} E_m^a E_n^\alpha (C^{-1} \Gamma_a)_{\alpha\beta} + (i \leftrightarrow j) \right]. \quad (3.26)$$

射影演算子とゲージ固定条件はそれぞれ  $\mathcal{P} = \frac{1}{2}(1 - \Gamma^{012})$  と  $\theta_- = \mathcal{P}\theta = 0$  である。この固定条件はマヨラナ条件と両立する。すなわち  $\theta_+$  はマヨラナスピノルである。この固定条件下での超場の成分表示は以下に示す  $\mathcal{M}^2$  の単純さのために非常に単純になる。まず、

$$(\mathcal{M}^2)^\alpha{}_\beta = h_{a_2} \left[ \frac{1}{2} (\Gamma^{a_2 b_2} \theta_+)^\alpha (\bar{\theta}_+ \Gamma_{b_2})_\beta + (\theta_+)^\alpha (\bar{\theta}_+ \Gamma^{a_2})_\beta \right. \\ \left. - (\Gamma_{a_1} \theta_+)^\alpha (\bar{\theta}_+ \Gamma^{a_1 a_2})_\beta - \frac{1}{4} (\Gamma_{b_2 c_2} \theta_+)^\alpha (\bar{\theta}_+ \Gamma^{a_2 b_2 c_2})_\beta \right], \quad (3.27)$$

であり、 $h_{a_2} = -\frac{i}{24} H^{-7/6} \delta_{a_2}{}^{m_2} \partial_{m_2} H$  とおいた。これは  $[(\mathcal{M}^2)^2]^\alpha{}_\beta = 0$  を満たす。したがって

$$E_m^a = e_m^a, \quad (3.28)$$

$$E_{m_1}^\alpha = 0, \quad (3.29)$$

$$E_{m_2}^\alpha = \frac{1}{6} H^{-1} \partial_{m_2} H \theta_+^\alpha, \quad (3.30)$$

$$E_\mu{}^{a_1} = \frac{i}{8} (\bar{\theta}_+ \Gamma^{a_1})_\mu + \frac{i}{96} h_{a_2} \left[ \frac{1}{2} (\bar{\theta}_+ \Gamma^{a_1 a_2 b_2} \theta_+) (\bar{\theta}_+ \Gamma_{b_2})_\mu \right. \\ \left. - (\bar{\theta}_+ \theta_+) (\bar{\theta}_+ \Gamma^{a_1 a_2})_\mu - \frac{1}{4} (\bar{\theta}_+ \Gamma^{a_1 b_2 c_2} \theta_+) (\bar{\theta}_+ \Gamma^{a_2 b_2 c_2})_\mu \right], \quad (3.31)$$

$$E_\mu{}^{a_2} = \frac{i}{8} (\bar{\theta}_+ \Gamma^{a_2})_\mu, \quad (3.32)$$

$$E_\mu{}^\alpha = \delta^\alpha{}_\mu + \frac{1}{6} h_{a_2} \left[ \frac{1}{2} (\Gamma^{a_2 b_2} \theta_+)^\alpha (\bar{\theta}_+ \Gamma_{b_2})_\mu + (\theta_+)^\alpha (\bar{\theta}_+ \Gamma^{a_2})_\mu \right. \\ \left. - (\Gamma_{a_1} \theta_+)^\alpha (\bar{\theta}_+ \Gamma^{a_1 a_2})_\mu - \frac{1}{4} (\Gamma_{b_2 c_2} \theta_+)^\alpha (\bar{\theta}_+ \Gamma^{a_2 b_2 c_2})_\mu \right], \quad (3.33)$$

$$E_a{}^m = e_a{}^m, \quad (3.34)$$

$$E_a{}^\mu = -\frac{1}{6} H^{-1} e_a{}^{m_2} \partial_{m_2} H \theta_+^\mu, \quad (3.35)$$

$$E_\alpha{}^{m_1} = -\frac{i}{8} (\bar{\theta}_+ \Gamma^{m_1})_\alpha + \frac{i}{96} h_{a_2} \left[ \frac{1}{2} (\bar{\theta}_+ \Gamma^{m_1 a_2 b_2} \theta_+) (\bar{\theta}_+ \Gamma_{b_2})_\alpha \right. \\ \left. - (\bar{\theta}_+ \theta_+) (\bar{\theta}_+ \Gamma^{m_1 a_2})_\alpha - \frac{1}{4} (\bar{\theta}_+ \Gamma^{m_1 b_2 c_2} \theta_+) (\bar{\theta}_+ \Gamma^{a_2 b_2 c_2})_\alpha \right], \quad (3.36)$$

$$E_\alpha{}^{m_2} = -\frac{i}{8} (\bar{\theta}_+ \Gamma^{m_2})_\alpha, \quad (3.37)$$

$$E_\alpha{}^\mu = \delta^\mu{}_\alpha - \frac{1}{6} h_{a_2} \left[ \frac{1}{2} (\Gamma^{a_2 b_2} \theta_+)^\mu (\bar{\theta}_+ \Gamma_{b_2})_\alpha - 2(\theta_+)^\mu (\bar{\theta}_+ \Gamma^{a_2})_\alpha \right. \\ \left. - (\Gamma_{a_1} \theta_+)^\mu (\bar{\theta}_+ \Gamma^{a_1 a_2})_\alpha - \frac{1}{4} (\Gamma_{b_2 c_2} \theta_+)^\mu (\bar{\theta}_+ \Gamma^{a_2 b_2 c_2})_\alpha \right], \quad (3.38)$$

$$\Omega_{mab} = -\omega_{mab}, \quad (3.39)$$

$$\Omega_{\mu a_1 b_1} = -\epsilon_{a_1 b_1 c_1} h_{d_2} (\bar{\theta}_+ \Gamma^{c_1 d_2})_\mu, \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{\mu a_1 b_2} = & -h_{b_2} (\bar{\theta}_+ \Gamma_{a_1})_\mu - \frac{1}{12} h_{b_2} h_{a_2} \left[ \frac{1}{2} (\bar{\theta}_+ \Gamma_{a_1}{}^{a_2 c_2} \theta_+) (\bar{\theta}_+ \Gamma_{c_2})_\mu \right. \\ & \left. - (\bar{\theta}_+ \theta_+) (\bar{\theta}_+ \Gamma_{a_1}{}^{a_2})_\mu - \frac{1}{4} (\bar{\theta}_+ \Gamma_{a_1 c_2 d_2} \theta_+) (\bar{\theta}_+ \Gamma^{a_2 c_2 d_2})_\mu \right], \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\Omega_{\mu a_2 b_2} = -\frac{1}{2} h_{c_2} (\bar{\theta}_+ \Gamma^{c_2}{}_{a_2 b_2})_\mu. \quad (3.42)$$

超多脚場の世界面上への引き戻しはさらに簡単になる：

$$E_i{}^{a_1} = \partial_i X^m e_m{}^{a_1} - \frac{i}{8} \bar{\theta}_+ \Gamma^{a_1} \partial_i \theta_+, \quad (3.43)$$

$$E_i{}^{a_2} = \partial_i X^m e_m{}^{a_2}, \quad (3.44)$$

$$E_i{}^\alpha = \partial_i \theta_+^\alpha + \frac{1}{6} H^{-1} \partial_i H \theta_+^\alpha. \quad (3.45)$$

[1] の (4.32) を使えば作用の 3 形式部分は次のようになる：

$$\begin{aligned} \frac{1}{3!} \epsilon^{ijk} E_i{}^C E_j{}^B E_k{}^A A_{ABC} &= \epsilon^{ijk} \left[ \frac{1}{3!} \partial_i X^l \partial_j X^n \partial_k X^m C_{mnl} - \frac{i}{8} (\bar{\theta}_+ \Gamma_{ab})_\gamma \int_0^1 dt \{ E_i{}^a E_j{}^b E_k{}^\gamma \}_{\theta \rightarrow t\theta} \right] \\ &= \epsilon^{ijk} \left[ \frac{1}{3!} \partial_i X^l \partial_j X^n \partial_k X^m C_{mnl} \right. \\ &\quad - \frac{i}{16} \partial_i X^{m_1} \partial_j X^{n_1} (\bar{\theta}_+ \Gamma_{m_1 n_1} \partial_k \theta_+) - \frac{i}{16} \partial_i X^{m_2} \partial_j X^{n_2} (\bar{\theta}_+ \Gamma_{m_2 n_2} \partial_k \theta_+) \\ &\quad - \frac{1}{128} \partial_i X^{m_1} (\bar{\theta}_+ \Gamma^{a_1} \partial_j \theta_+) (\bar{\theta}_+ \Gamma_{m_1 a_1} \partial_k \theta_+) \\ &\quad \left. + \frac{i}{3072} \epsilon^{ijk} (\bar{\theta}_+ \Gamma^{a_1} \partial_i \theta_+) (\bar{\theta}_+ \Gamma^{b_1} \partial_j \theta_+) (\bar{\theta}_+ \Gamma_{a_1 b_1} \partial_k \theta_+) \right]. \end{aligned} \quad (3.46)$$

(3.43)、(3.44)、(3.46) を用いればゲージ固定された作用は簡単に書き下すことができる。それには  $\theta_+$  の 7 次以上の項は含まれない。

(A.24) と (A.27) から計算される超対称変換  $\delta X^m = \Xi^m$  と  $\delta \theta^\mu = \Xi^\mu$  は再び非常に簡単になる：

$$\delta X^{m_1} = \frac{i}{8} \epsilon \Gamma^{m_1} \theta_+, \quad \delta X^{m_2} = 0, \quad \delta \theta_+^\mu = \epsilon^\mu, \quad \delta h_{ij} = 0. \quad (3.47)$$

ゲージ固定の後で  $\theta_-$  の運動方程式が拘束条件として課されなければならない：

$$0 = \mathcal{P}^\nu{}_\mu E_\nu{}^A \mathcal{E}_A. \quad (3.48)$$

前の例と同様、これは  $\delta \theta_-^\mu = \mathcal{P}^\mu{}_\nu E_\alpha{}^\nu (1 \mp \Gamma)^\alpha{}_\beta \kappa^\beta = (\mathcal{P}(1 \mp \Gamma))^\alpha{}_\beta \kappa^\beta$  が  $\kappa$  を適切に選ぶことで、 $1 - \mathcal{P}$  で消される部分空間の中で任意の値に取れる場合には他の世界面上の場の運動方程式から導くことができる。逆に、点  $\theta_- = 0$  の近傍で  $\delta \theta_-^\mu$  が任意の値をとれなければ  $\theta_- = 0$  というゲージ固定条件を課することはできない。例えば、背景場に平行に伸びた膜または反膜を考え、静的ゲージ  $X^{m_1} = \sigma^{i=m_1}$  をとろう。 $H$  は普通  $H = 1 + (X^{m_2}$  を含む項) の形に取る。そうすると

$$\begin{aligned} \delta \theta_-^\mu &= (\mathcal{P}(1 \pm \Gamma^{012}))^\alpha{}_\beta \kappa^\beta \\ &\quad + (\text{運動方程式に比例する項}) \\ &\quad + (X^{m_2} \text{ と } \theta_+ \text{ を含む項}). \end{aligned} \quad (3.49)$$

そして膜に対応する上の符号を選ぶと、上の式の右辺の第 1 項は消える。したがって一般に  $\delta \theta_-^\mu$  に任意の値を与えることはできない。反膜に対応する下の符号をとると、第 1 項は  $2(\mathcal{P}\kappa)^\alpha$  となり世界

面場の揺らぎが小さければ任意の値に設定できる。このことからここでの  $\kappa$  対称性の固定条件は膜背景場での反膜を記述するのに適していることが分かる。

## 付録

### A

この付録では超一般座標変換、超局所ローレンツ変換、超 U(1) ゲージ変換について議論する。以下ではそれらの変換パラメータをそれぞれ  $\Xi^M$ 、 $\Lambda_A^B$ 、 $\Sigma_{MN}$  で表す。これらのパラメータの最低次の成分  $[\Xi^m]_0 \equiv \xi^m$ 、 $[\Xi^\mu]_0 \equiv \epsilon^\mu$ 、 $[\Lambda_a^b]_0 \equiv -\lambda_a^b$ 、 $[\Sigma_{mn}]_0 \equiv \sigma_{mn}$  はそれぞれ通常の一般座標変換、局所超対称性、局所ローレンツ変換、U(1) ゲージ変換に対応する。高次の成分はゲージ固定条件 ([1] の (3.5)) を課すのに用いる。

これらの変換では超場は以下のように変換される：

$$\delta E_M^A = \Xi^N \partial_N E_M^A + \partial_M \Xi^N E_N^A + E_M^B \Lambda_B^A, \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} \delta \Omega_{MA}^B &= \Xi^N \partial_N \Omega_{MA}^B + \partial_M \Xi^N \Omega_{NA}^B \\ &\quad - \partial_M \Lambda_A^B + \Omega_{MA}^C \Lambda_C^B - \Lambda_A^C \Omega_{MC}^B, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\delta A_{MNL} = \Xi^P \partial_P A_{MNL} + 3\partial_{[M} \Xi^P A_{P|N|L]} + 3\partial_{[M} \Sigma_{NL]}. \quad (\text{A.3})$$

以下では  $\theta^\mu \Sigma_{\mu N} = 0$  という条件を課すことにする。これはゲージ固定条件 ([1] の (3.5)) に類似しており、常に満たされるようにすることが可能である。実際  $\Sigma_{MN}$  と  $\Sigma_{MN} + \partial_{[M} S_{N]}$  は同じ超 U(1) ゲージ変換を与え、 $S_M$  を用いることで  $\Sigma_{MN}$  を  $\theta^\mu \Sigma_{\mu N} = 0$  を満たすように再定義することができる。この条件から  $[\Sigma_{\mu N}]_0 = 0$  が従う。上の変換式の最低次の項をとると期待される変換の形を得る：

$$[\delta E_m^a]_0 = \delta e_m^a = \xi^n \partial_n e_m^a + \partial_m \xi^n e_n^a + \lambda_a^b e_m^b - \frac{1}{4} i \bar{\epsilon} \Gamma^a \psi_m, \quad (\text{A.4})$$

$$[\delta E_m^\alpha]_0 = \delta \psi_m^\alpha = \xi^n \partial_n \psi_m^\alpha + \partial_m \xi^n \psi_n^\alpha + \frac{1}{4} (\Gamma^{ab} \psi_m)^\alpha \lambda_{ab} + \frac{1}{4} (\tilde{D}_m(\hat{\omega}) \epsilon)^\alpha, \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} [\delta \Omega_{mab}]_0 &= -\delta \hat{\omega}_{mab} = -\xi^n \partial_n \hat{\omega}_{mab} - \partial_m \xi^n \hat{\omega}_{nab} \\ &\quad + \partial_m \lambda_{ab} + \hat{\omega}_{ma}^c \lambda_{cb} - \lambda_a^c \hat{\omega}_{mcb} + \epsilon^\alpha e_m^c [R_{\alpha cab}]_0 - \epsilon^\alpha \psi_m^\beta [R_{\alpha \beta ab}]_0, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$[\delta A_{mnl}]_0 = \delta C_{mnl} = \xi^p \partial_p C_{mnl} + 3\partial_{[m} \xi^p C_{p|nl]} + 3\partial_{[m} \sigma_{nl]} + \frac{3}{4} i \bar{\epsilon} \Gamma_{[mn} \psi_{l]}. \quad (\text{A.7})$$

ゲージ固定の後でも、その固定条件を動かさない対称性は破れずに残る。それらの変換のパラメータの高次の成分は、 $\theta^\mu \delta E_\mu^A = 0$ 、 $\theta^\mu \delta \Omega_{\mu ab} = 0$ 、 $\theta^\mu \delta A_{\mu NL} = 0$  を課すことで最低次の成分から決定できるはずである。これらとゲージ固定条件から次を得る：

$$\theta^\mu \partial_\mu \Xi^M = \Xi^{\mu=\alpha} (\delta_\alpha^M - E_\alpha^M) + \frac{1}{4} (\Gamma^{ab} \theta)^\alpha E_\alpha^M \Lambda_{ab}, \quad (\text{A.8})$$

$$\theta^\mu \partial_\mu \Lambda_{ab} = -\Xi^\mu \Omega_{\mu ab} + \theta^\mu \partial_\mu \Xi^M \Omega_{Mab}, \quad (\text{A.9})$$

$$(2 + \theta^\mu \partial_\mu) \Sigma_{\nu\lambda} = \Xi^\mu A_{\mu\nu\lambda} - \theta^\mu \partial_\mu \Xi^M A_{M\nu\lambda}, \quad (\text{A.10})$$

$$(1 + \theta^\mu \partial_\mu) \Sigma_{\nu l} = \Xi^\mu A_{\mu\nu l} - \theta^\mu \partial_\mu \Xi^M A_{M\nu l}, \quad (\text{A.11})$$

$$\theta^\mu \partial_\mu \Sigma_{nl} = \Xi^\mu A_{\mu nl} - \theta^\mu \partial_\mu \Xi^M A_{Mnl}. \quad (\text{A.12})$$

これらを用いて、 $E_M^A$ 、 $\Omega_{MA}^B$ 、 $A_{MNL}$ の成分表示を知っているという前提のもとに、高次の成分を順次決めていくことができる。これは再帰関係式が $E_M^A$ 、 $\Omega_{MA}^B$ 、 $A_{MNL}$ を順次決めていくのと同様の手続きである。しかしながら上の式は変換パラメータについて1次なので、それらを一気に解いて簡潔な表示を得ることが期待できる。そのためにまず $\theta^\mu$ を任意パラメータ $t$ だけリスケールする： $\theta^\mu \rightarrow t\theta^\mu$ 。そして $\theta^\mu \partial_\mu$ を $t\partial_t$ に置き換えることができる。そうすると

$$t\partial_t \Xi^m = -Q^{\mu=\alpha} E_\alpha^m, \quad (\text{A.13})$$

$$t\partial_t \Xi^\mu = \Xi^\mu - Q^{\nu=\alpha} E_\alpha^\mu, \quad (\text{A.14})$$

$$t\partial_t \Lambda_{ab} = -Q^{\mu=\alpha} \Omega_{\alpha ab}, \quad (\text{A.15})$$

$$t\partial_t \Sigma = Q^{\mu=\alpha} A_\alpha. \quad (\text{A.16})$$

ここで

$$Q^\mu = \Xi^\mu - \frac{t}{4} (\Gamma^{ab}\theta)^\mu \Lambda_{ab}, \quad (\text{A.17})$$

$$A_M = \frac{1}{2} dZ^L dZ^N A_{NLM}, \quad (\text{A.18})$$

$$A_\alpha = E_\alpha^M A_M, \quad (\text{A.19})$$

$$\Sigma = \frac{1}{2} dZ^N dZ^M \Sigma_{MN}. \quad (\text{A.20})$$

これらの式や以下現れる式の中では超場は $\theta^\mu \rightarrow t\theta^\mu$ とリスケールされているものと理解する。そうすると $Q^\mu$ に対する次の微分方程式を得る：

$$\partial_t Q^\mu = Q^{\nu=\alpha} \left[ \frac{1}{t} (\delta_\alpha^\mu - E_\alpha^\mu) - \frac{1}{4} (\Gamma^{ab}\theta)^\mu \Omega_{\alpha ab} \right]. \quad (\text{A.21})$$

ここで $\Omega_{\alpha ab} = E_\alpha^M \Omega_{Mab}$ である。 $\delta_\alpha^\mu - E_\alpha^\mu$ は $\theta$ のゼロ次の項を持たないため、上式中の $\frac{1}{t} (\delta_\alpha^\mu - E_\alpha^\mu)$ には $t$ は逆べきでは入っていないことに注意せよ。この方程式の解は次の経路順序積の形で与えられる：

$$Q^\mu(t) = \epsilon^{\lambda=\alpha} \text{P exp} \left[ \int_0^t dt' \left\{ \frac{1}{t'} (\delta_\beta^\nu - E_\beta^\nu(t')) - \frac{1}{4} (\Gamma^{ab}\theta)^\nu \Omega_{\beta ab}(t') \right\} \right]_\alpha^\mu. \quad (\text{A.22})$$

ここで

$$\begin{aligned} \text{P exp} \left[ \int_0^t dt' M_\beta^\nu(t') \right]_\alpha^\mu &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \\ &\quad \times M(t_n)_\alpha^{\nu_n} M(t_{n-1})_{\beta_{n-1}}^{\nu_{n-1}} \dots M(t_1)_{\beta_1}^{\nu_1}. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

そして変換パラメータの最終的表示を得る：

$$\Xi^m = \xi^m - \int_0^t \frac{dt'}{t'} Q^{\mu=\alpha}(t') E_\alpha^m(t'), \quad (\text{A.24})$$

$$\Lambda_{ab} = -\lambda_{ab} - \int_0^t \frac{dt'}{t'} Q^{\mu=\alpha}(t') \Omega_{\alpha ab}(t'), \quad (\text{A.25})$$

$$\Sigma = \sigma + \int_0^t \frac{dt'}{t'} Q^{\mu=\alpha}(t') A_\alpha(t'), \quad (\text{A.26})$$

$$\Xi^\mu = Q^\mu + \frac{t}{4} (\Gamma^{ab}\theta)^\mu \Lambda_{ab}. \quad (\text{A.27})$$

ここで  $\sigma = \frac{1}{2}dX^n dX^m \sigma_{mn}$  である。右辺の積分は  $[E_\alpha{}^m]_0 = 0$ 、 $[\Omega_{\alpha ab}]_0 = 0$ 、 $[A_\alpha]_0 = 0$  のためにきちんと定義できていることに注意せよ。最大に超対称な背景時空の場合は  $Q^\mu(t)$  は経路順序ではなく普通の指数関数で書き直せる：

$$Q^\mu(t) = \epsilon^{\lambda=\alpha} \exp \left[ \int_0^t \frac{dt'}{t'} \{ \delta_{\beta\nu} - (t')^2 [\mathcal{M} \coth((t')^2 \mathcal{M})]_{\beta\nu} \} \right]_\alpha{}^\mu. \quad (\text{A.28})$$

仮に最低次の背景場が対称性を持っていたとする。すなわち  $[\delta E_M{}^A]_0$ 、 $[\delta \Omega_{MA}{}^B]_0$ 、 $[\delta A_{MNL}]_0$  がゼロであったとする。通常のアイソメトリと破れていない超対称性はこのような対称性の例である。超場の高次の項は最低次の成分で表せるので、それらもこの対称性で変換しない。したがって  $\delta E_M{}^A = 0$ 、 $\delta \Omega_{MA}{}^B = 0$ 、 $\delta A_{MNL} = 0$  である。すなわちパラメータ (A.24)-(A.27) で表される変換は全次数においても対称性である。

特にこれは  $\xi^m$  と  $\epsilon^\mu$  が背景時空の Killing ベクトルと Killing スピノルである場合  $\delta X^m = \Xi^m$  と  $\delta \theta^\mu = \Xi^\mu$  は膜の作用の対称性であることを意味する。

## 参考文献

- [1] 道下 洋二, “11 次元における超空間形式の詳細について”, 鹿児島大学 教育学部 研究紀要 自然科学編 第 61 巻 (2010 年 3 月)
- [2] B. de Wit, K. Peeters and J. Plefka, “Superspace geometry for supermembrane background”, hep-th/9803209, Nucl. Phys. **B532** (1998) 99.
- [3] D. Tsimpis, “Curved 11D Supergeometry” hep-th/0407244, JHEP **0411** (2004) 087.
- [4] E. Bergshoeff, E. Sezgin and P. K. Townsend “Supermembranes and eleven-dimensional supergravity”, Phys. Lett. **B189** (1987) 75.
- [5] E. Bergshoeff, E. Sezgin and P. K. Townsend “Properties of the eleven-dimensional supermembrane theory”, Annals. Phys. **185** (1988) 330.