

3 次エルミート補間近似による形式的線形化法と誤差解析

成清 勝博*・高田 等

(受理 平成 7 年 5 月 31 日)

A Formal Linearization Method by the Cubic Hermite Interpolation and its Error Analysis

Katsuhiro NARIKIYO and Hitoshi TAKATA

In this paper, a computational method of formal linearization, using a piecewise cubic Hermite interpolation is proposed. A nonlinear system represented by nonlinear ordinary differential equations is converted into an approximated linear system. Numerical computations are easily carried out with the aid of computers. Error analysis of the linearization is also discussed, and it is verified through some numerical examples.

1. まえがき

非線形システムに対する制御問題や状態推定問題は一般にそのアルゴリズムが複雑になり、計算機使用時の計算誤差や計算時間の増大等の難点がある。一方、非線形システムを何らかの手法で線形化し、既存の線形理論を適用する方法も研究されてきた。例えば局所線形化法として、テイラー展開の 1 次近似法があるが、展開点近傍でしか十分な精度が得られず、特に非線形性の強い系では実用に供さないことがあった。また、広域線形化法として座標変換を用いた線形化法も研究されてきた。この変換は、原非線形システム方程式に強く依存するもので、現実の様々な非線形システムに対処するのが容易でない。この一対処法として、計算機により、機械的に線形近似システムへ変換する方法が考察され始めた。本論文では、区分的に、しかし、原非線形方程式を滑らかに近似する手法である、3 次エルミート補間近似を使って関数近似を行った。具体的には、与えられた非線形微分方程式の定義域を小領域に分割し、領域毎に状態変数の 3 次までの多項式で近似する。この補間法の特長は滑らかに接続する区分的多項式である。しかも、各多項式は、その小領域の端点の関数値と導関数値だけで局所的に決定される。

したがって、小領域の数が増えても計算量と必要メモリ量は共に増大しない利点がある。また、本手法の誤差についても考察し、いくつかの数値実験により、領域幅を小さくすれば近似誤差が減少することを確認した。

2. 問題の設定

つぎの非線形システムが与えられたとしよう。

$$\begin{aligned}\Sigma_1: \dot{x}(t) &= f(x(t)) \\ x(0) &= x_0 \in D\end{aligned}\quad (1)$$

ただし、

$x = [x_1, \dots, x_n]^T$: n 次元状態ベクトル、

$x \in D = \Pi_{i=1}^n [p_i, p_i + q_i] \subset R^n$: 長方形定義域、

$f = [f_1, \dots, f_n]^T$: 連続微分可能な非線形ベクトル値関数
ここで、線形化関数

$$\phi(x) = [\phi_1(x), \dots, \phi_n(x), \dots]^T \quad (2)$$

を与えれば

$$\dot{\phi}(x) = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^T} f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_k} f_k(x) \quad (3)$$

より、右辺を ϕ に関し、線形近似表現すれば

$$\dot{\phi}(x) \approx A\phi + B \quad (4)$$

* 広島商船高等専門学校電子制御工学科

となり, (1)式がつぎの形式的線形システム

$$\begin{aligned}\Sigma_2: \dot{z}(t) &= Az(t) + B \\ z(0) &= \phi(x_0)\end{aligned}\quad (5)$$

ただし, A : 定数行列, B : 定数ベクトル
へ変換される。また逆変換は

$$x = \phi^{-1}(z) \quad (6)$$

である。この種の形式的線形化問題では, 簡便で, 高精度な計算機による計算法の開発が重要である。これまで $\phi(x)$ として, 三角関数列[1], チェビシェフ直交関数列[2]等を用いた研究が報告され $\phi(x)$ の次元を増加することによって近似精度が向上することが確認されている。本論文では非線形関数の定義域を分割し, 小領域毎に3次エルミート補間多項式で近似を行う。また, $\phi(x)$ として状態変数の3次までのべき項列を用いるので, $\phi(x)$ の次元は状態ベクトルの次元によって決定される。

3. 形式的線形化計算法

3.1 スカラーシステム

つぎの非線形スカラーシステムが与えられたとしよう。

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (7)$$

ただし, $x(t) \in [p, p+q] \subset R$: 定義域,

f : 連続微分可能な非線形関数

まず, 状態変数の高次項を取り扱いやすくするため, 以下の変数変換を行う。

$$y = (x-p)/q \quad (8)$$

(8)式を(7)式に代入すると,

$$\dot{y}(t) = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{q} f(qy(t)+p) \equiv g(y(t)) \quad (9)$$

となり, 定義域は $y \in [0, 1]$ となる。ここで線形化関数として, $\phi(y)$ を

$$\phi(y) = \begin{bmatrix} \phi_1(y) \\ \phi_2(y) \\ \phi_3(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y^2 \\ y^3 \end{bmatrix} \quad (10)$$

とする。この $\phi(y)$ を時刻 t で微分すると

$$\begin{aligned}\dot{\phi}(y) &= \frac{d\phi}{dy} \frac{dy}{dt} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2y \\ 3y^2 \end{bmatrix} g(y) \\ &\equiv \begin{bmatrix} g_1(y) \\ g_2(y) \\ g_3(y) \end{bmatrix} \equiv G(y)\end{aligned}\quad (11)$$

となる。 y の定義域を節点 $\xi_i (0 \leq i \leq n)$ で分割し,

$$\begin{aligned}0 &= \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_n = 1 \\ h_i &= \xi_{i+1} - \xi_i\end{aligned}\quad (12)$$

小区間 $[\xi_i, \xi_{i+1})$ 毎に $G(y)$ の各要素を3次エルミート補間近似すれば

$$\begin{aligned}g_1(y) &\approx a_{i10} + a_{i11}y + a_{i12}y^2 + a_{i13}y^3 \\ g_2(y) &\approx a_{i20} + a_{i21}y + a_{i22}y^2 + a_{i23}y^3 \\ g_3(y) &\approx a_{i30} + a_{i31}y + a_{i32}y^2 + a_{i33}y^3\end{aligned}\quad (13)$$

となる。(13)式を $\phi(y)$ を用いて表現すると,

$$G(y) \approx A_i \phi(y) + B_i \equiv H_i(y) \quad (14)$$

ただし,

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{i11} & a_{i12} & a_{i13} \\ a_{i21} & a_{i22} & a_{i23} \\ a_{i31} & a_{i32} & a_{i33} \end{bmatrix}, B_i = \begin{bmatrix} a_{i10} \\ a_{i20} \\ a_{i30} \end{bmatrix}$$

であり, (11)式がつぎの形式的線形化システム

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= A_i z(t) + B_i \\ z(0) &= \phi(y(0))\end{aligned}\quad (15)$$

に変換される。係数 A_i と B_i は関数 $H_i(y)$ が $G(y)$ とその小区間の端点で関数値と導関数値が等しくなるように決定するので,

$$\begin{aligned}H_i(\xi_i) &= G(\xi_i), \quad H_i(\xi_{i+1}) = G(\xi_{i+1}) \\ H'_i(\xi_i) &= G'(\xi_i), \quad H'_i(\xi_{i+1}) = G'(\xi_{i+1})\end{aligned}\quad (16)$$

ただし, $' = d/dy$

より求める。なお逆変換は, (8), (10)式より,

$$x = qy + p = qK\phi(y) + p \quad (17)$$

ただし, $K = [1, 0, 0]$

となる。したがって, 形式的線形化を介して得られる $x(t)$ の近似解 $\hat{x}(t)$ は

$$\hat{x}(t) = qKz(t) + p \quad (18)$$

で求められる。

3.2 多次元システム

スカラーシステムの場合と同様に, まず, 以下の変数変換をおこなう。

$$y = Q^{-1}(x-P) \quad (19)$$

ただし, $y = [y_1, \dots, y_n]^T$,

$$Q = \text{diag}(q_1, \dots, q_n), P = [p_1, \dots, p_n]^T$$

(19)式を(1)式に代入すると,

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial x^T} \dot{x} = Q^{-1} f(Qy + P) \equiv g(y) \quad (20)$$

となり, (20)式の定義域は $y \in \Pi_{k=1}^n [0, 1]$ となる。スカラーシステムの場合を拡張して, 線形化関数 $\phi(y)$ を y_i のべき項列を用いて定義する。

$$\phi(y) = [T_{(100 \dots 0)}(y), T_{(200 \dots 0)}(y), T_{(300 \dots 0)}(y), \\ T_{(010 \dots 0)}(y), T_{(110 \dots 00)}(y), \dots, \\ T_{(r_1 r_2 r_3 \dots r_n)}(y), \dots, T_{(333 \dots 3)}(y)]^T \quad (21)$$

ただし, $T_{(r_1 r_2 \dots r_n)}(y)$ を

$$T_{(r_1 r_2 \dots r_n)}(y) = \prod_{k=1}^n y_k^{r_k} \quad (22)$$

$$0 \leq r_k \leq 3 (r_1 + \dots + r_n \neq 0)$$

と定義する。 $\phi(y)$ を時刻 t で微分すると

$$\dot{\phi}(y) = \frac{\partial \phi}{\partial y^T} g(y) \\ \equiv \begin{bmatrix} g_1(y) \\ \vdots \\ g_{4^n-1}(y) \end{bmatrix} \equiv G(y) \quad (23)$$

となる。ここで, 定義域 $\Pi_{k=1}^n [0, 1]$ を m 個の小領域 $D_i (1 \leq i \leq m)$

$$D_i = \prod_{k=1}^n [\alpha_{ik}, \alpha_{ik} + \delta_{ik}] \quad (24)$$

$$\bigcup_{i=1}^m D_i = \prod_{k=1}^n [0, 1] \quad (25)$$

$$D_i \cap D_j = \emptyset \quad (\text{if } i \neq j) \quad (26)$$

$$\Delta_k = \max_{1 \leq i \leq m} \delta_{ik} \quad (27)$$

で分割し, この小領域毎に線形化を行う。(23)式の $G(y)$ を小領域 D_i で3次エルミート補間近似し, $\phi(y)$ に関し線形近似表現すれば,

$$G(y) \approx A_i \phi(y) + B_i \equiv H_i(y) \quad (28)$$

となり, (23)式がつぎの形式的線形化システム

$$\dot{z}(t) = A_i z(t) + B_i \quad (29) \\ z(0) = \phi(y(0))$$

に変換される。係数 A_i と B_i は関数 $H_i(y)$ が $G(y)$ とその小領域の端点で関数値と, 導関数値が等しくなるように近似する。具体的には

$$H_i^{(r_1 r_2 \dots r_n)}(p) = G^{(r_1 r_2 \dots r_n)}(p) \\ H_i^{(r_1 r_2 \dots r_n)}(q) = G^{(r_1 r_2 \dots r_n)}(q) \quad (30)$$

ただし,

$$p = [\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in}]^T, \\ q = [\alpha_{i1} + \delta_{i1}, \alpha_{i2} + \delta_{i2}, \dots, \alpha_{in} + \delta_{in}]^T \\ G^{(000 \dots 0)}(y) = G(y), \\ G^{(100 \dots 0)}(y) = \frac{\partial}{\partial y_1} G(y) \quad (31) \\ G^{(010 \dots 0)}(y) = \frac{\partial}{\partial y_2} G(y), \dots, \\ G^{(110 \dots 0)}(y) = \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} G(y), \dots, \\ G^{(111 \dots 1)}(y) = \frac{\partial^n}{\partial y_1 \dots \partial y_n} G(y), \\ r_k = 0 \text{ or } 1, 1 \leq k \leq n$$

を満たすように決定する。なお逆変換は(19), (21)式より,

$$x = QK\phi(y) + P \quad (32)$$

ただし, K は定数行列 ($n \times (4^n - 1)$) で, その要素 k_{ij} は,

$$k_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } j = 4^{i-1}, (1 \leq i \leq n) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となる。したがって, 形式的線形化を介して得られる $x(t)$ の近似解 $\hat{x}(t)$ は

$$\hat{x}(t) = QKz(t) + P \quad (33)$$

で求められる。

4. 誤差解析

(1)式の解 $x(t)$ と, 形式的線形化を介して求められた(33)式の解 $\hat{x}(t)$ の誤差について考察する。以下ベクトルのノルム $\|\cdot\|$ は通常のユークリッドまたは最大値ノルムとし, 行列についてはその作用素ノルムとする。まず, 線形化関数 $\phi(y)$ とその近似関数 z との誤差伝播について考える。時刻 $t (0 \leq t \leq t_1)$ に, $y(t)$ が小領域 D_i にあるとする。この間の誤差伝播は,

$$\frac{d}{dt}(\phi(y) - z) = \dot{\phi}(y) - \dot{z} \\ = G(y) - A_i z - B_i \\ = A_i(\phi(y) - z) + (G(y) - A_i \phi(y) - B_i) \quad (34)$$

この方程式を解けば

$$\phi(y(t)) - z(t)$$

$$= e^{A_i t} [\phi(y(0)) - z(0)] + \int_0^t e^{A_i(t-\tau)} \epsilon_i(y(\tau)) d\tau \quad (35)$$

ただし,

$$\epsilon_i(y) \equiv G(y) - A_i \phi(y) - B_i \quad (36)$$

(35)式の両辺のノルムをとれば誤差が

$$\begin{aligned} & \|\phi(y(t)) - z(t)\| \\ & \leq \|e^{A_i t}\| \|\phi(y(0)) - z(0)\| \\ & \quad + \|\epsilon_i\| \int_0^t \|e^{A_i(t-\tau)}\| d\tau \end{aligned} \quad (37)$$

となる。ここで、(36)式の関数近似誤差の全領域でのノルムを ϵ とする。ユークリッドノルムでは、(24)–(26)式を考慮して、

$$\sum_{i=1}^m \|\epsilon_i\|_2^2 = \epsilon^2 \quad (38)$$

となり、

$$\|\epsilon_i\|_2 \leq \sqrt{\sum_{j=1}^m \|\epsilon_j\|_2^2} = \epsilon \quad (39)$$

であり、最大値ノルムでは、

$$\|\epsilon_i\|_\infty \leq \max_{1 \leq j \leq m} \|\epsilon_j\|_\infty = \epsilon \quad (40)$$

である。また、係数行列 A_i のノルムの最大値を

$$a = \max_{1 \leq i \leq m} \|A_i\| \quad (41)$$

と表せば、(37)式は、全領域で、

$$\begin{aligned} & \|\phi(y(t)) - z(t)\| \\ & \leq e^{at} \|\phi(y(0)) - z(0)\| + \epsilon \int_0^t e^{a(t-\tau)} d\tau \\ & = e^{at} \|\phi(y(0)) - z(0)\| + \epsilon(e^{at} - 1)/a \end{aligned} \quad (42)$$

となり、第1項は時刻 $t=0$ における初期誤差、第2項は関数近似誤差に起因する誤差伝播を表す。したがって、(32)、(33)式より、

$$\begin{aligned} & \|x(t) - \hat{x}(t)\| \\ & = \|(QK\phi(y(t)) + P) - (QKz(t) + P)\| \\ & \leq \|QK\| \|\phi(y(t)) - z(t)\| \\ & \leq \|QK\| \{e^{at} \|\phi(y(0)) - z(0)\| \\ & \quad + \epsilon(e^{at} - 1)/a\} \end{aligned} \quad (43)$$

となる。

本手法で用いた3次元エルミート補間近似の誤差のノルム ϵ は、 $G(y)$ が十分になめらかな関数(C^4 級)であれば、

$$\Delta = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta_k \quad (44)$$

としたとき、

[スカラーシステム]

ユークリッドノルムでは、

$$\epsilon \leq \pi^{-4} \Delta^4 \sum_{i=1}^3 \left\| \frac{d^4}{dy^4} g_i \right\|_2 \quad (45)$$

最大値ノルムでは、

$$\epsilon \leq \frac{1}{384} \Delta^4 \max_{1 \leq i \leq 3} \left\| \frac{d^4}{dy^4} g_i \right\|_\infty \quad (46)$$

[2次元システム]

ユークリッドノルムでは、

$$\begin{aligned} \epsilon & \leq \pi^{-4} \Delta^4 \sum_{i=1}^{15} \left(\left\| \frac{\partial^4}{\partial y_1^4} g_i \right\|_2 \right. \\ & \quad \left. + \left\| \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} g_i \right\|_2 + \left\| \frac{\partial^4}{\partial y_2^4} g_i \right\|_2 \right) \end{aligned} \quad (47)$$

最大値ノルムでは、

$$\begin{aligned} \epsilon & \leq \frac{1}{384} \Delta^4 \max_{1 \leq i \leq 15} \left(\left\| \frac{\partial^4}{\partial y_1^4} g_i \right\|_\infty \right. \\ & \quad \left. + 24 \left\| \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} g_i \right\|_\infty + \left\| \frac{\partial^4}{\partial y_2^4} g_i \right\|_\infty \right) \end{aligned} \quad (48)$$

であり(付録参照)、 Δ を小さくすれば関数の近似誤差も小さくなることがわかる。なお、3次元以上のシステムに対しては今後の検討を要する。

5. 数値実験

[例題1] (スカラーシステム)

次のスカラーシステム

$$\dot{x} = -x + x^2, x(0) = 0.8 \quad (49)$$

を考える。これは原点収束の単調減少関数であり、区間を $D = [-1, 1]$ とした。まず、(8)式の変数変換を行い、区間 $[0, 1]$ を等間隔 $h = 2^{-N}$ ($1 \leq N \leq 5$)で分割した。また比較のため従来法として、原点を展開点としたテーラー展開の1次近似による線形化

$$\dot{x} = -x, x(0) = 0.8 \quad (50)$$

を行った。図1は(49)式の解析解 $x(t)$ (True)、本手

法によって求めた近似値 $\hat{x}(t)$ ，および比較のために計算した(50)式の解析解の時間変化曲線である。図2はこの時の絶対値誤差 $J(t)$ を表す。

$$J(t) = \int_0^t |x(\tau) - \hat{x}(\tau)| d\tau \quad (51)$$

[例題2] (多次元システム)

次の電力系統の同期機動揺方程式

$$M\ddot{\delta} + D\dot{\delta} + P_{em} \sin \delta = P_{in} \quad (52)$$

を考える。負荷角 δ と角速度 $\dot{\delta}$ に対し， $x_1(t) = \delta(t) - \delta(\infty)$ ， $x_2(t) = \dot{\delta}(t)$ を状態変数に選べば，2次元非線形システムが得られる。

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = a_1 \sin(x_1(t) + \delta(\infty)) + a_2 x_2 + a_0 \end{cases} \quad (53)$$

ただし， $x_1(0) = \delta(0) - \delta(\infty) = 0.6 - \delta(\infty)$ ， $x_2(0) = \dot{\delta}(0) = 0.2$ ， $M = 0.0265$ ， $D = 0.005$ ， $P_{em} = 1.0$ ， $P_{in} = 0.8$ ， $a_0 = P_{in}/M$ ， $a_1 = -P_{em}/M$ ， $a_2 = -D/M$ ， $\delta(\infty) = \sin^{-1}(P_{in}/P_{em})$ 。

まず，領域を $D = [-1, 1] \times [-2, 2]$ に設定し，(24)式の小領域幅を $\delta_{i1} = \delta_{i2} = 2^{-N}$ ， $(1 \leq N \leq 5)$ とした。また比較のため従来法として，原点を展開点としたテーラー展開の1次近似による線形化

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = a_1 \cos \delta(\infty) x_1(t) + a_2 x_2(t) \end{cases} \quad (54)$$

を行った。図3，図4は(53)式の解 $x(t)$ (True)，本手法によって求めた近似値 $\hat{x}(t)$ ，および比較のために計算した(54)式の解の時間変化曲線である。図5，図6はこの時の絶対値誤差

$$J_i(t) = \int_0^t |x_i(\tau) - \hat{x}_i(\tau)| d\tau \quad (55)$$

を表す。なお，微分方程式の解はルンゲクッタ法で求めた。

以上の数値実験の結果，領域幅を小さくすれば近似解の精度が向上した。

6. 結 言

非線形微分方程式で与えられるシステムを，計算機により，自動的に形式的線形化する手法を考察した。従来の形式的線形化が線形化係数 A と B の要素計算にやっかいな積分計算を必要としていたのに対し，本手法は単に節点の関数値と導関数値を与え，それらの代数計算のみで済み，極めて機械的である。また，線形化関数 $\phi(y)$ が一定の有限次元に自動的に決定されるのも本手法の有利な点である。数値実験より，領域幅縮小による近似精度の向上も確かめられた。今後，3次元以上のシステムの誤差解析を含む詳細な検討を行い，状態推定問題等に適用していきたい。

参考文献

- [1] 小松，高田，辻：“離散フーリエ展開による非線形システムの形式的線形化法とその応用”，電気学会論文誌，Vol. 114-C，No.7/8，pp.789-795，1994.
- [2] 小松，高田，辻：“チェビシェフ補間近似による非線形システムの形式的線形化計算法”，電気学会論文誌，Vol. 114-C，No.7/8，pp.835-840，1994.
- [3] Martin H. Schultz: “Spline Analysis”，Prentice-Hall, Inc., 1973.
- [4] 丹慶他訳：“Numerical Recipes in C [日本語版]”，技術評論社，1994.
- [5] 入江：“線形数学Ⅱ”，共立出版，1969.

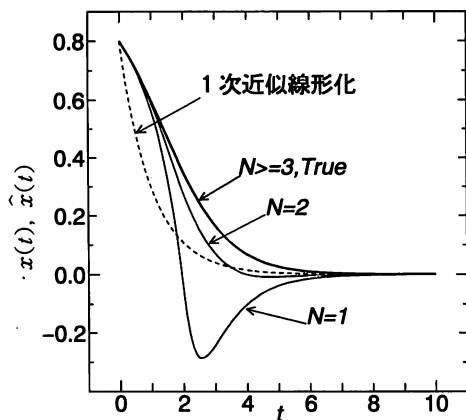


図1 スカラー系の近似値

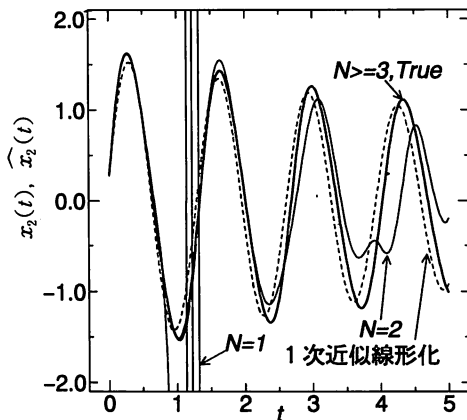
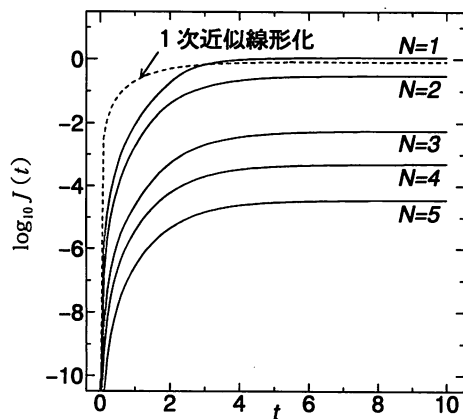
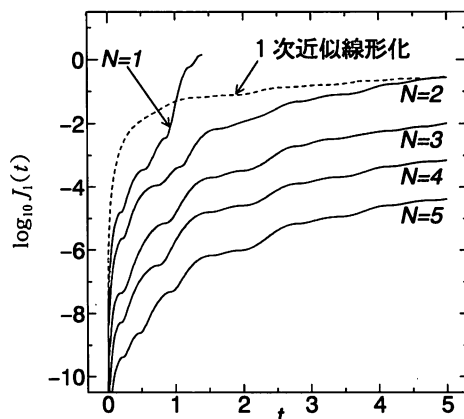
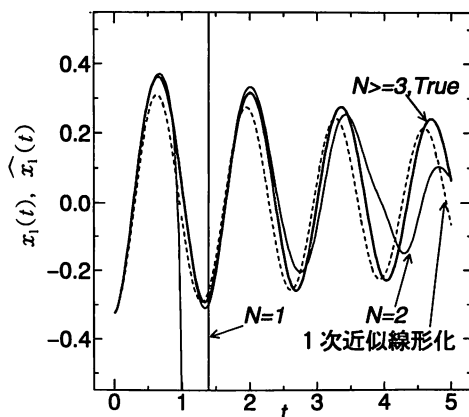
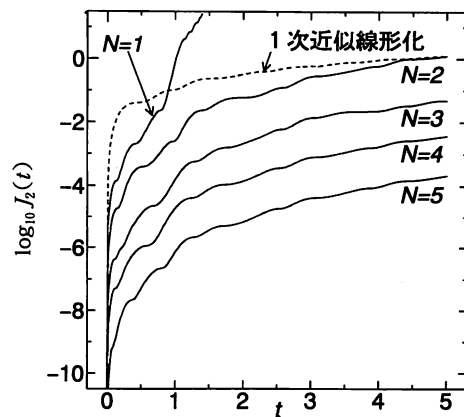
図4 電力系統 x_2 の近似値

図2 スカラー系の近似誤差

図5 電力系統 x_1 の近似誤差図3 電力系統 x_1 の近似値図6 電力系統 x_2 の近似誤差

〔付 録〕 関数近似誤差について

ベクトル値関数

$$\mathbf{f}(x) = [f_1(x), \dots, f_n(x)]^T \quad (56)$$

ただし,

$$\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_l]^T, \mathbf{x} \in D = \Pi_{i=1}^l [0, 1)$$

の各要素 $f_i(x)$ は (24)–(27) 式の小領域毎に定義される区分的関数で,

$$f_i(x) = f_{ij}(x) \quad (\text{if } x \in D_j) \quad (57)$$

であるとする。関数 $f_i(x)$ の L^2 ノルムの 2 乗は

$$\|f_i\|_2^2 = \int_{x \in D} f_i^2 dx = \sum_{j=1}^m \int_{x \in D_j} f_{ij}^2 dx \quad (58)$$

であり, 小領域 D_j での $\mathbf{f}(x)$ のユークリッドノルム $\|\mathbf{f}_j\|_2$ の 2 乗は

$$\|\mathbf{f}_j\|_2^2 = \int_{x \in D_j} \mathbf{f}^T \mathbf{f} dx = \sum_{i=1}^n \int_{x \in D_j} f_{ij}^2 dx \quad (59)$$

である。 $\mathbf{f}(x)$ のユークリッドノルムの 2 乗は,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}\|_2^2 &= \sum_{i=1}^n \|f_i\|_2^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \int_{x \in D_j} f_{ij}^2 dx = \sum_{i=1}^n \|\mathbf{f}_i\|_2^2 \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \int_{x \in D_j} f_{ij}^2 dx = \sum_{j=1}^m \|\mathbf{f}_j\|_2^2 \end{aligned} \quad (60)$$

(60) 式より,

$$\|\mathbf{f}\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \|\mathbf{f}_i\|_2^2 = \sum_{j=1}^m \|\mathbf{f}_j\|_2^2 \quad (61)$$

となる。したがって, $\mathbf{f}(x)$ のユークリッドノルムは,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}\|_2 &= \sqrt{\|\mathbf{f}_1\|_2^2 + \dots + \|\mathbf{f}_m\|_2^2} \\ &= \sqrt{\|\mathbf{f}_1\|_2^2 + \dots + \|\mathbf{f}_n\|_2^2} \\ &\leq \|\mathbf{f}_1\|_2 + \dots + \|\mathbf{f}_n\|_2 \end{aligned} \quad (62)$$

となる。また, 関数 $f_i(x)$ の L^∞ ノルムは

$$\|f_i\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq m} \sup_{x \in D_j} |f_{ij}| \quad (63)$$

であり, 小領域 D_j での $\mathbf{f}(x)$ の最大値ノルム $\|\mathbf{f}_j\|_\infty$ は

$$\|\mathbf{f}_j\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sup_{x \in D_j} |f_{ij}| \quad (64)$$

である。 $\mathbf{f}(x)$ の最大値ノルムは,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} \|f_i\|_\infty \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \max_{1 \leq j \leq m} \sup_{x \in D_j} |f_{ij}| = \max_{1 \leq i \leq n} \|f_i\|_\infty \\ &= \max_{1 \leq j \leq m} \max_{1 \leq i \leq n} \sup_{x \in D_j} |f_{ij}| = \max_{1 \leq j \leq m} \|\mathbf{f}_j\|_\infty \end{aligned} \quad (65)$$

となる。(65) 式より

$$\|\mathbf{f}\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq m} \|\mathbf{f}_j\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \|f_i\|_\infty \quad (66)$$

である。

一方, 1 変数関数 $f(x) \in C^4$ が与えられ, この関数を区間 $[0, 1)$ で 3 次エルミート補間近似したときの区分的多項式 ∂f の近似誤差のノルムは参考文献 [3] (p.34) より,

$$\|f - \partial f\|_2 \leq \pi^{-4} \Delta^4 \left\| \frac{d^4}{dx^4} f \right\|_2 \quad (67)$$

$$\|f - \partial f\|_\infty \leq \frac{1}{384} \Delta^4 \left\| \frac{d^4}{dx^4} f \right\|_\infty \quad (68)$$

また, 2 変数関数 $f(x_1, x_2) \in C^4$ が与えられ, この関数を区間 $[0, 1) \times [0, 1)$ で双 3 次エルミート補間近似したときの区分的多項式 ∂f の近似誤差のノルムは参考文献 [3] (p.39) より,

$$\begin{aligned} \|f - \partial f\|_2 &\leq \pi^{-4} \Delta^4 \left(\left\| \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} f \right\|_2 \right. \\ &\quad \left. + \left\| \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f \right\|_2 + \left\| \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} f \right\|_2 \right) \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} \|f - \partial f\|_\infty &\leq \frac{1}{384} \Delta^4 \left(\left\| \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} f \right\|_\infty \right. \\ &\quad \left. + 24 \left\| \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f \right\|_\infty + \left\| \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} f \right\|_\infty \right) \end{aligned} \quad (70)$$

である。

以上より, 本手法の関数近似誤差を考察する。

〔スカラーシステム〕

非線形スカラーシステム (7) 式が与えられたとき, (11) 式を補間近似するので, 近似誤差ベクトルは,

$$\epsilon = \begin{bmatrix} q_1 - \partial q_1 \\ q_2 - \partial q_2 \\ q_3 - \partial q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{bmatrix} \quad (71)$$

であり, このベクトルのユークリッドノルムは, (39), (61), (62), (67) 式より,

$$\begin{aligned}
\epsilon &= \|\epsilon\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^m \|\epsilon_j\|_2^2} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^3 \|\epsilon_i\|_2^2} \leq \sum_{i=1}^3 \|g_i - \partial g_i\|_2 \\
&\leq \pi^{-4} \Delta^4 \sum_{i=1}^3 \left\| \frac{d^4}{dy^4} g_i \right\|_2 \quad (72)
\end{aligned}$$

また、最大値ノルムは(40), (66), (68) 式より

$$\begin{aligned}
\epsilon &= \|\epsilon\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq m} \|\epsilon_j\|_\infty \\
&= \max_{1 \leq i \leq 3} \|\epsilon_i\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq 3} \|g_i - \partial g_i\|_\infty \\
&\leq \frac{1}{384} \Delta^4 \max_{1 \leq i \leq 3} \left\| \frac{d^4}{dy^4} g_i \right\|_\infty \quad (73)
\end{aligned}$$

となる。

[2 次元システム]

2 次元非線形システム(1)式が与えられたとき、
(23)式を補間近似するので、近似誤差ベクトルは、

$$\epsilon = \begin{bmatrix} g_1 - \partial g_1 \\ \vdots \\ g_{15} - \partial g_{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \vdots \\ \epsilon_{15} \end{bmatrix} \quad (74)$$

であり、このベクトルのユークリッドノルムは、(39), (61), (62), (69)式より、

$$\begin{aligned}
\epsilon &= \|\epsilon\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^m \|\epsilon_j\|_2^2} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{15} \|\epsilon_i\|_2^2} \leq \sum_{i=1}^{15} \|g_i - \partial g_i\|_2 \\
&\leq \pi^{-4} \Delta^4 \sum_{i=1}^{15} \left(\left\| \frac{\partial^4}{\partial y_1^4} g_i \right\|_2 \right. \\
&\quad \left. + \left\| \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} g_i \right\|_2 + \left\| \frac{\partial^4}{\partial y_2^4} g_i \right\|_2 \right) \quad (75)
\end{aligned}$$

また、最大値ノルムは(40), (66), (70)式より

$$\begin{aligned}
\epsilon &= \|\epsilon\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq m} \|\epsilon_j\|_\infty \\
&= \max_{1 \leq i \leq 15} \|\epsilon_i\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq 15} \|g_i - \partial g_i\|_\infty \\
&\leq \frac{1}{384} \Delta^4 \max_{1 \leq i \leq 15} \left(\left\| \frac{\partial^4}{\partial y_1^4} g_i \right\|_\infty \right. \\
&\quad \left. + 24 \left\| \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} g_i \right\|_\infty + \left\| \frac{\partial^4}{\partial y_2^4} g_i \right\|_\infty \right) \quad (76)
\end{aligned}$$

となる。