

多重効用缶問題の解法について (その1)

—離散的プロセス問題の解法の表現—

吉 福 功 美

(受理 昭和52年5月19日)

ON THE SOLUTION OF THE MULTIPLE-EFFECT EVAPORATORS PROBLEM (PART 1)

(Representation of the solution of the discrete process problem)

Isami YOSHIFUKU

The multiple-effect evaporators problem has been studied to try an approach to the discrete process problem.

In this report, the solution has been represented by flow graph and two problems have been brought forward. The one is relative to the construction of the solvable flow graph, and the other is relative to the classification of the multiple-effect evaporators problem.

緒 言

蒸発は塩類水溶液，有機物溶液，コロイド溶液など比較的揮発性の固形分を溶かした溶液から溶媒を蒸発させて濃縮する操作で，化学工学では蒸留，吸収などと共に拡散的単位操作を構成している。

蒸発装置としては飽和水蒸気を熱源とするいわゆる蒸発缶が多く使用されていて，これは蒸気から溶液へ熱伝達が行われる伝熱部と発生蒸気を溶液から分離する蒸気分離部から成っている。蒸発缶の形式としては標準型蒸発缶（垂直短管式）の他に長管型上昇薄膜式蒸発缶，外部加熱強制循環型蒸発缶などがある。

1個の蒸発缶を使用する場合を単一効用缶というが，この缶からの発生蒸気をそのまま凝縮器に導けば凝縮潜熱を捨てることになるので，これを別の蒸発缶の熱源として利用すれば熱経済となる。蒸発缶を直列に複数並べて蒸発した水蒸気を次の缶の加熱蒸気とする方法を多重効用缶による蒸発といい，缶の数を効用数という。この場合，液と蒸気の流れ方によって順流給液，逆流給液，錯流給液，および並流給液の4種類があるが，本報告では普通用いられている順流給液を取扱う。

多重効用缶の設計および操作問題としては，最適効用数の決定問題と効用数一定の下である操作条件を満足する各缶の伝熱面積，処理能力，所要水蒸気量など

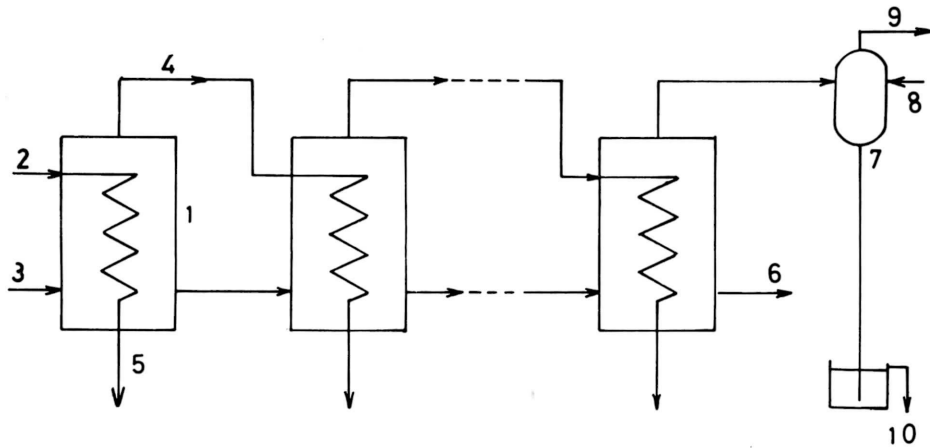
を求める問題がある。後者を多重効用缶問題と名付け，本報告で取扱うことにする。

一般に化学プロセスは装置を直列（又は並列）に結合した離散的プロセス（多段プロセスともいう）と連続プロセスに大別される。前者のプロセス変数の状態方程式は非線形または線形の差分方程式で，また後者は微分方程式で表わされる。多重効用缶は離散的プロセスの一例であって，その解法を追究することによって，離散的プロセス問題（離散的プロセスの計算法，離散的プロセス・システムの最適化などを含む）の解法へのアプローチを試みるのが本研究の目的である。

1. フローグラフの導入

1-1 例題1とその解法例

多重効用缶問題として初めに次の例題1⁴⁾を取上げる。(例題1)各缶の面積が53.5(m²)の順流給液2重効用缶で5%の原液を25%まで濃縮したい。原液は80°Cで入り，第1缶の加熱用飽和水蒸気は110°C，第2缶の沸点は50°Cに保つ。沸点上昇(以後BPRという)および熱損失を無視し，液の比熱を1.0(Kcal/kg・°C)とし，さらに総括伝熱係数を $U_1=2000$ ， $U_2=1000$ (Kcal/hr・m²・°C)とするとき処理できる原液流量 W_0 (kg/hr)を求めよ。



- | | | | |
|----------|---------|---------|---------|
| 1. 効用缶 | 2. 加熱蒸気 | 3. 供給原液 | 4. 発生蒸気 |
| 5. 凝縮液 | 6. 濃縮液 | 7. 凝縮器 | 8. 冷却水 |
| 9. 真空ポンプ | 10. 排水 | | |

図1 多重効用缶 (順流給液)

図1に順流給液多重効用缶を図示してあるが、本問で与えられているデータは T_0, T_2, t_0, C_0, C_2 の他に $A_1, A_2, U_1, U_2, Cp_0, Cp_1, l_1, l_2$ の13個である。

本問の如く比熱、BPR が与えられている場合の計算方式を比熱方式と呼ぶ。これは液のエンタルピー濃度線図およびデューリング線図が与えられている場合 (線図方式と呼ぶ) の近似計算である。

本問を解くのに必要な関係式は次の通りである。

物質収支式

$$W_0 = W_1 + D_1 \quad (1-1)$$

$$W_1 = W_2 + D_2 \quad (1-2)$$

$$C_0 W_0 = C_1 W_1 \quad (1-3)$$

$$C_1 W_1 = C_2 W_2 \quad (1-4)$$

蒸発量の総和

$$\sum D_n = D_1 + D_2 \quad (1-5)$$

$$\sum D_n = W_0 (1 - C_0 / C_2) \quad (1-6)$$

熱収支式

$$D_0 \lambda_0 + W_0 Cp_0 (t_0 - t_1) = D_1 \lambda_1 \quad (1-7)$$

$$D_1 \lambda_1 + W_1 Cp_1 (t_1 - t_2) = D_2 \lambda_2 \quad (1-8)$$

伝熱速度式

$$q_1 = D_0 \lambda_0 \quad (1-9)$$

$$q_1 = U_1 \cdot A_1 \cdot \Delta t_1 \quad (1-10)$$

$$q_2 = D_1 \lambda_1 \quad (1-11)$$

$$q_2 = U_2 \cdot A_2 \cdot \Delta t_2 \quad (1-12)$$

温度の差の式

$$\Delta t_1 = T_0 - t_1 \quad (1-13)$$

$$\Delta t_2 = T_1 - t_2 \quad (1-14)$$

$$e_1 = t_2 - T_1 \quad (1-15)$$

$$e_2 = t_2 - T_2 \quad (1-16)$$

水の蒸発潜熱の式

$$\lambda_0 = \lambda(T_0) \quad (1-17)$$

$$\lambda_1 = \lambda(T_1) \quad (1-18)$$

$$\lambda_2 = \lambda(T_2) \quad (1-19)$$

ここで (6) 式 (注 (1-6) 式を (6) 式と記す) は (1)~(4) 式から導けるので独立な式ではない、また (17)~(19) 式としては例えば Jakob-Fritz の式⁹⁾が使用できる。

未知数は $W_0, W_1, W_2, D_0, D_1, D_2, \sum D_n, t_1, t_2, T_1, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, q_1, q_2, \Delta t_1, \Delta t_2, C_1$ の18個であり、独立な式の数は18個なので式を解いて W_0 を求めることが出来るはずである。その解法としては例えば t_1 を仮定して計算を進める試行錯誤法が考えられる。この場合の計算の仕方は次のようになる。既知の e_2 と T_2 から (16) 式で t_2 が求まり、仮定した t_1 と既知の e_1 から (15) 式で T_1 が求まる。従って (14) 式から Δt_2 が求まる。(13) 式からは Δt_1 が求まる。(17)~(19) 式から $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ がまた (10), (12) 式からは q_1, q_2 が求まる。従って (9), (11) 式から D_0, D_1 が求まり、これらの量を代入して (7) 式より W_0 が求まる。(1) 式より W_1 が求まる。 W_0 を (6) 式に代入して $\sum D_n$ が、次いで (5) 式より D_2 が求まる。これらの量を代入して (8) 式より t_1 が計算できる。

この計算値 (t_1' と記す) が最初の仮定値 t_1 に等しい場合は計算が終了するが, 等しくない場合は t_1' を新しく t_1 の仮定値として今迄の計算を繰り返す。

上述の計算の仕方はその表現が煩雑なのでここでフローグラフ (Flow Graph) という新しい表現方法¹⁴⁾を導入する。(注 文献¹⁴⁾ではフローチャートという名前を用いたが, これはプログラミングフローチャートとまぎらわしいので以後フローグラフと呼ぶことにする)。

既知の T_2 と e_2 から (16) 式で t_2 が求まることを次の如く記す。

$$\begin{array}{c} 16 \\ T_2 \xrightarrow{\quad} t_2 \\ e_2 \xrightarrow{\quad} \uparrow \end{array}$$

これは3個の変数が計算式によって連結されていることを示すが, 変数を節点 (vertex), 計算式を辺 (edge) と考えると一種のグラフ (Graph) であり, これを単位のフローグラフと呼ぶ。単位のフローグラフを作るには変数の数は何個でもよいが, 左側にその値の定まっている変数, 右側には計算式または線図などによってその値が定まる変数を並べるものとする。このような単位のフローグラフは関係式の数だけ作ることが出来るが, この全てを結合したものを総括フローグラフあるいは単にフローグラフと呼ぶ。例題1に対して前述の解法によって構成したフローグラフを図2に示す。

このフローグラフの左端には13個の既知量と1個の試行錯誤変数 t_1 が並んでいる。これを左端縦列変数

と呼ぶ。計算は t_1 の最初の仮定値 (t_1 と記してある) およびその他の縦列変数から出発して計算式に従って右方へ進み W_0, D_2 などを経て t_1' に至る。次に t_1' の値を新しい t_1 の仮定値として次の計算を行うが, このことを t_1' から t_1 へ向う鎖線で示してある。

一般的にこのような試行錯誤法が収束して解が求まるとは限らない。前処理として t_1 の仮定値の種々の値に対する計算値 t_1' の関係をプロットする事が望ま

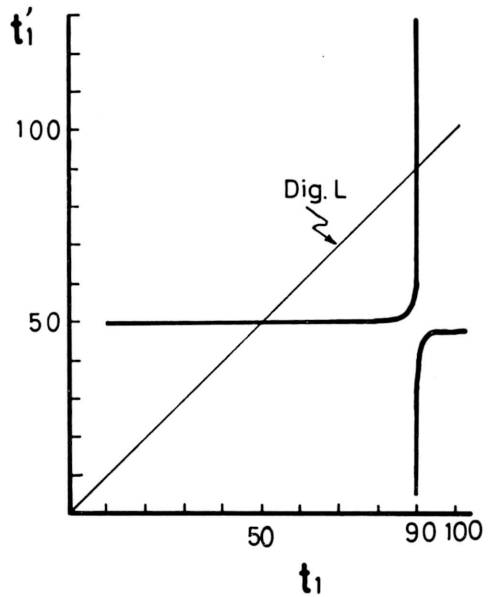


図3 t_1 vs t_1'

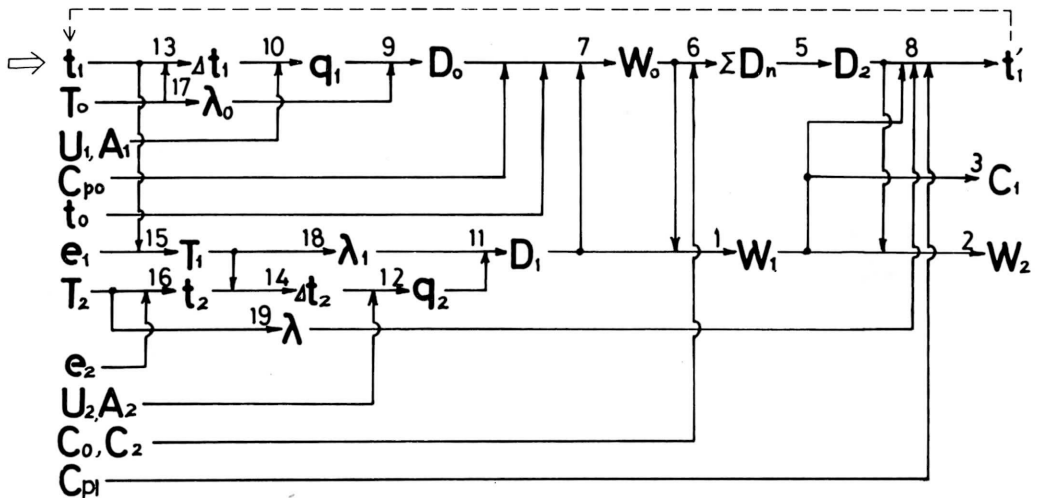


図2 例題1に対するフローグラフ (解法例によるもの)

しい。 t_1 vs t_1' 関係曲線の形からその計算法が収束するか、発散するかが判定できる。前述のフローグラフによる t_1 vs t_1' の関係曲線を図3に示す。図には示していないが $t_1=80\sim 90^\circ\text{C}$ 以外の値に対しては $W_0 < 0$ となった。 $t_1=80\sim 90^\circ\text{C}$ 以内の値からは $t_1'=50^\circ\text{C}$ に収束してしまい W_0 を求めることはできない。すなわち上述の計算法では試行錯誤を行なって解を求めることはできない。近似的には t_1 vs t_1' 曲線と対角線との交点から $t_1=89.6^\circ\text{C}$ となる。

1-2 問題の提起

その状態方程式が連立非線形差分方程式で表わされるような離散的プロセス問題の解法を表現するために導入したフローグラフは解法の要点を一瞥できるのみならず、解法の最も簡潔な図的表現として電算機のプログラミングに直結するものである。

しかしながら、前述の例題1の解法例のフローグラフでは解を得ることが困難である事が分った。また図2を見るとこのフローグラフでは縦列変数が多く並んで、もし効用数が3, 4...と増加していくと非常に煩雑なものになることが予想される。従ってもし解が存在するならば必ず解が得られるようなフローグラフ(これを可解なフローグラフと呼ぶ)をいかにして構成するかという問題が提起される(問題点1)。このフローグラフは効用数Nに対するもので簡潔なものではなければならない。

2. 今までの計算法とその問題点

前述の如く多重効用缶問題はその与えられているデータによって線図方式と比熱方式に分けられる。その各々の場合について今まで幾つかの研究がなされているが、本章では今までの計算法を調べ問題点を提起する。

2-1 等面積条件問題

線図方式としては Mc Cabe⁷⁾, 江崎³⁾ など幾つかの文献は取り上げられているが、どれも効用数3で $\text{Na OH-H}_2\text{O}$ 系である点で一致している。等面積条件下で各缶の伝熱面積を求める問題を水溶液のエンタルピー濃度線図およびデューリング線図を与えて解くものであるが、その計算方法は比熱方式と比べて複雑ではあるが殆ど同様である。

比熱方式としては Badger¹⁾ 以来多くの文献に取上

げられている。効用数2~4で、 $Cp_n=1.0$, $e_n=0.0$ とするもの他に Cp_n を水溶液の濃度の一次関数として与えるもの、 e_n の値を与えるものがある。これらの中では宮内⁸⁾ の解法は著名であるが、例題2として取上げてみる。

(例題2) 標準4重効用缶を用いて毎時4,740(kg)の水溶液から3780(kg)の割合で水を蒸発させたい。操作は順流とし、加熱水蒸気温度 108°C 、給液温度 16°C 、最終缶温度 52°C とすると所要伝熱面積(各缶同一とする)を求めよ。ただし、溶液の比熱および比重は1とし、BPRおよび熱損失はこれを無視し、U-線図(総括伝熱係数を温度差、液温の関数として図示したもの)が与えられている。

この問題は等面積条件問題であるが、一般性をもたせるために、蒸発水量の和 $\sum D_n=3780$ (kg) の代わりに原液の濃度 $C_0=10$ (%) と濃縮液濃度 $C_4=49$ (%) (ここで(1-6)式を用いた) が与えられている問題におきかえるものとする。宮内の解法をフローグラフに表わしたものを¹²⁾を図4に示す(分り易くするために、文献¹²⁾のものを修正してある)。

フローグラフの構成に用いた関係式は次の通りであり、効用数Nに対する一般的なものとした。

$$\sum \Delta t_n = (T_0 - T_N) - \sum e_n \quad \dots\dots(2-1)$$

$$\Delta t_n = \sum \Delta t_n / N \quad \dots\dots(2-2)$$

$$\sum D_n = W_0(1 - C_0/C_N) \quad \dots\dots(2-3)$$

$$D_n = \sum D_n / N \quad \dots\dots(2-4)$$

$$t_n = T_{n-1} - \Delta t_n \quad \dots\dots(2-5)$$

$$T_n = t_n - e_n \quad \dots\dots(2-6)$$

$$\lambda_n = \lambda(T_n) \quad \dots\dots(2-7)$$

$$U_n = U(\Delta t_n, t_n) \quad \dots\dots(2-8)$$

$$q_n = \lambda_{n-1} \cdot D_{n-1} \quad \dots\dots(2-9)$$

$$A_n = q_n / (U_n \cdot \Delta t_n) \quad \dots\dots(2-10)$$

$$\Delta t_n = \{A_n \Delta t_n / \sum (A_n \Delta t_n)\} \cdot \sum \Delta t_n \quad \dots\dots(2-11)$$

$$D_n \text{ についての連立方程式を解く} \quad \dots\dots(2-12)$$

ここで(2)式は $\sum \Delta t_n$ を適当に配分して Δt_n とするもので記号 Δt_n を用いたが、ここでは均等配分としてある。(4)式も同様である。(7)式は Jakob-Fritz の式を、(8)式は与えられている U-線図を近似式としたものを示す。(11)式は計算によって得られた A_n が等しくない場合に用いられる収束のための計算式で、 Δt_n をノーマライズ(normalize)する手法である。(12)式は物質収支式、熱収支式から得られる D_n についての連立方程式を解いて D_n を求めることを表わしている。このフローグラフでは左端

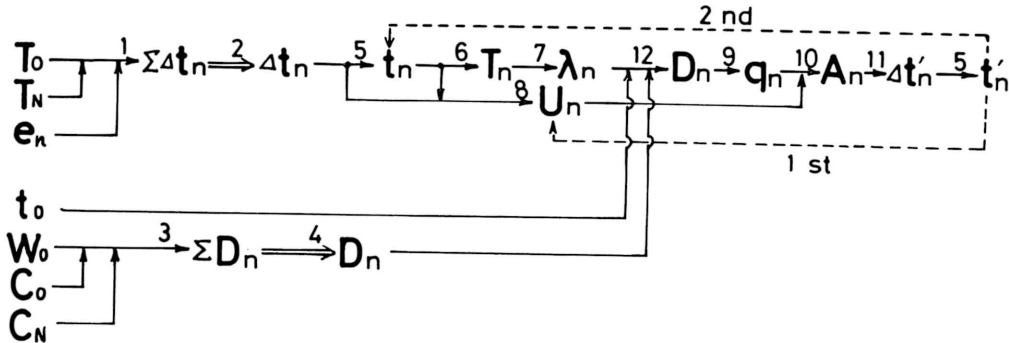


図4 例題2に対するフローグラフ

縦列変数 $T_0, T_N, t_0, C_0, C_N, W_0, e_n$ から計算は始まり、(2), (4) 式の $\Delta t_n, D_n$ の最初の仮定値から $A_n, \Delta t'_n, t'_n$ へと至る。得られた A_n が等しくない場合は t'_n から第1回の試行錯誤として U_n を求め、これから $A_n, \Delta t'_n$ を求め収束させる。次に第2回の試行錯誤として第1回で得られた t'_n から出発して T_n, λ_n など経て $\Delta t'_n, t'_n$ を求め収束させる。

この解法は U -線図を用いるという点で特色を有し、また試行錯誤変数が t_n 1個であるという点で優れている。ただ(12)式がこのフローグラフで明確に表わされていない点で不十分と思われる(文献⁸⁾には明確に示されている)。

筆者は試行錯誤変数の数をフローグラフの次数と名付け¹²⁾、次数の小さい程良いフローグラフであるとした。手計算の場合とはともかく、電算機での計算の場合は次数はあまり問題ではないことが、実際の計算上の経験から分った。むしろ可解なフローグラフをいかに構成するかという問題点1が重要だということが分った。また連立方程式をいかにフローグラフに表現するか、左端縦列変数はいかなる変数から成っているかなども問題点であろう。

2-2 最小面積条件問題

多重効用缶の各缶は装置の製作上および予備装置の貯蔵上の便宜から同じものすなわち等面積に設計されることが多いが、ある効用数、操作条件の下で各缶の面積の総和を最小にするように設計する場合もある。後者の場合は各缶は必ずしも等面積でなく、その総和と同じ効用数の等面積の場合の総和との差を表わす面積の節約率は効用数が小さい場合は殆ど無視できる。

Bonilla²⁾ は等面積条件の下で成立つ式

$$\Delta t_n = \{(q_n/U_n)/\sum(q_n/U_n)\} \cdot \sum \Delta t_n \quad (2-13)$$

に対応して最小面積条件の下で次式が成立つことを導いた。

$$\Delta t_n = \{\sqrt{q_n/U_n}/\sum\sqrt{q_n/U_n}\} \sum \Delta t_n \quad (2-14)$$

$$A_n/\Delta t_n = \text{const.} \quad (2-15)$$

この誘導のさいなされた仮定は BPR が無視できること、 U_n, q_n が液温によって変わらないということであり、彼はこれらの式を用いる最小面積条件問題の解法を与えている。

板原ら⁵⁾ はある操作条件の下での最小面積条件問題を Dynamic Programming (略して DP) の手法を用いて解き、効用数4で2.71%の面積節約率が効用数10では11.1%に増加するという結果を得た。彼らの取上げた問題の1例を例題3とする。

(例題3) 3.5%の塩水 4.535×10^4 (kg/hr) を7.0%へ濃縮する。効用数を3としたとき最小面積条件下で各缶の伝熱面積を求めよ。加熱水蒸気の温度は 120°C 、最終缶温度は 46°C とし BPR は無視し $C_{pn}=1.0$ とする。また総括伝熱係数は液温 t_n の関係として次式で表わされる。

$$U_n = a + bt_n$$

$$a = 20.41, b = 18.81 (t_n \leq 79.4^\circ\text{C})$$

$$a = -443.97, b = 25.31 (t_n > 79.4^\circ\text{C})$$

この例題3は与えられているデータが $T_0, T_N, t_0, C_0, C_N, W_0$ の6個で例題2と同じである点に注意を要する。

DP を適用するために先づ多重効用缶の第1缶、第2缶……第 N 缶に対し第 N 段、第 $N-1$ 段……第1段と逆の順序に番号を付ける。板原らにならって、プロセス変数として $S_n (= T_{n+1} - T_1)$ 、制御変数として $\Delta t_n (= T_{n+1} - t_n)$ 、各段の収益関数として $A_n (= q_n/$

$U_n \cdot \Delta t_n$ を取る. ただし $U_n = a + bt_n = a + b(S_n + T_1 - \Delta t_n)$. 問題は次のプロセス方程式

$$S_{n-1} = S_n - \Delta t_n$$

$$S_0 = 0, S_N = T_{N+1} - T_1$$

の下で

$$\Delta t_n : \sum A_n = \min$$

となる. ここで Δt_n は: 以下すなわち $\sum A_n$ を最小にするような最適政策 $\Delta t_n (n=1, 2, \dots, N)$ を求めることを示す記号である. 板原らの計算手続きは次のようである. 初めに Δt_n を仮定し熱, 物質収支式より q_n を求め, この q_n の値を一定として DP を適用し Δt_n を求める. この Δt_n から再び q_n を求める. この手順を q_n が収束するまで繰返す.

上の計算手続きで Δt_n から q_n を求める方法が文献では明らかでないことや, DP の適用を分かり易く示したいことなどから筆者はこの問題に対するサブ問題 (もとの問題を分解した小さい問題) を作り, これらと DP の計算を組合せたものをフローグラフに表現したら解法が明白になるであろうと考える.

2-3 問題の提起

前章では多重効用伍問題に対していかにして可解なフローグラフを構成すべきかという問題点1を提起した. 本章では, 例題2および3はそれぞれ等面積, 最小面積条件問題であるが, 前述のサブ問題を含めて多重効用伍問題はいかに分類されるか, その各々の問題で与えられている量は何個かといった問題が提起される (問題点2). またこの他にサブ問題, DP などのフローグラフ表現も問題となろう.

結 言

離散的プロセス問題の解法へのアプローチを試みるために多重効用伍問題を取上げた. これは多重効用伍の設計, 操作問題として, 効用数一定である操作条件を満足する各伍の伝熱面積, 処理能力, 所要水蒸気量などを求める問題である. 本報ではその解法をフローグラフで表現し, 二つの問題点を提起した. その一つは可解なフローグラフをいかにして構成するかという問題であり, その二つは多重効用伍問題の分類と与えられている量についての問題である. これらの問題点の解決に向けて研究を進め報告する予定である.

本研究にあたり当学科田中安彦教授, 伊地知和也助手ならびに院生の川野敬君には有益な助言をいただきました. ここに感謝の意を表します.

使用記号

A : 伝熱面積	[m ²]
C : 溶液濃度	[wt%]
C_p : 溶液の比熱	[Kcal/kg·°C]
D : 発生蒸気量	[kg/hr]
D_0 : 加熱蒸気量	[kg/hr]
e : 沸点上昇	[°C]
N : 効用数	[-]
q : 伝熱速度	[Kcal/hr]
T : 蒸気の飽和温度	[°C]
t : 液温	[°C]
U : 総括伝熱係数	[Kcal/hr·m ² ·°C]
W : 液流量	[kg/hr]
Δt : 温度差	[°C]
λ : 蒸発潜熱	[Kcal/kg]
\sum : $n=1$ から $n=N$ までの和	[-]
<Subscripts>	
n : 第 n 番目の効用伍	[-]
O : 第1伍への入量	[-]

文 献

- 1) Badger, et al: Chem. Met. Engg., 23, 237, (1920).
- 2) Bonilla, C. F.: Trans. Am. Inst. Chem. Engrs., 41, 529(1945).
- 3) 江崎: “エンタルピー組成線図”, p. 72, 共立出版, (昭43).
- 4) 藤田: “単位操作演習”, p. 41, 科学技術社, (昭47).
- 5) Itahara, S. and L. I. Stiel: Ind. Eng. Chem., Process Design Develop., 5, 309, (1966).
- 6) Jakob, M. and W. Fritz: Physik. Z., 36, 651, (1935).
- 7) McCabe, W. L.: Trans. Am. Inst. Chem. Engrs., 31, 129, (1935).
- 8) 宮内: 化学機械, 15, 323, (1951).
- 9) 日本機械学会: “蒸汽表および線図”, p. 2, (1955).
- 10) 日本機械学会: ibid, p3.
- 11) 吉福: 化学工学, 32, 1240, (1963).
- 12) 吉福: ibid, 34, 63, (1970).