一様長柱の弾性座屈時における端末条件

富　　武　満

（受理　昭和51年5月31日）

END CONDITIONS FOR ELASTIC BUCKLING OF UNIFORM BARS

Takemitsu TOMI

A large number of studies on elastic buckling of bars have been done since Leonhard Euler proposed originally the critical load or Euler load. However, for practical application, it has become the theme of research to determine the buckling loads and the buckled shapes of a compressed bar by using the end conditions. Thus all the end conditions have been assumed to be given before commencing with the calculation. It is the purpose of this paper to point out that some of the end conditions should be analytitically obtained through the calculation.

1 緒　　言

一端固着，他端支持の片持ち柱に対する座屈荷重をEulerが提示して以来，多数の研究成果により，長柱の弾性座屈に関する理論は現在のところ，材料力学においてはすでに大成された分野に属する．ただし，これまでの研究においては，座屈荷重とその荷重の時のたわみ形状を定める座屈次数を求めるのに主たる目的がおかれているため，使用する境界条件はすべて予め与えられたものとして，理論解析が実施されている．

しかしながら，ある座屈形式を生ずるためには，いかなる端末条件が成立していなければならないか，ということを求めるのに主目的をおいて座屈問題を考察すれば，座屈時の端末条件のうち，一部は理論的に算定できる性質のものであり，座屈時における柱の端末条件と座屈形式の理論的な対応関係が明確にできるはずである．

本報告書は発生した座屈形式に対応する端末条件を理論的に求めることに主たる目的をおいたものであり，座屈時に成立すべき端末条件の理論式を座屈端末条件式と呼び，それを報告書本文中の（31）式の形で示してある．

2 座屈たわみ式

長柱の弾性座屈荷重を求めるEulerの座屈理論において は，実用的な見地から，柱の端末状態を自由端，単純支持端，固着端の3種類に分類してそれぞれを別個に取扱うのが通例である．このような個別的取扱いをした場合，たわみの基礎方程式としてはたわみ線の曲率と曲げモーメントの関係を表わす2階の微分方程式が採用され，その際それぞれの端末状況に応じて曲げモーメントの式を修正することになる．このため端末条件はすべて予め与えられているとせざるを得なくなり，これが取扱い上の一般性を失わせる原因となる．そこで上記の3種類のものをまとめて一般的に取扱うためには，図のように各端末に支持反力と支持モーメントの存在を仮定して曲げモーメントの式を作る必要がおこる．[1]

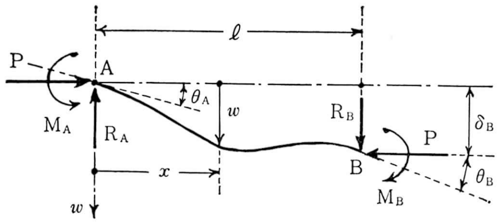

図1

柱の両端支持点A，Bの変位は相対的なものであるから，左端Aにおける変位としてはたわみ角を考慮するだけでよい．したがって，軸荷重Pを受ける柱のたわみをwとし，両端の支持反力および変位などを図のように表わす．次に座標軸としては左端Aを座標原点として，x軸を柱の軸心方向に，またw軸を鉛直下方

にとることにする．

いま，一様長柱の長さを l とし，左上り右下りのせん断力を正にとり，また w 軸の負の側が圧縮となる曲げモーメントを正と約束すれば，任意の x 断面における曲げモーメント M は

$$M=Pw+R_Ax-M_A$$

となる．よってたわみの式は

$$EI\frac{d^2w}{dx^2}=-Pw-R_Ax+M_A$$

となるが，右辺第1項を左辺に移すと，この式は

$$EI\frac{d^2w}{dx^2}+Pw=-R_Ax+M_A \quad \cdots\cdots(1)$$

で表わされる．ただし，EI は柱の曲げ剛性であり，これは x の関数であっても差支えないが，このように一般的な取扱いをすることは理論式を複雑化するだけであるから，座屈現象の本質を明確にするために，ここでは一様柱として，$EI=$ 一定，の場合について考えることにする．また同様な意味において軸荷重 P も一定と考える．

(1) 式が Euler の座屈荷重を求める時に，従来もっとも一般的に採用されているたわみの方程式である．これに対して，せん断力と軸荷重の関係を表わす式として

$$EI\frac{d^3w}{dx^3}+P\frac{dw}{dx}=0 \quad \cdots\cdots(2)$$

を作り，これを座屈たわみの基礎方程式として採用している場合も見受ける．[2),3)] しかし，この (2) 式はあとで述べるように一端固着，他端支持の柱に対しては適用できないものであり，また両端固着の柱に対しても場合によっては適用できないときがあり，一般性を失う．

したがって，たわみの基礎方程式としては，軸荷重 P と分布横荷重 $q(x)$ を受けるはりのたわみ式

$$EI\frac{d^4w}{dx^4}+P\frac{d^2w}{dx^2}=q(x) \quad \cdots\cdots(3)$$

で，$q(x)=0$ とおいたものを採用しなければならない．[4)] 本式を積分すれば，自由端，固定端，支持端の3種類の端末条件をもつ柱に対しても，(1) 式に相当するそれぞれの適切なたわみ方程式が得られる．そこでこのような基礎方程式によって，長柱の座屈を取扱った方がより一般性を持つことになり，この種の研究に妹沢,[5)] 高橋[6)] の論文がある．

ところがこれら従来のいずれの文献においても，ある座屈形式とその時に成立していなければならない端末条件を理論的に求めたものが見受けられない．したがって本報告書では，座屈形式とそれに対応する端末条件とを理論的に算定することについて，以下考察することにし，あわせて (2) 式の適用範囲についても明確にしたいと考える．

3 基礎方程式の解

たわみの基礎方程式は (3) 式で $q(x)=0$ とおけばよいので

$$EI\frac{d^4w}{dx^4}+P\frac{d^2w}{dx^2}=0 \quad \cdots\cdots(4)$$

となる．積分すれば

$$EI\frac{d^3w}{dx^3}+P\frac{dw}{dx}=C_1 \quad \cdots\cdots(5)$$

となるが，前述のように，いま左上り右下りのせん断力を正とし，上層圧縮の曲げモーメントを正に約束すれば，$x=0$ における端末条件は

$$\left[EI\frac{d^3w}{dx^3}\right]_{x=0}=-R_A-P\theta_A,\ \text{および}\ \left[\frac{dw}{dx}\right]_{x=0}=\theta_A$$

となる．これらを (5) 式に適用すると

$$C_1=-R_A \quad \cdots\cdots(6)$$

となり，これを (5) 式に代入すれば

$$EI\frac{d^3w}{dx^3}+P\frac{dw}{dx}=-R_A \quad \cdots\cdots(7)$$

が得られる．これは軸力 P のせん断力方向の成分とせん断力の和が支点反力に等しいことを意味する．したがって，支点反力が生じない座屈形式のときには

$$R_A=0$$

となり，(7) 式は (2) 式と一致する．

また右端 $x=l$ における端末条件は

$$\left[EI\frac{d^3w}{dx^3}\right]_{x=l}=-R_B-P\theta_B,\ \text{および}\ \left[\frac{dw}{dx}\right]_{x=l}=\theta_B$$

であるから，これらを (7) 式に適用すれば

$$R_A=R_B \quad \cdots\cdots(8)$$

の関係が得られる．次に (7) 式を積分すれば

$$EI\frac{d^2w}{dx^2}+Pw=-R_Ax+C_2 \quad \cdots\cdots(9)$$

となるが，ここで $x=0$ での端末条件としては

$$\left[EI\frac{d^2w}{dx^2}\right]_{x=0}=M_A,\ \text{および}\ [w]_{x=0}=0$$

の関係があるので，これらを (9) 式に適用すると

$$C_2=M_A \quad \cdots\cdots(10)$$

となる．よって (9) 式は

$$EI\frac{d^2w}{dx^2}+Pw=-R_Ax+M_A \quad \cdots\cdots(11)$$

となり，これは (1) 式と一致する．

この (11) 式の両辺を EI で割れば

$$\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{P}{EI}w=-\frac{1}{EI}R_Ax+\frac{1}{EI}M_A \quad \cdots\cdots(12)$$

となるが，ここでまた右端 $x=l$ での端末条件として

$$\left[EI\frac{d^2w}{dx^2}\right]_{x=l}=M_B,\ \text{および}\ [w]_{x=l}=\delta_B$$

の関係を使用すると，上式から

$$M_B+P\delta_B=-R_Al+M_A \quad \cdots\cdots(13)$$

が得られる．本式から R_A を求めると

$$R_A=\frac{M_A-M_B}{l}-P\frac{\delta_B}{l} \quad \cdots\cdots(14)$$

となり，これを (8) 式に代入すれば

$$R_B=\frac{M_A-M_B}{l}-P\frac{\delta_B}{l} \quad \cdots\cdots(14')$$

を得る．したがって，反力 $R_A=R_B$ は両端の変位と曲げモーメントがわかれば求められ

$$M_A-M_B=\delta_BP \quad \cdots\cdots(15)$$

の関係が満足されるとき

$$R_A=R_B=0$$

となる．すなわち (15) 式の条件が成立するとき，(2) 式はたわみの基礎方程式として採用できることになる．

さて，(12) 式の解を求めるわけであるが，ここで (14) 式を使って R_A を消去すれば，(12) 式は

$$\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{P}{EI}w=\frac{P}{EI}\frac{1}{lP}(M_B-M_A+\delta_BP)x+\frac{P}{EI}\frac{M_A}{P} \quad \cdots\cdots(16)$$

となる．よって，この (16) 式は

$$\frac{d^2w}{dx^2}+\kappa^2w=\kappa^2\frac{1}{lP}(M_B-M_A+\delta_BP)x+\kappa^2\frac{M_A}{P} \quad \cdots\cdots(17)$$

のように表わされる．ただし

$$\kappa^2=\frac{P}{EI} \quad \cdots\cdots(18)$$

とおいた．(17) 式の一般解は

$$w=A\cos\kappa x+B\sin\kappa x+\frac{1}{lP}(M_B-M_A+\delta_BP)x+\frac{M_A}{P} \quad \cdots\cdots(19)$$

であり，これを微分してたわみ角を求めると

$$\frac{dw}{dx}=-\kappa A\sin\kappa x+\kappa B\cos\kappa x+\frac{1}{lP}(M_B-M_A+\delta_BP) \quad \cdots\cdots(20)$$

が得られる．ここで積分定数 A, B は $x=0$ における境界条件で決定できる．まず $[dw/dx]_{x=0}=\theta_A$ の条件を (20) 式に適用すると

$$\theta_A=\kappa B+\frac{1}{lP}(M_B-M_A+\delta_BP) \quad \cdots\cdots(21)$$

となるので，これから B は

$$B=\frac{1}{\kappa}\theta_A-\frac{1}{\kappa lP}(M_B-M_A+\delta_BP) \quad \cdots\cdots(22)$$

のようにきまる．次に $[w]_{x=0}=0$ の条件を (19) 式に適用すれば

$$A+\frac{M_A}{P}=0 \quad \cdots\cdots(23)$$

となり，これから A は

$$A=-\frac{M_A}{P} \quad \cdots\cdots(24)$$

のように決定される．よって柱のたわみとたわみ角が次の (25) 式および (26) 式のように得られる．

$$\begin{aligned}w=\frac{1}{\kappa lP}\{&-\kappa lM_A\cos\kappa x\\&+[lP\theta_A-(M_B-M_A+\delta_BP)]\sin\kappa x\\&+(M_B-M_A+\delta_BP)\kappa x+\kappa lM_A\}\end{aligned} \quad \cdots\cdots(25)$$

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dx}=\frac{1}{lP}\{&\kappa lM_A\sin\kappa x\\&+[lP\theta_A-(M_B-M_A+\delta_BP)]\cos\kappa x\\&+(M_B-M_A+\delta_BP)\}\end{aligned} \quad \cdots\cdots(26)$$

4 座屈次数方程式と座屈端末条件式

(25) 式と (26) 式は左端 $x=0$ での境界条件を適用して積分定数 A, B を決定して得られたものであるが，これまでのところでは右端 $x=l$ におけるたわみ角 θ_B が未使用である．しかもこの場合は座屈時の端末条件を求めるのが目的であるから，さらに右端 $x=l$ における境界条件も使用する必要がある．そこでまず (25) 式へ $[w]_{x=l}=\delta_B$ の条件を適用すると

$$\begin{aligned}\delta_B=\frac{1}{\kappa lP}\{&-\kappa lM_A\cos\kappa l\\&+[lP\theta_A-(M_B-M_A+\delta_BP)]\sin\kappa l\\&+(M_B-M_A+\delta_BP)\kappa l+\kappa lM_A\}\end{aligned}$$

となるが，これを書きかえると

$$\begin{aligned}&-\kappa lM_A\cos\kappa l+[lP\theta_A-(M_B-M_A+\delta_BP)]\sin\kappa l\\&+\kappa lM_B=0\end{aligned} \quad \cdots\cdots(27)$$

が得られる．全く同様にして，(26) 式へ $[dw/dx]_{x=l}=\theta_B$ の条件を適用すれば

$$\begin{aligned}\theta_B=\frac{1}{lP}\{&\kappa lM_A\sin\kappa l\\&+[lP\theta_A-(M_B-M_A+\delta_BP)]\cos\kappa l\\&+(M_B-M_A+\delta_BP)\}\end{aligned}$$

となり，これを書きかえると

$$
\begin{aligned}
lP\theta_B &= \kappa l M_A \sin\kappa l \\
&\quad +[lP\theta_A-(M_B-M_A+\delta_B P)]\cos\kappa l \\
&\quad +(M_B-M_A+\delta_B P) \qquad \cdots\cdots(28)
\end{aligned}
$$

が得られる．したがって (27) 式と (23) 式をまとめて書けば

$$
\left.\begin{aligned}
&-\kappa l M_A\cos\kappa l+(lP\theta_A-\delta_B P-M_B+M_A)\sin\kappa l \\
&\quad =-\kappa l M_B \\
&(lP\theta_A-\delta_B P-M_B+M_A)\cos\kappa l+\kappa l M_A\sin\kappa l \\
&\quad =lP\theta_B-\delta_B P-M_B+M_A
\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(29)
$$

となり，この両式のうちいずれかのものから κl を求めて，別の式に代入すれば θ_B がきまる．κl の値は座屈荷重と座屈たわみの形式を決定するので，これから座屈次数が求められ，また θ_B を決定する式は各座屈次数に対応する端末条件を表わすことになる．

そこで，(29) 式を $\sin\kappa l$ と $\cos\kappa l$ で解くと

$$
\left.\begin{aligned}
&[(\kappa l)^2M_A{}^2+(lP\theta_A-\delta_B P+M_A-M_B)^2]\sin\kappa l \\
&\quad =(\kappa l)[lP(M_A\theta_B-M_B\theta_A)-\delta_B P(M_A-M_B) \\
&\quad +(M_A-M_B)^2] \\
&[(\kappa l)^2M_A{}^2+(lP\theta_A-\delta_B P+M_A-M_B)^2]\cos\kappa l \\
&\quad =(\kappa l)^2M_AM_B+(lP\theta_B-\delta_B P+M_A \\
&\qquad -M_B)(lP\theta_A-\delta_B P+M_A-M_B)
\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(30)
$$

となり，本式のうち，いずれかを解いて κl を求めると，座屈荷重および座屈たわみの形式を決定する座屈次数が得られ，またいま求めた κl を別の式に代入すると，その座屈次数の時に満足すべき端末条件が得られる．しかし，ここでは端末条件が求めやすいように次のような手順を踏むことにした．

いま，(30) 式を2乗して加えると

$$
\begin{aligned}
&[(\kappa l)^2M_A{}^2+(lP\theta_A-\delta_B P+M_A-M_B)^2]^2 \\
&\quad =(\kappa l)^2[lP(M_A\theta_B-M_B\theta_A)-\delta_B P(M_A-M_B) \\
&\quad +(M_A-M_B)^2]^2 \\
&\quad +[(\kappa l)^2M_AM_B+(lP\theta_B-\delta_B P+M_A \\
&\qquad -M_B)(lP\theta_A-\delta_B P+M_A-M_B)]^2 \cdots\cdots(31)
\end{aligned}
$$

の関係が得られるが，これは (30) 式のいずれかの式から κl を求めて，その値を別の式に代入したことにあたる．ただし，ここで (14) 式と (14′) 式によれば

$$
R_A=R_B=\frac{M_A-M_B}{l}-P\frac{\delta_B}{l} \qquad \cdots\cdots(32)
$$

の関係が成立していなくてはならない．つまり，(31) 式の中の κl は既知の値であり，(31) 式は (30) 式から得られる各座屈次数に対応する端末での曲げモーメントおよび変位が満足すべき条件を表わしている．したがって，以後この (31) 式を座屈端末条件式と呼ぶことにする．

これに対して (30) 式を以後，座屈次数方程式と呼ぶ．厳密には (30) 式のいずれか一方を座屈次数方程式と呼ぶべきであるが，前述のように (31) 式の座屈端末条件式は (30) 式のどちらと組合せても常に成立する関係であるから，ここでは (30) 式の2つの関係を座屈次数方程式と呼ぶことにする．すなわち実際の計算で必要とするものは，(30) 式のうちの1個の方程式と (31) 式であるから，(30) 式の残りの1個の方程式は検算の役目を果すことになり便利である．(30) 式と (31) 式によれば，座屈時における柱の端末条件と座屈形式との理論的な対応関係が得られ，座屈は (30) 式と (31) 式の両者が同時に成立するときにおこる．

5　座屈端末条件と対応座屈形式

各種の端末支持柱に対して，(30) 式と (31) 式を適用し，端末条件とそれに対応する座屈形式を求めると次のようになる．

(1)　両端支持の柱

柱の両端が単純支持の場合には

$$
\left.\begin{aligned}
M_A=M_B=0,\ \ \delta_B=0 \\
\theta_A\neq 0,\ \ \theta_B\neq 0
\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(33)
$$

の条件が予め与えられている．これを (31) 式に代入すると

$$(lP\theta_A)^4=(lP\theta_A)^2(lP\theta_B)^2$$

を得るが，両辺から $(lP\theta_A)^2$ をおとすと

$$(lP\theta_A)^2=(lP\theta_B)^2$$

となり，さらに $(lP)^2$ がおちるので，最終的には

$$\theta_A{}^2=\theta_B{}^2 \qquad \cdots\cdots(34)$$

が得られる．これが両端支持の柱に対する座屈端末条件であり，この場合柱の両端における傾斜角が，この (34) 式の関係を満足するように座屈をおこすことになる．

次に (34) 式の端末条件に対応して発生する座屈たわみ形式を求めるために，(30) 式へ (33) 式の関係を代入すると

$$\sin\kappa l=0,\ \text{および}\ \cos\kappa l=\theta_B/\theta_A \qquad \cdots\cdots(35)$$

を得るが，この第2式へ (34) 式の端末条件を代入すると

$$\cos\kappa l=\pm 1$$

となり，これは第1式の $\sin\kappa l=0$ と矛盾しない．したがって，(35) 式が座屈次数方程式であり，これから

座屈荷重の値も同時に決定できる．すなわち，(35) 式の $\sin \kappa l = 0$ より

$$\kappa_n l = n\pi, \quad (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots\cdots)$$

が得られるので，座屈次数 n がきまり，さらに (18) 式から

$$P_n = EI\kappa_n = EI\frac{n^2\pi^2}{l^2}, \quad (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots\cdots)$$

として座屈荷重 P_n が得られる．

また，この両端支持の柱に対する座屈たわみは (25) 式へ (33) 式の関係を代入すればよいので

$$w = \frac{\theta_A}{\kappa}\sin \kappa x \qquad \cdots\cdots(36)$$

で表わされ，たわみは端末の傾斜角 θ_A の大きさできまる．

このように，両端支持柱の場合，$\sin \kappa l = 0$ の座屈次数方程式と，$\theta_A{}^2 = \theta_B{}^2$ の座屈端末条件式が得られるが，$w = (\theta_A/\kappa)\sin \kappa x$ の座屈たわみ式を使用すれば，$\sin \kappa l = 0$ の関係は $[w]_{x=l} = 0$ の変位適合条件から得られるものであり，また $\theta_A{}^2 = \theta_B{}^2$ の関係は $[dw/dx]_{x=l} = \theta_B$ の条件に $\sin \kappa l = 0$，すなわち $\cos \kappa l = \pm 1$ の条件を使用して得られるものであることがわかる．

なお，この場合の支持点反力は (32) 式に (33) 式の関係を代入すれば

$$R_A = R_B = 0$$

となり，両端支持の柱の場合，支点反力は存在しないということになる．したがって，(7) 式は

$$EI\frac{d^3w}{dx^3} + P\frac{dw}{dx} = 0$$

となり，これは (2) 式と一致する．このことから，両端支持柱の場合に，(2) 式をたわみの基礎方程式として採用しても差支えないということがわかる．

(2) 両端固着の柱

両端が固着された柱に対しては

$$\delta_B = 0, \quad \theta_A = \theta_B = 0 \qquad \cdots\cdots(37)$$

の関係が在在する．これらのものを (31) 式に代入すると

$$[(\kappa l)^2 M_A{}^2 + (M_A - M_B)^2]^2 = (\kappa l)^2 (M_A - M_B)^4 + [(\kappa l)^2 M_A M_B + (M_A - M_B)^2]^2$$

となるが，これを整理すると，端末条件として

$$[(\kappa l)^2 M_A{}^2 + (M_A - M_B)^2](M_A{}^2 - M_B{}^2) = 0 \qquad \cdots\cdots(38)$$

の関係が成立しなければならないことになる．ここで

$$[(\kappa l)^2 M_A{}^2 + (M_A - M_B)^2] \fallingdotseq 0$$

と考えるべきであるから

$$M_A{}^2 - M_B{}^2 = 0 \qquad \cdots\cdots(39)$$

が得られ，これが両端固着の柱が座屈するときの端末条件式である．したがって，両端固着の柱はこの関係が満足されるように座屈をおこす．

次に座屈端末条件 (39) 式に対応する座屈形式を求めるために，(37) 式の関係を (30) 式に代入すると

$$\left.\begin{aligned} &[(\kappa l)^2 M_A{}^2 + (M_A - M_B)^2]\sin \kappa l \\ &\quad = \kappa l (M_A - M_B)^2 \\ &[(\kappa l)^2 M_A{}^2 + (M_A - M_B)^2]\cos \kappa l \\ &\quad = (\kappa l)^2 M_A M_B + (M_A - M_B)^2 \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(40)$$

として座屈次数方程式が得られる．したがって，本式のいずれかを κl について解けば，座屈時におけるたわみ形の模様が決定できることになる．(40) 式は 2 個の方程式で表わされているが，この場合 $M_A{}^2 - M_B{}^2 = 0$ の端末条件があるので，これを (40) 式に適用すると (40) 式は実質上 1 個の方程式になってしまう．さて，いまの場合 (39) 式の端末条件が存在するので，(40) 式により座屈次数を求めるためには

$$M_A = M_B, \quad \text{あるいは} \quad M_A = -M_B$$

の 2 通りの場合を別々に考えなければならない．

(i) $M_A = M_B$ のとき

(40) 式に $M_A = M_B$ を代入すると

$$\sin \kappa l = 0, \quad \text{および} \quad \cos \kappa l = 1 \qquad \cdots\cdots(41)$$

が得られる．したがって，これら両式を満足する κl の値は

$$\kappa l = 2n\pi, \quad (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots\cdots) \qquad \cdots\cdots(42)$$

となる．この関係はまた，次のようにして求めてもよい．すなわち，$\sin \kappa l = 2\sin(\kappa l/2)\cos(\kappa l/2)$，および $\cos \kappa l = 1 - 2\sin^2(\kappa l/2)$ の公式によって，(41) 式を変形すると

$$\sin\frac{\kappa l}{2}\cos\frac{\kappa l}{2} = 0, \quad \text{および} \quad \sin^2\frac{\kappa l}{2} = 0$$

となるので，この両者をともに満足するように

$$\sin(\kappa l/2) = 0 \qquad \cdots\cdots(43)$$

を採用すれば，これから $\kappa l/2 = n\pi$，$(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots\cdots)$ として (42) 式と同じ結果が得られる．

また，座屈時のたわみは (25) 式に (37) 式の関係を適用すると

$$w = (1/\kappa l P)\{\kappa l M_A(1 - \cos \kappa x) + (M_A - M_B)\sin \kappa x - (M_A - M_B)\kappa x\} \qquad \cdots\cdots(44)$$

のように得られる．よって $M_A = M_B$ の関係が成立す

るとき，上式は

$$w = (M_A/P)(1-\cos \kappa x) \quad \cdots\cdots (45)$$

となり，これに (42) 式の $\kappa = 2n\pi/l$ の関係を代入して

$$w = (M_A/P)\{1-\cos(2n\pi x/l)\} \quad \cdots\cdots (46)$$

を得る．ここで $x = \xi + l/2$ とおいて，座標原点を径間の中央に移すと

$$w = (M_A/P)\{1-\cos n\pi \cos(2n\pi\xi/l)\} \quad \cdots\cdots (46')$$

となるが，本式で $\xi = -\xi$ とおいても w の値は変らない．したがって，$M_A = M_B$ のとき，座屈の形は径間中央点に対して対称形になるという結論が得られる．

次に，この $M_A = M_B$ のときの支点反力は (32) 式に (37) 式の $\delta_B = 0$ の関係を用いると

$$R_A = R_B = 0$$

となり，(7) 式は

$$EI\frac{d^3w}{dx^3} + P\frac{dw}{dx} = 0$$

で表わされる．本式は (2) 式と一致するので，$M_A = M_B$ の端末条件を満足する両端固着柱の座屈計算では，(2) 式をたわみの基礎方程式として採用してもよい．

(ii)　$M_A = -M_B$ のとき

(40) 式に $M_A = -M_B$ の関係を代入すれば

$$\left.\begin{aligned} &[(\kappa l)^2 M_A{}^2 + 4M_A{}^2]\sin \kappa l = 4\kappa l M_A{}^2 \\ &[(\kappa l)^2 M_A{}^2 + 4M_A{}^2]\cos \kappa l = -(\kappa l)^2 M_A{}^2 + 4M_A{}^2 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (47)$$

となり，これから

$$\left.\begin{aligned} \sin \kappa l &= \frac{4\kappa l}{4+(\kappa l)^2} \\ \cos \kappa l &= \frac{4-(\kappa l)^2}{4+(\kappa l)^2} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (48)$$

が得られる．ここで，$\sin \kappa l = 2\sin(\kappa l/2)\cos(\kappa l/2)$，$\cos \kappa l = 1-2\sin^2(\kappa l/2)$ の公式を使用すると，(48) 式は

$$\left.\begin{aligned} \sin\frac{\kappa l}{2}\cos\frac{\kappa l}{2} &= \frac{2(\kappa l)}{4+(\kappa l)^2} > 0 \\ \sin^2\frac{\kappa l}{2} &= \frac{(\kappa l)^2}{4+(\kappa l)^2} > 0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (49)$$

となり，第1式で第2式を割ると

$$\tan\frac{\kappa l}{2} = \frac{\kappa l}{2} \quad \cdots\cdots (50)$$

が得られる．あるいはこの (50) 式は

$$\cos\frac{\kappa l}{2} = \frac{2}{\kappa l}\sin\frac{\kappa l}{2} \quad \cdots\cdots (51)$$

のように表わすこともできる．(50) 式が $M_A = -M_B$ の端末条件のときの座屈次数方程式であり，本式よりこのときの座屈次数と座屈荷重が得られる．

次に座屈時のたわみは (25) 式に (37) 式の関係と $M_A = -M_B$ の関係を使用すると

$$w = \frac{M_A}{P}\left\{1-\cos \kappa x + \frac{2}{\kappa l}(\sin \kappa x - \kappa x)\right\} \cdots\cdots (52)$$

となり，前と同様に $x = \xi + l/2$ とおいて座標原点を径間の中央点に移し，かつ (51) 式の関係を利用すれば，(52) 式は

$$w = -\frac{M_A}{P}\left\{\frac{2}{l}\xi - \left(\frac{\kappa l}{2} + \frac{2}{\kappa l}\right)\cos\frac{\kappa l}{2}\sin \kappa\xi\right\} \quad \cdots\cdots (53)$$

のように表わすことができる．本式で $\xi = -\xi$ とおけば，たわみの絶対値は変らず符号のみが変る．このことは $M_A = -M_B$ のとき，径間の中央点に関してたわみが逆対称になるということを示す．

なお，(32) 式に (37) 式の関係を用いると，支点反力は

$$R_A = R_B = \frac{M_A - M_B}{l}$$

で表わされるが，$M_A = -M_B$ の関係があるので

$$R_A = R_B = \frac{2M_A}{l}$$

となる．よって，(7) 式は

$$EI\frac{d^3w}{dx^3} + P\frac{dw}{dx} = -\frac{2M_A}{l}$$

となり，本式は (2) 式と一致しない．したがって，両端固着の柱で $M_A = -M_B$ の関係を満足する座屈の場合，(2) 式をたわみの基礎方程式として使用すれば，不都合をきたすことになる．

ところで，これまでに述べた所によれば，この両端固着柱の場合，座屈時における端末条件を理論的に先ず求めておき，そのあとでそれらの端末条件に対応する座屈次数方程式を求めて来た．これに対し，従来の座屈計算では，座屈時のたわみ式へ変位適合条件としての境界条件を直接適用して，座屈次数方程式とそれに対応する端末条件を求める方式が採用されている．すなわち，(44) 式を微分してたわみ角を求めると

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} = \frac{\kappa}{\kappa l P}\{&\kappa l M_A \sin \kappa x \\ &+ (M_A - M_B)\cos \kappa x + M_B - M_A\} \quad \cdots\cdots (54) \end{aligned}$$

となるが，本式と (44) 式に $[dw/dx]_{x=l} = 0$ および $[w]_{x=l} = 0$ の変位適合条件を適用すると

$$\left\{\begin{aligned} &\kappa l M_A \sin \kappa l + (M_A - M_B)\cos \kappa l + M_B - M_A = 0 \\ &\kappa l M_A - \kappa l M_A \cos \kappa l + (M_A - M_B)\sin \kappa l \\ &\quad + (M_B - M_A)\kappa l = 0 \end{aligned}\right.$$

が得られる．この両式に $\cos \kappa l = 1-2\sin^2(\kappa l/2)$ と $\sin \kappa l = 2\sin(\kappa l/2)\cos(\kappa l/2)$ を代入すると，それぞれの式は

$$\begin{cases}\sin\dfrac{\kappa l}{2}\left\{(M_A-M_B)\sin\dfrac{\kappa l}{2}-\kappa lM_A\cos\dfrac{\kappa l}{2}\right\}=0 & \cdots\cdots(55)\\ \sin\dfrac{\kappa l}{2}\left\{\kappa lM_A\sin\dfrac{\kappa l}{2}+(M_A-M_B)\cos\dfrac{\kappa l}{2}\right\} \\ \quad=\dfrac{\kappa l}{2}(M_A-M_B) & \cdots\cdots(56)\end{cases}$$

となるが，ここで (55) 式は $[dw/dx]_{x=l}=0$ の条件を表わし，(56) 式は $[w]_{x=l}=0$ の条件である．(55) 式は

$$\begin{cases}\sin\dfrac{\kappa l}{2}=0 & \cdots\cdots(57)\\ (M_A-M_B)\sin\dfrac{\kappa l}{2}=\kappa lM_A\cos\dfrac{\kappa l}{2} & \cdots\cdots(58)\end{cases}$$

のいずれかが成立するときに満足されるが，このうち (57) 式が成立するためには (56) 式により $M_A=M_B$ でなくてはならぬことがわかる．

次に，(58) 式からは $M_A=-M_B$ の条件を仮定すると，$\cos(\kappa l/2)\neq 0$ の場合

$$\tan(\kappa l/2)=\kappa l/2$$

を得るが，この関係はまた (56) 式をも満足していなければならない．そこで，このことを確めるために，(56) 式に $M_A=-M_B$ の条件を代入すると，(56) 式は

$$\sin(\kappa l/2)\{\kappa lM_A\sin(\kappa l/2)+2M_A\cos(\kappa l/2)\}$$
$$=(\kappa l/2)2M_A$$
$$\therefore\quad \kappa l\sin^2(\kappa l/2)+2\sin(\kappa l/2)\cos(\kappa l/2)=\kappa l$$

となり，これに $\sin^2(\kappa l/2)=1-\cos^2(\kappa l/2)$ を代入すれば

$$\cos^2\frac{\kappa l}{2}=\frac{4}{4+(\kappa l)^2}\qquad\cdots\cdots(59)$$

が得られる．よって

$$\sin^2\frac{\kappa l}{2}=1-\cos^2\frac{\kappa l}{2}=\frac{(\kappa l)^2}{4+(\kappa l)^2}\qquad\cdots\cdots(60)$$

となり，(59) 式と (60) 式から

$$\tan^2(\kappa l/2)=(\kappa l/2)^2,\quad \therefore\quad \tan(\kappa l/2)=\kappa l/2$$

として，$M_A=-M_B$ を仮定すれば，$\tan(\kappa l/2)=\kappa l/2$ の関係を (56) 式も満足していることがわかる．このように，通常の境界値問題の解法に従って両端固着柱の座屈計算を実施すると，$M_A=-M_B$ の端末条件を推察によって予め設定しなければならず，この点が (39) 式の誘導法に比べると，やや理論的な明快さに欠けるところであると思われる．

(3) 一端固定，他端支持の柱

左端Aを固着とし，右端Bを単純支持とすれば，この場合

$$\theta_A=0,\quad \delta_B=0,\quad M_B=0\qquad\cdots\cdots(61)$$

の条件が与えられている．これを (31) 式に代入すると

$$[(\kappa l)^2M_A{}^2+M_A{}^2]^2=[(\kappa l)lP\theta_BM_A+(\kappa l)M_A{}^2]^2$$
$$+(lP\theta_B+M_A)^2M_A{}^2$$

となるが，これを整理すれば

$$[(\kappa l)^2+1]M_A{}^2=(lP\theta_B+M_A)^2\qquad\cdots\cdots(62)$$

が得られる．本式がA端固着，B端支持の柱に対する座屈端末条件式であるが，これを M_A にについて解けば

$$M_A=\frac{lP\theta_B}{\sqrt{(\kappa l)^2+1}-1}\ ,\ \text{あるいは}$$
$$M_A=-\frac{lP\theta_B}{\sqrt{(\kappa l)^2+1}+1}\qquad\cdots\cdots(63)$$

となる．

次に (62) 式の端末条件に対応する座屈次数を求めるために，(61) 式の関係を (30) 式に適用すれば

$$\left.\begin{array}{l}[(\kappa l)^2+1]M_A{}^2\sin\kappa l=(lP\theta_B+M_A)(\kappa l)M_A\\ [(\kappa l)^2+1]M_A{}^2\cos\kappa l=(lP\theta_B+M_A)M_A\end{array}\right\}\qquad\cdots\cdots(64)$$

となり，本式の右辺に (62) 式の端末条件を代入すると

$$\begin{cases}\sin\kappa l=\dfrac{\kappa l}{\sqrt{(\kappa l)^2+1}}\ ,\ \text{および}\ \cos\kappa l=\dfrac{1}{\sqrt{(\kappa l)^2+1}} & \cdots\cdots(65)\\ \sin\kappa l=\dfrac{-\kappa l}{\sqrt{(\kappa l)^2+1}}\ ,\ \text{および}\ \cos\kappa l=\dfrac{-1}{\sqrt{(\kappa l)^2+1}} & \cdots\cdots(66)\end{cases}$$

のように2通りの式が得られるが，これらは (64) 式の第1式を第2式で割算してみれば明らかなように

$$\tan\kappa l=\kappa l\qquad\cdots\cdots(67)$$

のような1個の式でまとめて表わすことができる．この (67) 式が1端固着，他端支持の柱に対する座屈次数方程式である．

また，この場合の座屈たわみは (25) 式に (61) 式の関係を用いると

$$w=\frac{M_A}{\kappa lP}\{\kappa l(1-\cos\kappa x)-\kappa x+\sin\kappa x\}\cdots\cdots(68)$$

のように表わすことができる．あるいは，(32) 式で $M_B=0,\ \delta_B=0$ とおいて得られる

$$R_A=M_A/l,\ \text{すなわち}\ M_A=lR_A$$

の関係を用いると (68) 式は R_A で表わすこともできる．

なお，この場合は $R_A=M_A/l$ となるので $R_A\neq 0$ であることがわかる．よって (7) 式は

$$EI\frac{d^3w}{dx^3}+P\frac{dw}{dx}=-\frac{M_A}{l}$$

となり，これは (2) 式と一致しない．したがって，一端固着，他端支持の柱の場合，(2) 式はたわみの基礎方程式として使用できないことを知る．

さて，この一端固着，他端支持の柱の場合，(68) 式に $\delta_B=[w]_{x=l}=0$ の条件を適用すると

$$\kappa l-\kappa l\cos\kappa l+\sin\kappa l-\kappa l=0$$

$$\therefore\quad \tan\kappa l=\kappa l$$

となるので，(67) 式の座屈次数方程式は $[w]_{x=l}=0$ の条件から得られるものであることがわかる．また，(68) 式を x で微分してたわみ角を求めると

$$\frac{dw}{dx}=\frac{\kappa M_A}{\kappa lP}(\kappa l\sin\kappa x+\cos\kappa x-1)$$

となるが，本式から $[dw/dx]_{x=l}=\theta_B$ の条件を作れば

$$\frac{\kappa M_A}{\kappa lP}(\kappa l\sin\kappa l+\cos\kappa l-1)=\theta_B$$

$$\therefore\quad M_A[(\kappa l)\sin\kappa l+\cos\kappa l]=M_A+lP\theta_B$$

となる．本式へ $\tan\kappa l=\kappa l$，すなわち $\sin\kappa l=(\kappa l)\cos\kappa l$ を代入すると

$$M_A[(\kappa l)^2+1]\cos\kappa l=M_A+lP\theta_B$$

となり，両辺を2乗すれば

$$M_A{}^2[(\kappa l)^2+1]^2\cos^2\kappa l=(M_A+lP\theta_B)^2$$

を得る．これに $\sin^2\kappa l=(\kappa l)^2\cos^2\kappa l$，すなわち $1-\cos^2\kappa l=(\kappa l)^2\cos^2\kappa l$ から得られる

$$\cos^2\kappa l=1/[(\kappa l)^2+1]$$

の関係を代入すると

$$M_A{}^2[(\kappa l)^2+1]=(lP\theta_B+M_A)^2$$

となり，(62) 式が得られる．したがって，(62) 式の端末条件式は $[dw/dx]_{x=l}=\theta_B$ の条件から得られたものであることを知る．

(4) 片持ちの柱

A端を固着，B端を自由とすれば，この場合

$$\theta_A=0,\quad M_B=0,\quad R_B=0 \qquad \cdots\cdots(69)$$

の関係が存在する．したがって，座屈端末条件は (31) 式より

$$\begin{aligned}&[(\kappa l)^2M_A{}^2+(M_A-\delta_BP)^2]^2\\&\quad=[(\kappa l)lP\theta_BM_A-(\kappa l)\delta_BPM_A+(\kappa l)M_A{}^2]^2\\&\quad+[(lP\theta_B-\delta_BP+M_A)(M_A-\delta_BP)]^2\end{aligned}$$

となるが，これを整理すれば次の (70) 式が得られる．

$$\begin{aligned}&[(\kappa l)^2M_A{}^2+(M_A-\delta_BP)^2][(\kappa l)^2M_A{}^2+(M_A-\delta_BP)^2\\&\quad-(lP\theta_B+M_A-\delta_BP)^2]=0\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(70)$$

ところがこの場合，(69) 式でわかるように $R_B=0$ であるから，(32) 式により

$$R_A=R_B=(M_A-\delta_BP)/l=0$$

$$\therefore\quad M_A=\delta_BP \qquad \cdots\cdots(71)$$

でなくてはならない．よってこの (71) 式を (70) 式に用いると

$$(\kappa l)^2M_A{}^2[(\kappa l)^2M_A{}^2-(lP\theta_B)^2]=0$$

となる．$(\kappa l)^2M_A{}^2>0$ であるから

$$(\kappa l)^2M_A{}^2-(lP\theta_B)^2=0 \qquad \cdots\cdots(72)$$

が得られ，これが片持ち柱に対する座屈端末条件式である．あるいはまた，この (72) 式から M_A を求めると

$$M_A=\pm\frac{lP\theta_B}{\kappa l} \qquad \cdots\cdots(73)$$

となるが，この場合 (71) 式の関係があるので，(72) 式の M_A は自由端におけるたわみ δ_B でおきかえることができる．したがって，(73) 式もしくは (72) 式は

$$\delta_B=\pm\theta_B/\kappa \qquad \cdots\cdots(74)$$

のように表わすこともできる．

次に，(72) 式の端末条件に対応する座屈形式を求めるために，(69) 式の関係を (30) 式に適用すれば

$$\left.\begin{aligned}&[(\kappa l)^2M_A{}^2+(M_A-\delta_BP)^2]\sin\kappa l\\&\quad=(\kappa l)M_A(lP\theta_B+M_A-\delta_BP)\\&[(\kappa l)^2M_A{}^2+(M_A-\delta_BP)^2]\cos\kappa l\\&\quad=(M_A-\delta_BP)(lP\theta_B+M_A-\delta_BP)\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(75)$$

となるが，ここで (71) 式の関係を用いると，上式は

$$\left.\begin{aligned}&(\kappa l)^2M_A{}^2\sin\kappa l=(\kappa l)M_A(lP\theta_B)\\&(\kappa l)^2M_A{}^2\cos\kappa l=0\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(76)$$

となり，さらに本式で (72) 式の端末条件を用いると

$$\sin\kappa l=\pm1,\quad および\quad \cos\kappa l=0 \qquad \cdots\cdots(77)$$

が得られる．$\sin\kappa l=\pm1$ は $\cos\kappa l=0$ と矛盾しないので，この (77) 式から $\cos\kappa l=0$ が座屈次数方程式であることを知る．

また，(77) 式から得られる κ の値を使用して，この片持ち柱に対するたわみを求めると，(25) 式に (69) 式の関係と (71) 式の関係を用いることにより

$$w=\frac{M_A}{P}(1-\cos\kappa x) \qquad \cdots\cdots(78)$$

のように表わすことができる．したがって，$[w]_{x=l}=\delta_B$ の変位適合条件へ $\cos\kappa l=0$ の関係を代入すれば $M_A=P\delta_B$ となるが，これは (69) 式で示した $R_B=0$ の条件に外ならない．そして，$[dw/dx]_{x=l}=\theta_B$ の条件からは

$$\theta_B=\kappa\frac{M_A}{P}\sin\kappa l$$

が得られるので，これに $\sin\kappa l=\pm1$ の条件を使用すれば

$$M_A=\pm(P/\kappa)\theta_B$$

のように，(73) 式の端末条件式となることがわかる．

次に $[d^2w/dx^2]_{x=l}=0$ の条件からは

$$\cos\kappa l=0$$

の座屈次数方程式が得られ，また $[EId^3w/dx^3]_{x=l}=-P\theta_B$ の条件からは $\sin\kappa l=\pm1$ と組合せると，(73)式と同じ端末条件式の得られることがわかる．

なお，支点反力 R_A は $R_B=0$ であるから，(32) 式により $R_A=0$ となる．したがって (7) 式は

$$EI\frac{d^3w}{dx^3}+P\frac{dw}{dx}=0$$

となり，これは (2) 式と一致する．よって，一端固着，他端自由の片持ち柱に対しては (2) 式をたわみの基礎方程式として使用しても差支えないことがわかる．

6　結　　論

以上，一様長柱の座屈は (30) 式で表わされる座屈次数方程式と，(31) 式で表わされる座屈端末条件式が同時に満足されるように生ずるものであることを述べたが，一般に実用的な目的で採用されている各種の端末支持形式の柱について，(30) 式と (31) 式を適用した結果をまとめると次のようになる．

いまA点およびB点を長さ l，曲げ剛性 EI の一様長柱の両端末とし，この柱が一定の軸圧縮力 P を受けるときの両端におけるたわみ角を θ_A, θ_B，また両端の支持モーメントを M_A, M_B とすれば

(1)　両端支持の柱では $\theta_A{}^2-\theta_B{}^2=0$ の座屈端末条件式と $\sin\kappa l=0$ の座屈次数方程式が共に成立するように座屈をおこす．このとき $\sin\kappa l=0$ から $\kappa_n l=n\pi/l$, $(n=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots)$ として座屈次数 n がきまり，座屈荷重 P_n は $P_n=EI\kappa_n{}^2=EIn^2\pi^2/l^2$ の値となる．

(2)　両端固着の柱が座屈をおこすためには，$M_A{}^2-M_B{}^2=0$ の端末条件が成立していなければならない．このとき，$M_A-M_B=0$ の条件に対応する座屈次数方程式は $\sin(\kappa l/2)=0$ であり，また $M_A+M_B=0$ の条件には $\tan(\kappa l/2)=\kappa l/2$ の座屈次数方程式が対応する．

(3)　A端固着，B端支持の柱が座屈をおこすときには，$[(\kappa l)^2+1]M_A{}^2-(lP\theta_B+M_A)^2=0$ の座屈端末条件式と，$\tan\kappa l=\kappa l$ の座屈次数方程式の両者が共に成立していなければならない．

(4)　A端固着，B端自由の片持ち柱の場合には $(\kappa l)^2M_A{}^2-(lP\theta_B)^2=0$ の座屈端末条件式と，$\cos\kappa l=0$ の座屈次数方程式が同時に満足されるとき座屈をおこす．

(5)　柱のたわみを w とした場合，軸荷重 P のせん断力方向の成分とせん断力との和を表わす

$$EI\frac{d^3w}{dx^3}+P\frac{dw}{dx}=0$$

の式は支点反力が生じない座屈の場合にのみ成立する．したがって，この式は両端支持の柱および1端固着，他端自由の片持ち柱に対しては，たわみの基礎方程式として採用しても差支えないが，1端固着，他端支持の柱に対しては，たわみの基礎方程式として採用することができない．また両端固着の柱では，$M_A=M_B$ の端末条件が満足されるときにのみ，上式はたわみの基礎方程式として採用しても差支えないが，$M_A=-M_B$ の端末条件の場合には，上式はたわみの基礎方程式として使用することができない．

参　考　文　献

1)　太田友弥；材料力学（新版），p. 160，山海堂．
2)　八濱康和；機械学会誌，35巻，180号，(昭和7−4)．
3)　高橋利衛；機械学会誌，45巻，309号，(昭和17−12)．
4)　Stephen P. Timoshenko and James M. Gere; Theory of Elastic Stability, 2d. ed., p. 2, McGraw-Hill Book Company, Inc., N. Y.
5)　妹沢克惟；造船協会会報，第39号，(1926)
6)　高橋利衛；機械学会誌，13巻，45号，(昭和25−5)．