修士論文

有理数の数え上げと減少型連分数について

有満　光崇

鹿児島大学大学院　理工学研究科
数理情報科学専攻　博士前期課程

2012年3月23日

序文

本論文は,“ 減少型連分数 ”や，すべての正の既約分数が一回ずつ現れる“ 有理数の木 ”の研究の中で発見したさまざまな事実をまとめたものである．

“ 減少型連分数 ”の研究では，一般に知られている連分数の定理が減少型連分数ではどのように成り立つか比較をし，連分数展開から減少型連分数展開への変換の仕方，およびその逆の変換の仕方を発見した．

“ 有理数の木 ”の研究では，木に現れる有理数を並べて得られる数列 $\{f(n)\}$ に関するさまざまな定理を発見し，その証明を与えることができた．

他に，有理数の木に現れる有理数を既約分数の形ではなく連分数展開した形で表したときに見えてくる規則を発見し，その証明を与えることができた．

“ 有理数の木 ”の説明をする．

$\dfrac{1}{1}$ から始めて，$\dfrac{p}{q}$ の左下に $\dfrac{p}{p+q}$ を，右下に $\dfrac{p+q}{q}$ を置いていくと，次のような図ができる．

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & \frac{1}{1} & & & & \\
 & \frac{1}{2} & & & & & \frac{2}{1} & \\
\frac{1}{3} & & \frac{3}{2} & & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{1} \\
\frac{1}{4} \quad \frac{4}{3} & & \frac{3}{5} \quad \frac{5}{2} & & & \frac{2}{5} \quad \frac{5}{3} & & \frac{3}{4} \quad \frac{4}{1} \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & .
\end{array}
$$

これを有理数の木と呼ぶ．この木には，すべての正の既約分数がちょうど一回ずつ現れることが知られている．本研究では，i 行目に現れる有理数の分母 (分子)

の最大値を並べるとフィボナッチ数列をなしていることを発見し，その証明を与えることができた．

$\frac{1}{1}$ を先頭にして i 行目に現れる有理数を左から順に並べ，その後に $i+1$ 行目に現れる有理数を左から順に並べていくと次のような有理数列

$$\underbrace{\frac{1}{1}}_{0\text{ 行目}},\underbrace{\frac{1}{2},\frac{2}{1}}_{1\text{ 行目}},\underbrace{\frac{1}{3},\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{1}}_{2\text{ 行目}},\underbrace{\frac{1}{4},\frac{4}{3},\frac{3}{5},\frac{5}{2},\frac{2}{5},\frac{5}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{1}}_{3\text{ 行目}},\cdots$$

ができる．この数列もどの項の分母も次の項の分子と等しいことが知られている．

ここで，$n \in \mathbb{N}\ (0 \leq n)$ に対し，数列 $\{f(n)\}$ を

$$\begin{cases} f(0) & = 1 \\ f(2n+1) & = f(n) \\ f(2n+2) & = f(n) + f(n+1) \end{cases}$$

と定義すると，有理数列

$$\frac{f(0)}{f(1)},\ \frac{f(1)}{f(2)},\ \frac{f(2)}{f(3)},\ \cdots,\ \frac{f(n-1)}{f(n)},\ \frac{f(n)}{f(n+1)},\ \cdots$$

は，上の数列と完全に一致することも知られている．この f を用いて i 行目の左から k 番目 $(0 \leq k < 2^i)$ の有理数の分母は $f(2^i + k)$ と表せる．

また，1 以上の自然数 n の，$2^i\ (i = 0, 1, 2, \cdots)$ の形への分割で，同じ数が高々２回しか現れないものを n の複２進分割といい，n の相異なる複２進分割の総数は，$f(n)$ に一致することはすでに知られている．

この f に関して知られていることは少なかったが,「i 行目において k を偶数とするとき，k 番目の有理数の分母と，k の２進展開を逆順に書いた２進数番目の有理数の分母とが等しくなる.」など，本研究では f に関する定理をいくつか発見し，その証明を与えることができた．

そもそも，これらの研究を始めたのは,「集合論・入門」[2] に書かれている有理数の並べ方に関する命題を証明するための道具として,“ 減少型連分数 ”や“ 有理数の木 ”を勉強をしているうちに道具そのものにとても興味が沸いたからである．但し，本研究のきっかけとなった命題の証明はできずじまいである．

本論文作成にあたり適切な助言，ご指導頂いた古澤仁先生，新森修一先生，中岡宏行先生に，深く御礼申しあげます．

セミナーにおいて，数多くの助言，御指導して下さった青山究先生，福崎賢治先生に，心より感謝致します．

他諸先生方，学科事務室，他研究室の皆さまには，数多くのご支援，激励のお言葉を賜りましたことをここに感謝致します．

目 次

記号

本文において次の記号を用いる．$p, q \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}$ とする．

- $(p,\ q)$ とは，p と q の最大公約数を表す.
  特に，$(p,\ q) = 1$ のとき，p と q は既約であるという.
- $p \mid q$ とは，q は p で割り切れることを表す.
- $\lfloor x \rfloor$ とは，x 以下で最大の整数を表す.
- $\lceil x \rceil$ とは，x 以上で最小の整数表す.

1　連分数

1.1　有限連分数

　$N+1$ 個の変数

$$a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots, a_N$$

の関数

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{N-1} + \cfrac{1}{a_N}}}} \tag{1.1.1}$$

を有限連分数，または，連分数という．

　式 (1.1.1) を次のように書き表す．

$$a_0 + \frac{1}{a_1+}\frac{1}{a_2+}\cdots\frac{1}{a_N}, \quad \text{または,} \left[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_N\right].$$

$a_0, a_1, \cdots, a_N$ たちを連分数の部分商，または商という．

　計算により次がわかる．

$$[a_0] = \frac{a_0}{1}, \qquad [a_0, a_1] = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}, \qquad [a_0, a_1, a_2] = \frac{a_2 a_1 a_0 + a_2 + a_0}{a_2 a_1 + 1}.$$

また，$1 \leq n \leq N$ に対して明らかに次が成り立つ．

$$[a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1}, \tag{1.1.2}$$

$$[a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n] = \left[a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} + \frac{1}{a_n}\right], \tag{1.1.3}$$

$$[a_0, a_1, \cdots, a_n] = a_0 + \frac{1}{[a_1, a_2, \cdots, a_n]} = [a_0, [a_1, a_2, \cdots, a_n]]. \tag{1.1.4}$$

より一般に，$1 \leq m < n \leq N$ に対して，次が成り立つ．

$$[a_0, a_1, \cdots, a_n] = [a_0, a_1, \cdots, a_{m-1}, [a_m, a_{m+1}, \cdots, a_n]]. \tag{1.1.5}$$

1.2 連分数の中間近似分数

$0 \le n \le N$ を満たす n に対して,

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n]$$

を $[a_0, a_1, \ldots, a_N]$ の n 次中間近似分数という.

p_n と q_n を

$$\begin{aligned}
&p_0 = a_0, \quad p_1 = a_1 a_0 + 1, \quad p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \qquad (2 \le n \le N),\\
&q_0 = 1, \qquad q_1 = a_1, \qquad\qquad\quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \qquad (2 \le n \le N),
\end{aligned}$$

と定義する.

定理 1.2.1

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}.$$

(証明)

i) $n = 0$ と $n = 1$ のときは, 既に証明した.

ii) n のとき成り立つと仮定すると,

$$\begin{aligned}
[a_0, a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}] &= \left[a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right]\\
&= \frac{\left(a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}\right) p_{n-1} + p_{n-2}}{\left(a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}\right) q_{n-1} + q_{n-2}}\\
&= \frac{a_{n+1}(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{a_{n+1}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}}\\
&= \frac{a_{n+1} p_n + p_{n-1}}{a_{n+1} q_n + q_{n-1}} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}.
\end{aligned}$$

■

定理 1.2.2

$1 \leq n \leq N$ なる任意の n に対し,

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1},$$

すなわち,

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}.$$

(証明)

$$\begin{aligned}
p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n &= (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-1} - p_{n-1}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) \\
&= p_{n-2} q_{n-1} - p_{n-1} q_{n-2} \\
&= -(p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}) \\
&= \cdots \\
&= (-1)^{n-1}(p_1 q_0 - p_0 q_1) \\
&= (-1)^{n-1}((a_0 a_1 + 1) - a_0 a_1) \\
&= (-1)^{n-1}.
\end{aligned}$$

■

定理 1.2.3

$2 \leq n \leq N$ なる任意の n に対し,

$$p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n,$$

すなわち,

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{(-1)^n a_n}{q_n q_{n-2}}.$$

(証明)

$$\begin{aligned}
p_nq_{n-2} - p_{n-2}q_n &= (a_np_{n-1} + p_{n-2})q_{n-2} - p_{n-2}(a_nq_{n-1} + q_{n-2}) \\
&= a_n(p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1}) \\
&= a_n(-1)^{n-2} \\
&= a_n(-1)^n(-1)^{-2} \\
&= (-1)^n a_n.
\end{aligned}$$

■

1.3　正の商を持つ連分数

a_0 に整数, $a_1, a_2, \cdots, a_N$ に正整数が割り当てられているとき, 連分数 $[a_0, a_1, \cdots, a_N]$ は単純であるという. 以下, 各 n に対し, p_n, q_n は, そこに含まれる変数 $a_0, a_1, \cdots, a_N$ に割り当てられた数を代入した結果を表わすとする. 明らかに, p_n, q_n は整数である. 以下, 前節までの変数 $a_0, a_1, \cdots, a_N$ よりなる多項式 p_n, q_n と数を代入した値 p_n, q_n は区別せず, 混用する.

(1.1.5) より, $2 \leq n \leq N$ に対して次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
x &= [a_0, a_1, \cdots, a_N] \\
&= [a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, [a_n, a_{n+1}, \cdots, a_N]] \\
&= \frac{[a_n, a_{n+1}, \cdots, a_N]p_{n-1} + p_{n-2}}{[a_n, a_{n+1}, \cdots, a_N]q_{n-1} + q_{n-2}}. \qquad (1.3.1)
\end{aligned}$$

定理 1.3.1

x_{2n} は n について狭義単調増加であり, x_{2n+1} は n について狭義単調減少である.

(証明)
まず, 次の補題を示す.

補題 1.3.2

$$q_n > 0 \qquad (n = 0, 1, \cdots, N).$$

i) $n = 0$ のとき，$q_0 = 1 > 0$.

ii) $n = 1$ のとき，$q_1 = a_1 > 0$.

iii) n まで成り立つと仮定すると，$q_n > 0$，$q_{n-1} > 0$．$q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$，$a_{n+1} > 0$ より，$q_{n+1} > 0$.

定理 1.3.1 を示す.

定理 1.2.3 と補題 1.3.2 より，

$$x_{2n} - x_{2n-2} = \frac{(-1)^{2n} a_{2n}}{q_{2n}q_{2n-2}} = \frac{a_{2n}}{q_{2n}q_{2n-2}} > 0. \qquad x_{2n+1} - x_{2n-1} = \frac{(-1)^{2n+1} a_{2n+1}}{q_{2n+1}q_{2n-1}} = \frac{-a_{2n+1}}{q_{2n+1}q_{2n-1}} < 0.$$

■

定理 1.3.3

$$x_{2m} < x_{2n+1}.$$

(証明)

定理 1.2.2 より,

$$x_{2n} - x_{2n-1} = \frac{(-1)^{2n-1}}{q_{2n}q_{2n-1}} = \frac{-1}{q_{2n}q_{2n-1}} < 0.$$

よって，$x_{2n} < x_{2n-1}$．$\cdots$①

背理法で示す.

$x_{2\lambda+1} \leq x_{2\mu}$ となる λ, μ が存在すると仮定する.

i) $\lambda < \mu$ のとき,

定理 1.3.1 より，$x_{2\mu+1} < x_{2\lambda+1}$.

仮定より，$x_{2\mu+1} < x_{2\mu}$.

しかし，① に矛盾する.

ii) $\mu < \lambda$ のとき,

定理 1.3.1 より，$x_{2\mu} < x_{2\lambda}$.

仮定より，$x_{2\lambda+1} < x_{2\lambda}$.

しかし，① に矛盾する.

iii) $\lambda = \mu$ のとき，$x_{2\lambda+1} \leq x_{2\lambda}$ となり，① に矛盾する.

■

定理 1.3.4

$$x_{2m} < x_N < x_{2n+1}.$$

(証明)

N が偶数か奇数かで場合分けをする.

i) $N = 2\mu$ のとき，$m < \mu$.

定理 1.3.1 より，$x_{2m} < x_{2\mu}$. 定理 1.3.2 より，$x_{2n+1} > x_{2\mu}$.

ii) $N = 2\mu + 1$ のとき，$n < \mu$.

定理 1.3.2 より，$x_{2m} < x_{2\mu+1}$. 定理 1.3.1 より，$x_{2n+1} > x_{2\mu+1}$.

■

1.4　単純連分数

$x = x_N \left(= \dfrac{p_N}{q_N} \right)$ とする．このとき，数 x は連分数 $[a_0, a_1, \cdots, a_N]$ で表わされるという．

定理 1.4.1

$n \geq 1$ に対して，$q_n \geq q_{n-1}$．特に，$n > 1$ のとき，$q_n > q_{n-1}$.

(証明)

i) $n = 1$ のとき,

$$q_1 - q_0 = a_1 - 1 \geq 0.$$

ii) $n \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} q_n - q_{n-1} &= a_n q_{n-1} + q_{n-2} - q_{n-1} \\ &= (a_n - 1) q_{n-1} + q_{n-2} > 0. \end{aligned}$$

■

定理 1.4.2

$n \geq 0$ に対して，$q_n \geq n$．特に，$n > 3$ のとき，$q_n > n$.

(証明)

i) $n = 0$ のとき,

$$q_0 = 1 > 0.$$

ii) $n = 1$ のとき,

$$q_1 = a_1 \geq 1.$$

iii) $n = 2$ のとき,

$$q_2 = a_2 a_1 + 1 \geq 2.$$

iv) $n = 3$ のとき,

$$\begin{aligned} q_3 = a_3 q_2 + q_1 &\geq q_2 + q_1 \\ &\geq 2 + 1 = 3. \end{aligned}$$

v) $3 \leq n$ として，n 以下では成り立つと仮定する．$n+1$ のときについて考える．

$$\begin{aligned} q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1} &\geq q_n + q_{n-1} \\ &> q_n + q_{n-2} \\ &> q_n + q_{n-3} \\ &> \cdots \\ &> q_n + q_1 \qquad \geq q_n + q_0 \\ &= q_n + 1 \geq n+1. \end{aligned}$$

等号は成り立たない．

■

定理 1.4.3

$\dfrac{p_n}{q_n}$ は既約分数である．

(証明)
既約分数でないと仮定すると，$d \mid p_n$，$d \mid q_n$ となる自然数 $d \neq 1$ が存在する．
定理 1.2.2 より，$d \mid p_n q_{n-1} + p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$.
よって，$d \mid 1$.
しかし，$d \neq 1$ と矛盾する．

■

1.5　既約分数の単純連分数表示

任意の連分数 $[a_0, a_1, \cdots, a_N]$ はある有理数

$$x = x_N$$

を表わしている．この節と次の節で，逆に，任意の有理数 x はある単純連分数により表わされ，2 通りの表示ができることを示す．

定理 1.5.1

x が奇数個の商を持つ単純連分数で表示できるならば，偶数個の商を持つ単純連分数でも表示できる．逆も，成り立つ．

(証明)

i) $a_n \geq 2$ のとき,

$$[a_0, a_1, \cdots, a_n] = [a_0, a_1, \cdots, a_n - 1, 1].$$

ii) $a_n = 1$ のとき,

$$[a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, 1] = [a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} + 1].$$

■

$0 \leq n \leq N$ を満たす n に対して,

$$a'_n = [a_n, a_{n+1}, \cdots, a_N]$$

を連分数 $[a_0, a_1, \cdots, a_N]$ の n 次の全商という．例えば,

$$x = a'_0, \qquad x = \frac{a_0 a'_1 + 1}{a'_1}.$$

そして，式 (1.3.1) より,

$$x = \frac{a'_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a'_n q_{n-1} + q_{n-2}} \qquad (2 \leq n \leq N).$$

定理 1.5.2

$a_n = \lfloor a'_n \rfloor$．ただし，$a_N = 1$ のときは，$a_{N-1} = \lfloor a'_{N-1} \rfloor - 1$.

(証明)

i) $N = 0$ のとき，$a_0 = a'_0 = \lfloor a'_0 \rfloor$.

ii) $N > 0$ のとき,

I) $0 \le n < N-1$ のとき,

$$a'_{n+1} = a_{n+1} + \frac{1}{a'_{n+2}} > 1 \text{ より，} a'_n = a_n + \frac{1}{a'_{n+1}} < a_n + 1.$$

よって,

$$a_n < a'_n < a_n + 1.$$

ゆえに,

$$a_n = \lfloor a'_n \rfloor.$$

II) $n = N-1$ のとき,

1) $a_N \neq 1$ のとき，$0 < \dfrac{1}{a_N} < 1$ より,

$$\begin{aligned} \lfloor a'_{N-1} \rfloor &= \left\lfloor a_{N-1} + \frac{1}{a_N} \right\rfloor \\ &= a_{N-1}. \end{aligned}$$

2) $a_N = 1$ のとき,

$$\begin{aligned} \lfloor a'_{N-1} \rfloor &= \left\lfloor a_{N-1} + \frac{1}{a_N} \right\rfloor \\ &= \lfloor a_{N-1} + 1 \rfloor \\ &= a_{N-1} + 1. \end{aligned}$$

III) $n = N$ のとき,

$$a_N = a'_N = \lfloor a'_N \rfloor.$$

■

定理 1.5.3

$a_N \neq 1$，$b_M \neq 1$ であり,

$$[a_0, a_1, \cdots, a_N] = [b_0, b_1, \cdots, b_M]$$

ならば，$M = N$ でかつ,

$$a_n = b_n \qquad (0 \le n \le N).$$

(証明) $a_N \neq 1,\ b_M \neq 1$ とする．

定理 1.5.2 より，

$$a_0 = \lfloor a'_0 \rfloor \qquad\qquad b_0 = \lfloor b'_0 \rfloor$$
$$= \lfloor x \rfloor. \qquad\qquad = \lfloor x \rfloor.$$

よって，$a_0 = b_0$.

また，

$$x = a_0 + \frac{1}{a'_1} = b_0 + \frac{1}{b'_1}$$

であるから，$a'_1 = b'_1$．同様にして，$a_1 = b_1$.

$n \geq 2$ のとき，

$$x = \frac{a'_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a'_n q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{b'_n p_{n-1} + p_{n-2}}{b'_n q_{n-1} + q_{n-2}}.$$

よって，

$$(a'_n p_{n-1} + p_{n-2})(b'_n q_{n-1} + q_{n-2}) = (b'_n p_{n-1} + p_{n-2})(a'_n q_{n-1} + q_{n-2}).$$

$$(a'_n - b'_n)(p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1}) = 0.$$

$$(a'_n - b'_n)(-1)^{n-2} = 0.$$

よって，$a'_n = b'_n$．同様にして，$a_n = b_n$.

ここで，$M > N$ と仮定する．

$n \leq N$ に対して，$a_n = b_n$ であるから，

$$\begin{aligned} x = \frac{p_N}{q_N} &= [b_0, b_1, \cdots, b_N, b_{N+1}, \cdots, b_M] \\ &= [a_0, a_1, \cdots, a_N, b'_{N+1}] \\ &= \frac{b'_{N+1} p_N + p_{N-1}}{b'_{N+1} q_N + q_{N-1}}. \end{aligned}$$

よって，

$$p_N(b'_{N+1} q_N + q_{N-1}) = (b'_{N+1} p_N + p_{N-1}) q_N.$$

$$p_N q_{N-1} = p_{N-1} q_N.$$

$$p_N q_{N-1} - p_{N-1} q_N = 0.$$

しかし，定理 1.2.2 と矛盾する．ゆえに，$M \geq N$.

$M \leq N$ も同様に示せる．

■

1.6　連分数アルゴリズム

x を任意の実数とし，$a_0 = \lfloor x \rfloor$ とすると，

$$x = a_0 + \xi_0 \qquad (0 \leq \xi_0 < 1)$$

と書ける．$\xi \neq 0$ ならば，$\dfrac{1}{\xi_0} = a_1'$，$\lfloor a_1' \rfloor = a_1$ とおくと，

$$a_1' = a_1 + \xi_1 \qquad (0 \leq \xi_1 < 1)$$

と書けて，$\xi_1 \neq 0$ ならば，

$$a_2' = a_2 + \xi_2 \qquad (0 \leq \xi_2 < 1)$$

と書ける．また，$n \geq 1$ に対して，$a_n' = \dfrac{1}{\xi_{n-1}} > 1$ より，$a_n \geq 1$．従って，

$$x = [a_0, a_1'] = \left[a_0, a_1 + \frac{1}{a_2'}\right] = [a_0, a_1, a_2'] = [a_0, a_1, a_2, a_3'] = \cdots .$$

連立方程式

$$\begin{aligned}
x &= a_0 + \xi_0 && (0 \leq \xi_0 < 1), \\
\frac{1}{\xi_0} &= a_1' = a_1 + \xi_1 && (0 \leq \xi_1 < 1), \\
\frac{1}{\xi_1} &= a_2' = a_2 + \xi_2 && (0 \leq \xi_2 < 1), \\
&\vdots
\end{aligned}$$

は連分数アルゴリズムとして知られている．

$\xi_n \neq 0$である限り続く．$\xi_N = 0$となると，アルゴリズムは止まり，

$$x = [a_0, a_1, \cdots, a_N]$$

となる．xは連分数により表わされた．数a'_nたちは連分数の全商である．

定理 1.6.1

任意の有理数は有限連分数で表わすことができる．

(証明)

xが整数ならば，$a_0 = x$, $\xi_0 = 0$.

xが整数でないとき，整数h, k $(k > 1)$により，

$$x = \frac{h}{k}$$

と書ける．$\dfrac{h}{k} = a_0 + \xi_0$より，

$$h = a_0 k + \xi_0 k.$$

$\xi_0 \neq 0$ならば,

$$a'_1 = \frac{1}{\xi_0} = \frac{k}{\xi_0 k} = \frac{k}{k_1} = a_1 + \xi_1.$$

よって,

$$k = a_1 k_1 + \xi_1 k_1.$$

このようにして一連の方程式

$$\begin{aligned} h &= a_0 k + k_1, \\ k &= a_1 k_1 + k_2, \\ k_1 &= a_2 k_2 + k_3, \\ &\vdots \end{aligned}$$

が得られる．このとき，$n \geq 1$に対して,

$$\begin{aligned} k_n &= a_{n+1} k_{n+1} + k_{n+2} \\ &> a_{n+1} k_{n+1} \geq k_{n+1} \end{aligned}$$

が成り立つことより，非負整数 k_n は狭義単調減少である．なので，$k_{N+1}=0$ となる N が存在する．

これより，$\xi_N=0$ となることが分かり，連分数アルゴリズムが止まる．

■

$\xi_N=0$ より，$a'_N=a_N$．また，

$$0<\frac{1}{a_N}=\frac{1}{a'_N}=\xi_{N-1}<1$$

より，$a_N\geq 2$.

ゆえに，連分数アルゴリズムは定理 1.5.3 において示した種類の表示を決定している．また，いつでも定理 1.5.1 にある違った表示ができる．

結果をまとめると，

定理 1.6.2

有理数はちょうど 2 通りの方法で有限単純連分数として表わすことができる．

1 つは偶数個，もう 1 つは奇数個の商をもつ．一方の形では最後の部分商は 1 で，他方では 1 より大きい．

1.7 連分数とその中間近似分数の差

$1<N$ とする．$1\leq n\leq N-1$ に対して，

$$\begin{aligned}
x-\frac{p_n}{q_n}&=\frac{a'_{n+1}p_n+p_{n-1}}{a'_{n+1}q_n+q_{n-1}}-\frac{p_n}{q_n}\\
&=\frac{p_{n-1}q_n-p_nq_{n-1}}{q_n(a'_{n+1}q_n+q_{n-1})}\\
&=\frac{(-1)^n}{q_n(a'_{n+1}q_n+q_{n-1})}.
\end{aligned}$$

また，

$$x-\frac{p_0}{q_0}=x-a_0=\frac{1}{a'_1}.$$

$$q'_1 = a'_1, \qquad q'_n = a'_n q_{n-1} + q_{n-2} \quad (2 \leq n \leq N)$$

と書くと，次が得られる．

定理 1.7.1

$0 \leq n < N$ に対して，

$$x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n q'_{n+1}}.$$

定理 1.7.2

$1 \leq n \leq N$ に対して，$|p_n - q_n x| \leq |p_{n-1} - q_{n-1} x|$.

(証明)

定理 1.7.1 より，$|p_{n-1} - q_{n-1} x| = \dfrac{1}{q'_n}$.
q'_n が狭義単調増加であることを示せばよい．

i) $n = 1$ のとき，

定理 1.5.2 より，$a_1 < a'_1 < a_1 + 1$.

また，$a_1 + 1 < a_2 a_1 + 1 = q_2$.

よって，

$$q_1 < q'_1 < q_2.$$

ii) $1 < n < N - 1$ のとき，

定理 1.5.2 より，$a_n < a'_n < a_n + 1$.

定理 1.4.1，定理 1.4.2 より，$q_{n-1} \geq 1$.

よって，

$$a_n q_{n-1} < a'_n q_{n-1} < (a_n + 1) q_{n-1}.$$

$$a_n q_{n-1} + q_{n-2} < a'_n q_{n-1} + q_{n-2} < (a_n + 1) q_{n-1} + q_{n-2}.$$

$$q_n < q'_n < q_n + q_{n-1}.$$

また，$q_n + q_{n-1} \leq a_{n+1} q_n + q_{n-1} = q_{n+1}$.

ゆえに，

$$q_n < q'_n < q_{n+1}.$$

iii) $n = N-1$ のとき，

I) $a_N \neq 1$ のとき，ii) と同様にして，$q_{N-1} < q'_{N-1} < q_N = q'_N$.

II) $a_N = 1$ のとき，

$$\begin{aligned} q'_{N-1} &= a'_{N-1} q_{N-2} + q_{N-3} \\ &> a_{N-1} q_{N-2} + q_{N-3} \\ &= q_{N-1}. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} q'_{N-1} &= a'_{N-1} q_{N-2} + q_{N-3} \\ &= (a_{N-1}+1) q_{N-2} + q_{N-3} \\ &= a_{N-1} q_{N-2} + q_{N-3} + q_{N-2} \\ &= q_{N-1} + q_{N-2} \\ &= a_N q_{N-1} + q_{N-2} \\ &= q_N = q'_N. \end{aligned}$$

よって，$q_{N-1} < q'_{N-1} = q_N = q'_N$

iv) $n = N$ のとき，$|p_N - q_N x| = 0$.

■

定理 1.7.3

$1 \leq n < N$ に対して，$\left| x - \dfrac{p_n}{q_n} \right| \leq \left| x - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right|.$

定理 1.4.1 と定理 1.7.2 より，明らか.

定理 1.7.4

$0 < n < N$ に対して，$\left| x - \dfrac{p_n}{q_n} \right| \leq \dfrac{1}{q_n q_{n+1}} < \dfrac{1}{q_n^2}.$

(証明)

i) $0 < n < N-1$ のとき，

定理 1.7.2 の証明より，$q_{n+1} < q'_{n+1}$.

定理 1.7.1 より，$\left| x - \dfrac{p_n}{q_n} \right| = \dfrac{1}{q_n q'_{n+1}} < \dfrac{1}{q_n q_{n+1}}$.

定理 1.4.1 より，$\dfrac{1}{q_n q_{n+1}} < \dfrac{1}{q_n^2}$.

ii) $n = N-1$ のとき，$q_N = q'_N$.

定理 1.4.1，定理 1.7.1 より，$\left| x - \dfrac{p_{N-1}}{q_{N-1}} \right| = \dfrac{1}{q_{N-1} q_N} < \dfrac{1}{q_{N-1}^2}$.

■

1.8 無限単純連分数

$n \to \infty$ のとき，$x_n = [a_0, a_1, \cdots, a_n]$ が極限値 x に近付くとすれば，単純連分数 x_n は値 x に収束すると言い，

$$x = [a_0, a_1, a_2, \cdots]$$

と書く.

定理 1.8.1

すべての無限単純連分数は収束する.

(証明)

$x_n = [a_0, a_1, \cdots, a_n]$ で切る．x_n が収束することを示せばよい.

定理 1.3.1，定理 1.3.3 より，

$$x_0 < x_2 < x_4 < \cdots < x_{2i} < \cdots < x_1.$$

$$x_1 > x_3 > x_5 > \cdots > x_{2j-1} > \cdots > x_0.$$

よって，$\{x_{2i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ は上に有界で，$\{x_{2j-1}\}_{j \in \mathbb{N}}$ は下に有界である.

$$\lim_{i \to \infty} x_{2i} = \xi_1, \qquad \lim_{j \to \infty} x_{2j-1} = \xi_2$$

とおく．$\xi_1 \leq \xi_2$.

ここで，定理 1.2.2，定理 1.4.2 より，

$$
\begin{aligned}
|x_{2m} - x_{2m-1}| &= \left| \frac{p_{2m}}{q_{2m}} - \frac{p_{2m-1}}{q_{2m-1}} \right| \\
&= \frac{1}{q_{2m}q_{2m-1}} \\
&\leq \frac{1}{2m(2m-1)} \longrightarrow 0 \qquad (m \to \infty).
\end{aligned}
$$

よって，$\xi_1 = \xi_2$.

■

同時に次も分かった.

定理 1.8.2

$$x_{2m} < x < x_{2n+1}.$$

1.9 無理数の無限連分数表示

$$a'_n = [a_n, a_{n+1}, \cdots]$$

を連分数 $[a_0, a_1, \cdots]$ の n 次の全商という．明らかに,

$$
\begin{aligned}
a'_n &= \lim_{N \to \infty} [a_n, a_{n+1}, \cdots, a_N] \\
&= a_n + \lim_{N \to \infty} \frac{1}{[a_{n+1}, \cdots, a_N]} \\
&= a_n + \frac{1}{a'_{n+1}}.
\end{aligned}
$$

定理 1.9.1

$a_n' = [a_n, a_{n+1}, \cdots]$ ならば，$a_n = \lfloor a_n' \rfloor \quad (0 \leq n)$.

定理 1.5.2 と同様にして示せる．

定理 1.9.2

$[a_0, a_1, \cdots] = [b_0, b_1, \cdots]$ ならば，

$$a_n = b_n \quad (0 \leq n).$$

定理 1.5.3 と同様にして示せる．

ここで，1.6 節の連分数アルゴリズムに戻る．x が無理数のとき，アルゴリズムは停止しない．ゆえに整数の無限列

$$a_0, a_1, a_2, \cdots$$

が定義される．前と同様に

$$x = [a_0, a_1'] = [a_0, a_1, a_2'] = \cdots = [a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}'] = \cdots.$$

よって，

$$x = \frac{a_{n+1}' p_n + p_{n-1}}{a_{n+1}' q_n + q_{n-1}}.$$

ゆえに，

$$x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1}}{q_n (a_{n+1}' q_n + q_{n-1})} = \frac{(-1)^n}{q_n (a_{n+1}' q_n + q_{n-1})}.$$

そして，$n \to \infty$ のとき，

$$\begin{aligned} \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| &< \frac{1}{q_n (a_{n+1} q_n + q_{n-1})} \\ &= \frac{1}{q_n q_{n+1}} \\ &\leq \frac{1}{n(n+1)} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

したがって，

$$x = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots].$$

定理 1.9.2 より一意的である．

定理 1.9.3

任意の無理数は無限単純連分数として，ただ一通りに表わせられる．

x が有理数であれば連分数アルゴリズムは停止するから，無限単純連分数は無理数であることも同時にわかった．

1.7 節と同様に，

$$q'_1 = a'_1, \qquad q'_n = a'_n q_{n-1} + q_{n-2} \quad (2 \leq n)$$

と定めると，次が得られる．

定理 1.9.4

1.7 節での定理は (N について述べた部分を除いて) 無限単純連分数に対しても成立する．特に，

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{{q_n}^2}.$$

1.10 補題

定理 1.10.1

$\zeta > 1$，かつ，P, Q, R, S を

$$Q > S > 0, \qquad PS - QR = \pm 1$$

をみたす整数とし，

$$x = \frac{P\zeta + R}{Q\zeta + S}$$

とする．このとき，$\dfrac{R}{S}$ と $\dfrac{P}{Q}$ は，x の引き続く 2 つの中間近似分数である．

$\dfrac{R}{S} = \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{p_n}{q_n}$ ならば，$\zeta = a'_{n+1}$.

(証明)

$\dfrac{P}{Q} = [a_0, a_1, \cdots, a_n] = \dfrac{p_n}{q_n}$ とおく．

$PS - QR = \pm 1$ となる P, Q, R, S を決める．

このとき，$(P, Q) = 1$ および $Q > 0$ で，p_n と q_n も同じ条件をみたすので，

$$P = p_n, \qquad Q = q_n.$$

次に，

$$PS - QR = p_n S - q_n R = (-1)^{n-1}$$

となる S, R を決める．

定理 1.2.2 より，

$$p_n S - q_n R = (-1)^{n-1} = p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n$$

よって，

$$p_n(S - q_{n-1}) = q_n(R - p_{n-1}).$$

$(p_n, q_n) = 1$ より，

$$q_n | S - q_{n-1}.$$

また，$q_n = Q > S > 0, \qquad q_n \geq q_{n-1} > 0$ より，

$$|S - q_{n-1}| < q_n.$$

よって，$S - q_{n-1} = 0.$

ゆえに,

$$S = q_{n-1}, \qquad R = p_{n-1}.$$

従って,

$$x = \frac{p_n\zeta + p_{n-1}}{q_n\zeta + q_{n-1}},$$

すなわち,

$$x = [a_0, a_1, \cdots, a_n, \zeta].$$

$a_{n+1} = \lfloor \zeta \rfloor$ として,

$$\zeta = [a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots]$$

が得られる.

■

1.11 対等な数

$ad - bc = \pm 1$ をみたす $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ があって，2 つの実数 ξ と η が,

$$\xi = \frac{a\eta + b}{c\eta + d}$$

をみたすとき，ξ は η に対等であるという.

$$\xi = \frac{1 \cdot \xi + 0}{0 \cdot \xi + 1}, \qquad 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1.$$

よって，ξ は自分自身に対等である.

ξ が η に対等ならば,

$$\eta = \frac{-d\xi + b}{c\xi + (-a)}, \qquad (-d)(-a) - bc = ad - bc = \pm 1.$$

よって，η は ξ に対等である．従って，対等関係は対称である．

定理 1.11.1

ξ と η が対等で，η と ζ が対等ならば，ξ と ζ も対等である．

(証明)

ξ と η が対等で，η と ζ が対等であると仮定すると，

$$\xi = \frac{a\eta + b}{c\eta + d}, \qquad ad - bc = \pm 1.$$

$$\eta = \frac{a'\zeta + b'}{c'\zeta + d'}, \qquad a'd' - b'c' = \pm 1.$$

と表わせる．但し，$a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{Z}$.

よって，

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{a\left(\dfrac{a'\zeta + b'}{c'\zeta + d'}\right) + b}{c\left(\dfrac{a'\zeta + b'}{c'\zeta + d'}\right) + d} \\ &= \frac{(aa' + bc')\zeta + ab' + bd'}{(ca' + dc')\zeta + cb' + dd'}. \end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned} (aa' + bc')(cb' + dd') - (ab' + bd')(ca' + dc') &= aa'dd' + bb'cc' - ab'dc' - bd'ca' \\ &= (ad - bc)(a'd' - b'c') \\ &= \pm 1. \end{aligned}$$

■

定理 1.11.1 より，無理数を対等な無理数の類に分けることができる．

$h, k \in \mathbb{Z}$，$(h, k) = 1$ とすると，

$$hk' - h'k = 1$$

となる $h', k' \in \mathbb{Z}$ が存在する．このとき，

$$\frac{h}{k} = \frac{h' \cdot 0 + h}{k' \cdot 0 + k}, \qquad hk' - h'k = 1$$

であるから，任意の有理数 $\dfrac{h}{k}$ は 0 と対等である．定理 1.11.1 より，任意の他の有理数とも対等である．

定理 1.11.2

任意の 2 つの有理数は対等である．

定理 1.11.3

2 つの無理数 ξ と η が対等であるための必要十分条件は,

$$\xi = [a_0, a_1, \cdots, a_m, c_0, c_1, c_2, \cdots],$$
$$\eta = [b_0, b_1, \cdots, b_n, c_0, c_1, c_2, \cdots].$$

(証明)

($\Longleftarrow$)

$$\xi = [a_0, a_1, \cdots, a_m, c_0, c_1, c_2, \cdots],$$
$$\eta = [b_0, b_1, \cdots, b_n, c_0, c_1, c_2, \cdots]$$

と表せるとする．

$$\omega = [c_0, c_1, c_2, \cdots]$$

とおくと，

$$\xi = [a_0, a_1, \cdots, a_m, \omega] = \frac{\omega p_m + p_{m-1}}{\omega q_m + q_{m-1}}.$$

また，$p_m q_{m-1} - p_{m-1} q_m = (-1)^{m-1}$ だから，ξ と ω は対等である．同様に，η と ω も対等である．

定理 1.11.1 より，ξ と η は対等である．

$(\Longrightarrow)$

ξ と η は対等であるとすると，

$$\eta = \frac{a\xi + b}{c\xi + d}, \qquad ad - bc = \pm 1$$

と表わせる．

i) $c\xi + d > 0$ のとき，

$\xi = \dfrac{p_{k-1}a'_k + p_{k-2}}{q_{k-1}a'_k + q_{k-2}}$ とおくと，$a'_k > 1$ で，$\eta = \dfrac{Pa'_k + R}{Qa'_k + S}$．但し，

$$P = ap_{k-1} + bq_{k-1}, \qquad R = ap_{k-2} + bq_{k-2},$$
$$Q = cp_{k-1} + dq_{k-1}, \qquad S = cp_{k-2} + dq_{k-2}.$$

よって，$P, Q, R, S \in \mathbb{Z}$．また，

$$PS - RQ = (ad - bc)(p_{k-1}q_{k-2} - p_{k-2}q_{k-1}) = \pm 1.$$

定理 1.9.4 より，

$$q_{k-1}\xi - p_{k-1} = \frac{(-1)^{k-1}\delta_{k-1}}{q_k} \qquad (0 < \delta_{k-1} < 1),$$
$$q_{k-2}\xi - p_{k-2} = \frac{(-1)^{k-2}\delta_{k-2}}{q_{k-1}} \qquad (0 < \delta_{k-2} < 1)$$

と表せる．$\delta = |(-1)^{k-1}\delta_{k-1}|$，$\delta' = |(-1)^{k-2}\delta_{k-2}|$ とおくと，

$$p_{k-1} = q_{k-1}\xi - \frac{\delta}{q_k}, \qquad p_{k-2} = q_{k-2}\xi - \frac{\delta'}{q_{k-1}}.$$

よって，

$$Q = (c\xi + d)q_{k-1} - \frac{c\delta}{q_k}, \quad S = (c\xi + d)q_{k-2} - \frac{c\delta'}{q_{k-1}}.$$

ここで，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{1}{a_k} = 0$ を示す．

$\forall\epsilon > 0$ とすると，$K > \dfrac{1}{\epsilon}$ となる $K \in \mathbb{Z}$ がある．
$k > K$ に対して，

$$-\epsilon < 0 < \frac{1}{q_k} \leq \frac{1}{k} < \frac{1}{K} < \epsilon.$$

よって，$\left|\dfrac{1}{q_k}\right| < \epsilon.$

$c\xi + d > 0$，$q_{k-2} < q_{k-1}$，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{1}{a_k} = 0$ より，十分大きい k に対して，

$$Q > S > 0.$$

定理 1.10.1 より，ある $b_0, b_1, \cdots, b_l$ に対して，

$$\eta = [b_0, b_1, \cdots, b_l, a'_k] = [b_0, b_1, \cdots, b_l, a_k, a_{k+1}, \cdots].$$

ii) $c\xi + d < 0$ のとき，i) の証明の a, b, c, d の符号を変えたものに置き換えると同様に示せる．

■

1.12　循環連分数

ある固定された正の k とすべての $l \geq L$ に対して，

$$a_l = a_{l+k}$$

となるような連分数を循環連分数という．

部分商の組

$$a_L, a_{L+1}, \cdots, a_{L+k-1}$$

は循環節と呼ばれ，連分数を

$$[a_0, a_1, \cdots, a_{L-1}, \dot{a}_L, a_{L+1}, \cdots, \dot{a}_{L+k-1}]$$

と書き表せる．

定理 1.12.1

循環連分数は 2 次根数，すなわち整数係数の 2 次方程式の無理数解である．

(証明)

a'_L を循環連分数 x の L 次の全商とすると，

$$\begin{aligned} a'_L &= [a_L, a_{L+1}, \cdots, a_{L+k-1}, a_L, \cdots] \\ &= [a_L, a_{L+1}, \cdots, a_{L+k-1}, a'_L] \\ &= \frac{p'a'_L + p''}{q'a'_L + q''}. \end{aligned}$$

よって，$q'(a'_L)^2 + (q'' - p')a'_L - p'' = 0. \cdots ①$

ここで，$\dfrac{p'}{q'}, \dfrac{p''}{q''}$ は $[a_L, a_{L+1}, \cdots, a_{L+k-1}]$ の最後の 2 つの中間近似分数である．

また，

$$x = \frac{p_{L-1}a'_L + p_{L-2}}{q_{L-1}a'_L + q_{L-2}}$$

より，

$$a'_L = \frac{-q_{L-2}x + p_{L-2}}{q_{L-1}x - p_{L-1}}.$$

これを ① に代入すると，

$$q'\left(\frac{-q_{L-2}x + p_{L-2}}{q_{L-1}x - p_{L-1}}\right)^2 + (q'' - p')\left(\frac{-q_{L-2}x + p_{L-2}}{q_{L-1}x - p_{L-1}}\right) - p'' = 0.$$

$$q'(-q_{L-2}x + p_{L-2})^2 + (q'' - p')(-q_{L-2}x + p_{L-2})(q_{L-1}x - p_{L-1}) - p''(q_{L-1}x - p_{L-1})^2 = 0.$$

$$\begin{aligned} &\{q'q_{L-2}^2 - q_{L-1}q_{L-2}(q'' - p') - p''q_{L-1}^2\}x^2 \\ &\quad + \{-2q'q_{L-2}p_{L-2} + (q'' - p')(q_{L-2}p_{L-1} + p_{L-2}q_{L-1}) + 2p''q_{L-1}p_{L-1}\}x \\ &\qquad + \{q'p_{L-2}^2 - (q'' - p')p_{L-2}p_{L-1} - p''p_{L-1}^2\} = 0. \end{aligned}$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
a &= q' q_{L-2}^2 - q_{L-1} q_{L-2}(q'' - p') - p'' q_{L-1}^2, \\
b &= -2q' q_{L-2} p_{L-2} + (q'' - p')(q_{L-2} p_{L-1} + p_{L-2} q_{L-1}) + 2p'' q_{L-1} p_{L-1}, \\
c &= q' p_{L-2}^2 - (q'' - p') p_{L-2} p_{L-1} - p'' p_{L-1}^2
\end{aligned}
$$

とおくと，

$$ax^2 + bx + c = 0$$

が得られる．$a, b, c \in \mathbb{Z}$ で，x は無理数であるから，x は 2 次根数である．

■

定理 1.12.2

2 次根数を表す連分数は循環する．

(証明) x を 2 次根数とすると，$ax^2 + bx + c = 0 \cdots$ ① となる $a, b, c \in \mathbb{Z}$ がある．
また，

$$x = [a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots]$$

とおくと，

$$x = \frac{p_{n-1} a_n' + p_{n-2}}{q_{n-1} a_n' + q_{n-2}}.$$

これを ① に代入すると，

$$A_n {a_n'}^2 + B_n a_n' + C_n = 0.$$

$$
\begin{aligned}
A_n &= a p_{n-1}^2 + b p_{n-1} q_{n-1} + c q_{n-1}^2, \\
B_n &= 2a p_{n-1} p_{n-2} + b(p_{n-1} q_{n-2} + p_{n-2} q_{n-1}) + 2c q_{n-1} q_{n-2}, \\
C_n &= a p_{n-2}^2 + b p_{n-2} q_{n-2} + c q_{n-2}^2
\end{aligned}
$$

が得られる．

もし，$A_n = 0$ とすると，

$$a \left(\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right)^2 + b \left(\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right) + c = 0$$

となり，① が有理数解をもつので，x が 2 次根数であることに矛盾する．

よって，$A_n \neq 0$．また，方程式

$$A_n y^2 + B_n y + c = 0$$

の解の 1 つは a'_n である．

定理 1.9.4 より，

$$p_{n-1} = xq_{n-1} + \frac{\delta_{n-1}}{q_n}, \quad (|\delta_{n-1}| < 1)$$

とおけるので，

$$\begin{aligned}
A_n &= a\left(xq_{n-1} + \frac{\delta_{n-1}}{q_n}\right)^2 + bq_{n-1}\left(xq_{n-1} + \frac{\delta_{n-1}}{q_n}\right) + cq_{n-1}^2 \\
&= (ax^2 + bx + c)q_{n-1}^2 + 2ax \cdot \frac{q_{n-1}}{q_n} + a \cdot \frac{\delta_{n-1}^2}{q_n^2} + b\delta_{n-1} \cdot \frac{q_{n-1}}{q_n} \\
&= 2ax \cdot \frac{q_{n-1}}{q_n} + a \cdot \frac{\delta_{n-1}^2}{q_n^2} + b\delta_{n-1} \cdot \frac{q_{n-1}}{q_n}.
\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}
|A_n| &< \left|2ax \cdot \frac{q_{n-1}}{q_n}\right| + \left|a \cdot \frac{\delta_{n-1}^2}{q_n^2}\right| + \left|b\delta_{n-1} \cdot \frac{q_{n-1}}{q_n}\right| \\
&< 2|ax| + |a| + |b|.
\end{aligned}$$

次に，$C_n = A_{n-1}$ より，

$$|C_n| < 2|ax| + |a| + |b|.$$

最後に，

$$\begin{aligned}
B_n^2 - 4A_nC_n &= (b^2 - 4ac)(p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}p_{n-1})^2 \\
&= b^2 - 4ac
\end{aligned}$$

より，

$$\begin{aligned}
B_n^2 &\leq 4|A_nC_n| + |b^2 - 4ac| \\
&< 4(2|ax| + |a| + |b|)^2 + |b^2 - 4ac|.
\end{aligned}$$

よって，A_n, B_n, C_n の絶対値は，n によらない数より小さい．

したがって，相異なる (A_n, B_n, C_n) の組は有限個しかない．なので，

$$\begin{aligned}(A, B, C) &= (A_{n_1}, B_{n_1}, C_{n_1}),\\ &= (A_{n_2}, B_{n_2}, C_{n_2}),\\ &= (A_{n_3}, B_{n_3}, C_{n_3})\end{aligned}$$

となる n_1, n_2, n_3 がある．ゆえに，$a'_{n_1}, a'_{n_2}, a'_{n_3}$ は，

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

の解であり，少なくとも 2 つは等しい．

もし $a'_{n_1} = a'_{n_2}$ ならば，

$$a_{n_1} = a_{n_2}, \quad a_{n_1+1} = a_{n_2+1}, \cdots$$

が成り立つので，連分数は循環する．

■

1.13 中間近似分数による近似

$\dfrac{p_n}{q_n}$ は，分母が q_n を越えないすべての分数の中で，x との誤差が最小な分数であることを示す．このような分数を，最良近似分数という．

定理 1.13.1

$n>1,\ 0<q<q_n,\ \dfrac{p}{q} \neq \dfrac{p_n}{q_n}$ ならば,

$$\left|\frac{p_n}{q_n}-x\right| < \left|\frac{p}{q}-x\right|.$$

これは次のより強い定理に含まれる．

定理 1.13.2

$n>1,\ 0<q\leq q_n,\ \dfrac{p}{q} \neq \dfrac{p_n}{q_n}$ ならば,

$$|p_n-q_nx| < |p-qx|.$$

(証明)

$(p,\ q)=1$ と仮定する．定理 1.9.4 より,

$$|p_n-q_nx| < |p_{n-1}-q_{n-1}x|$$

であるから，$q_{n-1}<q\leq q_n$ という仮定の下で定理を証明すればよい．

i) $q=q_n$ のとき，$p\neq p_n$ で，$p,\ p_n\in\mathbb{Z}$ より,

$$\left|\frac{p_n}{q_n}-\frac{p}{q}\right| = \left|\frac{p_n-p}{q_n}\right| \geq \frac{1}{q_n}.$$

定理 1.9.4 と定理 1.4.2 より,

$$\left|\frac{p_n}{q_n}-x\right| \leq \frac{1}{q_nq_{n+1}} < \frac{1}{q_n(n+1)} < \frac{1}{2q_n}.$$

また，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{q_n} &\leq \left| \frac{p_n}{q_n} - x + x - \frac{p}{q} \right| \\
&\leq \left| \frac{p_n}{q_n} - x \right| + \left| x - \frac{p}{q} \right| \\
&< \frac{1}{2q_n} + \left| \frac{p}{q} - x \right|
\end{aligned}
$$

より，

$$
\frac{1}{2q_n} < \left| \frac{p}{q} - x \right|.
$$

以上より，

$$
\left| \frac{p_n}{q_n} - x \right| < \left| \frac{p}{q} - x \right|.
$$

ii) $q_{n-1} < q < q_n$ のとき，

$$
p = \mu p_n + \nu p_{n-1}, \qquad q = \mu q_n + \nu q_{n-1}
$$

とすると，

$$
\begin{aligned}
\mu(p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n) &= (p - \nu p_{n-1}) q_{n-1} - (q - \nu q_{n-1}) p_{n-1} \\
&= p q_{n-1} - q p_{n-1}.
\end{aligned}
$$

よって，

$$
\mu = \pm (p q_{n-1} - q p_{n-1}).
$$

同様に，$\nu = \pm (p q_n - q p_n)$.

ゆえに，$\mu,\ \nu \in \mathbb{Z},\ \mu \neq 0,\ \nu \neq 0$.

$0 < q = \mu q_n + \nu q_{n-1} < q_n$ より，μ と ν の符号は逆でなければならない.

もし，$\mu > 0,\ \nu > 0$ ならば，$\mu q_n + \nu q_{n-1} > q_n$ となり，$\mu < 0,\ \nu < 0$ ならば，$\mu q_n + \nu q_{n-1} < 0$ となり，どちらも矛盾する.

定理 1.9.4 より，

$$p_n - q_n x, \qquad p_{n-1} - q_{n-1} x$$

は逆の符号をもつので，

$$\mu(p_n - q_n x), \qquad \nu(p_{n-1} - q_{n-1})$$

は同じ符号をもつ．よって，

$$\begin{aligned}
|p - qx| &= |\mu(p_n - q_n x) + \nu(p_{n-1} - q_{n-1} x)| \\
&= |\mu(p_n - q_n x)| + |\nu(p_{n-1} - q_{n-1} x)| \\
&> |\nu(p_{n-1} - q_{n-1} x)| \\
&> |p_{n-1} - q_{n-1} x| \\
&> |p_n - q_n x|.
\end{aligned}$$

■

定理 1.13.3

x の任意の 2 つの引き続く中間近似分数のうち，少なくとも 1 つは

$$\left|\frac{p}{q} - x\right| < \frac{1}{2q^2} \cdots ①$$

を満たす.

(証明)

中間近似分数は x より小さいか大きいかを繰り返すので，

$$\left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\frac{p_n}{q_n} - x\right| + \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - x\right|.$$

$\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, $\dfrac{p_n}{q_n}$ のどちらも ① をみたさないと仮定すると，

$$\frac{1}{q_n q_{n+1}} = \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{1}{2q_{n+1}^2} + \frac{1}{2q_n^2},$$

すなわち，

$$(q_{n+1} - q_n)^2 \leq 0.$$

これは，$q_{n+1} = q_n$，すなわち $n = 0,\ a_1 = 1.\ q_1 = q_0 = 1 \cdots$ ② のときしか成り立たない.

よって，② でないとき，

$$(q_{n+1} - q_n)^2 < 0$$

となり矛盾する.

② のとき，

$$\begin{aligned} 0 < \frac{p_1}{q_1} &< \frac{1}{q_1 q_2} \\ &= \frac{1}{q_2} \\ &\leq \frac{1}{2} = \frac{1}{2q_1^2}. \end{aligned}$$

■

定理 1.13.4

$$\left| \frac{p}{q} - x \right| < \frac{1}{2q^2}$$

ならば，$\dfrac{p}{q}$ は x の中間近似分数である.

(証明)

q_n は狭義単調増加なので，$q_n \leq q < q_{n+1}$ となる n がある.

このとき，

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p}{q}\right| &\leq \left|\frac{p}{q} - x\right| + \left|\frac{p_n}{q_n} - x\right| \\
&= \frac{1}{q}|p - qx| + \frac{1}{q_n}|p_n - q_n x| \\
&< \frac{1}{q}|p - qx| + \frac{1}{q_n}|p - qx| \\
&< \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q_n}\right) \cdot \frac{1}{2q} \\
&= \frac{1}{qq_n} \cdot \frac{q + q_n}{2q} \\
&< \frac{1}{qq_n}.
\end{aligned}
$$

よって，

$$|p_n q - p q_n| < 1.$$

$p_n q - p q_n \in \mathbb{Z}$だから，$p_n q - p q_n = 0$．ゆえに，$\dfrac{p}{q} = \dfrac{p_n}{q_n}$.

■

2　減少型連分数

2.1　有限減少型連分数

$N+1$ 個の変数

$$v_0, v_1, \ldots, v_n, \ldots, v_N$$

の関数

$$v_0 - \cfrac{1}{v_1 - \cfrac{1}{v_2 - \cfrac{}{\ddots - \cfrac{1}{v_{N-1} - \cfrac{1}{v_N}}}}} \tag{2.1.1}$$

を有限減少型連分数，または，減少型連分数という．

式 (2.1.1) を次の 2 つの形のいずれかで書き表す．

$$v_0 - \frac{1}{v_1-}\frac{1}{v_2-}\cdots\frac{1}{v_N},\ \text{または，}\langle v_0, v_1, v_2, \cdots, v_N\rangle.$$

$v_0, v_1, \cdots, v_N$ たちを減少型連分数の部分商，または商という．

計算により次がわかる．

$$\langle v_0\rangle = \frac{v_0}{1}, \qquad \langle v_0, v_1\rangle = \frac{v_0 v_1 - 1}{v_1}, \qquad \langle v_0, v_1, v_2\rangle = \frac{v_2 v_1 v_0 - v_2 - v_0}{v_2 v_1 - 1}.$$

また，$1 \le n \le N$ に対して明らかに次が成り立つ．

$$\langle v_0, v_1\rangle = v_0 - \frac{1}{v_1}, \tag{2.1.2}$$

$$\langle v_0, v_1, \cdots, v_{n-1}, v_n\rangle = \left\langle v_0, v_1, \cdots, v_{n-1} - \frac{1}{v_n}\right\rangle, \tag{2.1.3}$$

$$\langle v_0, v_1, \cdots, v_n\rangle = v_0 - \frac{1}{\langle v_1, v_2, \cdots, v_n\rangle} = \langle v_0, \langle v_1, v_2, \cdots, v_n\rangle\rangle. \tag{2.1.4}$$

より一般に，$1 \le m < n \le N$ に対して，次が成り立つ．

$$\langle v_0, v_1, \cdots, v_n\rangle = \langle v_0, v_1, \cdots, v_{m-1}, \langle v_m, v_{m+1}, \cdots, v_n\rangle\rangle. \tag{2.1.5}$$

2.2　減少型連分数の中間近似分数

$0 \le n \le N$ を満たす n に対して,

$$\langle v_0, v_1, \ldots, v_n \rangle$$

を $\langle v_0, v_1, \ldots, v_N \rangle$ の n 次中間近似分数という.

P_n と Q_n を次のように定義する.

$$P_0 = v_0, \qquad P_1 = v_1 v_0 - 1, \qquad P_n = v_n P_{n-1} - P_{n-2}, \qquad (2 \le n \le N).$$

$$Q_0 = 1, \qquad Q_1 = v_1, \qquad Q_n = v_n Q_{n-1} - Q_{n-2}, \qquad (2 \le n \le N).$$

定理 2.2.1

$$\langle v_0, v_1, \ldots, v_n \rangle = \frac{P_n}{Q_n}.$$

(証明)

i) $n = 0$ と $n = 1$ のときは，既に証明した.

ii) n のとき成り立つと仮定すると,

$$\begin{aligned}
\langle v_0, v_1, \cdots, v_n, v_{n+1} \rangle &= \left\langle v_0, v_1, \cdots, v_{n-1}, v_n - \frac{1}{v_{n+1}} \right\rangle \\
&= \frac{\left(v_n - \dfrac{1}{v_{n+1}} \right) P_{n-1} - P_{n-2}}{\left(v_n - \dfrac{1}{v_{n+1}} \right) Q_{n-1} - Q_{n-2}} \\
&= \frac{v_{n+1}(v_n P_{n-1} - P_{n-2}) - P_{n-1}}{v_{n+1}(v_n Q_{n-1} - Q_{n-2}) - Q_{n-1}} \\
&= \frac{v_{n+1} P_n - P_{n-1}}{v_{n+1} Q_n - Q_{n-1}} \\
&= \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}.
\end{aligned}$$

■

定理 2.2.2

$1 \leq n \leq N$ なる任意の n に対して,

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = -1,$$

すなわち,

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = -\frac{1}{Q_n Q_{n-1}}.$$

(証明)

$$\begin{aligned}
P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n &= (v_n P_{n-1} - P_{n-2}) Q_{n-1} - P_{n-1}(v_n Q_{n-1} - Q_{n-2}) \\
&= P_{n-1} Q_{n-2} - P_{n-2} Q_{n-1} \\
&= \cdots \\
&= P_1 Q_0 - P_0 Q_1 \\
&= (v_0 v_1 - 1) - v_0 v_1 \\
&= -1.
\end{aligned}$$

■

定理 2.2.3

$2 \leq n \leq N$ なる任意の n に対して,

$$P_n Q_{n-2} - P_{n-2} Q_n = -v_n,$$

すなわち,

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}} = -\frac{v_n}{Q_n Q_{n-2}}.$$

(証明)

$$\begin{aligned}
P_n Q_{n-2} - P_{n-2} Q_n &= (v_n P_{n-1} - P_{n-2}) Q_{n-2} - P_{n-2}(v_n Q_{n-1} - Q_{n-2}) \\
&= v_n (P_{n-1} Q_{n-2} - P_{n-2} Q_{n-1}) \\
&= -v_n.
\end{aligned}$$

■

2.3 正の商を持つ減少型連分数

v_0 に整数，$v_1, v_2, \cdots, v_N$ に 2 以上の整数が割り当てられているとき，減少型連分数 $\langle v_0, v_1, \cdots, v_N \rangle$ は単純であるという．以下，各 n に対し，P_n，Q_n はそこに含まれる変数 $v_0, v_1, \cdots, v_N$ に割り当てられた数を代入した結果を表わすとする．明らかに，P_n，Q_n は整数である．また，$x_n = \dfrac{P_n}{Q_n}$ とする．以下，前節までの変数 $v_0, v_1, \cdots, v_N$ よりなる多項式 P_n，Q_n と数を代入した値 P_n，Q_n は区別せず，混用する．

(2.1.5) より，$2 \leq n \leq N$ に対して次が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
x &= \langle v_0, v_1, \cdots, v_N \rangle \\
&= \langle v_0, v_1, \cdots, v_{n-1}, \langle v_n, v_{n+1}, \cdots, v_N \rangle \rangle \\
&= \frac{\langle v_n, v_{n+1}, \cdots, v_N \rangle P_{n-1} - P_{n-2}}{\langle v_n, v_{n+1}, \cdots, v_N \rangle Q_{n-1} - Q_{n-2}}.
\end{aligned}
\tag{2.3.1}
$$

定理 2.3.1

x_n は n について狭義単調減少である．

(証明)

補題を示す.

補題 2.3.2

$$Q_n > 0 \qquad (n = 0, 1, \cdots, N).$$

$$
\begin{aligned}
Q_N - Q_{N-1} &= (v_N Q_{N-1} - Q_{N-2}) - Q_{N-1} \\
&= (v_N - 1) Q_{N-1} - Q_{N-2} \\
&\geq Q_{N-1} - Q_{N-2} \\
&\geq \cdots \\
&\geq Q_1 - Q_0 = v_1 - 1 > 0.
\end{aligned}
$$

よって，$Q_N > Q_{N-1} > \cdots > Q_0 = 1 > 0.$

定理 2.3.1 を示す.

$$
\begin{aligned}
x_n - x_{n-1} &= \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \\
&= -\frac{1}{Q_n Q_{n-1}} < 0.
\end{aligned}
$$

■

定理 2.3.1 より，次のことが分かる.

定理 2.3.3

$0 \leq n \leq N$ なる n に対して，$x_N < x_n$.

2.4 単純減少型連分数

$x = x_N \left(= \dfrac{P_N}{Q_N} \right)$ とする．このとき，数 x は減少型連分数 $\langle v_0, v_1, \cdots, v_N \rangle$ で表わされるという.

定理 2.4.1

$1 \leq n$ に対して，$Q_{n-1} < Q_n$.

補題 2.3.2 より 明らか.

定理 2.4.2

$n \geq 0$ に対して，$Q_n > n$.

(証明)

i) $n = 0$ のとき，$Q_0 = 1 > 0$.

ii) n のとき成り立つと仮定すると，$Q_n > n$，すなわち，$Q_n \geq n + 1$.

$n + 1$ のときについて考える.

$Q_{n+1} > Q_n$ より，$Q_{n+1} > n + 1$.

■

定理 2.4.3

$\dfrac{P_n}{Q_n}$ は既約分数である.

(証明)

$d \mid P_n$, $d \mid Q_n$ となる $d \neq \pm 1,\ d \in \mathbb{Z}$ があると仮定する.

定理 2.2.2 より, $d \mid P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = -1$.

しかし、$d \neq \pm 1$ と矛盾する.

■

2.5 既約分数の単純減少型連分数表示

$0 \leq n \leq N$ を満たす n に対して,

$$v'_n = \langle v_n, v_{n+1}, \cdots, v_N \rangle$$

を $\langle v_0, v_1, \cdots, v_N \rangle$ の n 次の全商という.

例)

$$x = v'_0, \qquad x = \frac{v'_1 v_0 - 1}{v'_1}.$$

そして, 式 (2.3.1) より,

$$x = \frac{v'_n P_{n-1} - P_{n-2}}{v'_n Q_{n-1} - Q_{n-2}} \qquad (2 \leq n \leq N).$$

定理 2.5.1

$$v_n = \lceil v'_n \rceil.$$

(証明)

補題 2.5.2

$$\langle v_1, v_2, \cdots, v_n \rangle > 1.$$

i) $n = 1$ のとき, $\langle v_1 \rangle = v_1 > 1$.

ii) $n=2$ のとき,

$\langle v_1, v_2\rangle \le 1$ と仮定すると，$\dfrac{1}{v_2}+1 \ge v_1 \ge 2.$

よって，$\dfrac{1}{v_2} \ge 1$，すなわち，$v_2 \ge 1.$

しかし，$v_2 > 1$ と矛盾する.

iii) n のとき，成り立つと仮定する．$n+1$ のときについて考える.

帰納法の仮定より,

$$\langle v_2, v_3, \cdots, v_n, v_{n+1}\rangle > 1.$$

よって,

$$\frac{1}{\langle v_2, v_3, \cdots, v_n, v_{n+1}\rangle} < 1.$$

ゆえに,

$$\begin{aligned} v_1 - \frac{1}{\langle v_2, v_3, \cdots, v_n, v_{n+1}\rangle} &> v_1 - 1 \\ &\ge 2 - 1 = 1. \end{aligned}$$

定理 2.5.1 を示す.

補題 2.5.2 より,

$$v'_{n+1} = \langle v_{n+1}, v_{n+2}, \cdots, v_N\rangle > 1 \qquad (n \ge 0).$$

よって,

$$v_n - 1 < v_n - \frac{1}{v'_{n+1}} < v_n.$$

ゆえに,

$$v_n - 1 < v'_n < v_n.$$

従って,

$$\lceil v'_n \rceil = v_n.$$

■

定理 2.5.3

$$\langle v_0, v_1, \cdots, v_M \rangle = \langle w_0, w_1, \cdots, w_N \rangle$$

ならば，$M = N$ で，かつ，

$$v_i = w_i \qquad (0 \leq i \leq M).$$

(証明)

$x = \langle v_0, v_1, \cdots, v_M \rangle = \langle w_0, w_1, \cdots, w_N \rangle$ とおく．

$$\lceil x \rceil = \lceil v_0' \rceil = v_0.$$

同様に，$\lceil x \rceil = w_0$．よって，$v_0 = w_0$．

ゆえに，

$$x = v_0 - \frac{1}{v_1'} = w_0 - \frac{1}{w_1'}$$

なので，

$$v_1' = w_1'.$$

従って，

$$v_1 = \lceil v_1' \rceil = \lceil w_1' \rceil = w_1.$$

ここで，$M < N$ と仮定する．

上の操作を繰り返すと，

$$w_M' = v_M' = v_M$$

となるから，

$$\begin{aligned} v_M &= w_M' \\ &= w_M - \frac{1}{w_{M+1}'}. \end{aligned}$$

よって，

$$\frac{1}{w_{M+1}'} = 0.$$

しかし，$w_{M+1}' > 1$ と矛盾するので，$M \geq N$．同様にして，$M \leq N$．

■

2.6　減少型連分数アルゴリズム

$x \in \mathbb{R}$，$v_0 = \lceil x \rceil$ とすると，

$$x = v_0 - \xi_0 \qquad (0 \leq \xi_0 < 1)$$

と書ける．$\xi_0 \neq 0$ ならば,

$$\frac{1}{\xi_0} = v_1', \qquad \lceil v_1' \rceil = v_1, \qquad v_1' = v_1 - \xi_1 \qquad (0 \leq \xi_1 < 1)$$

と書ける．$\xi \neq 0$ ならば,

$$\frac{1}{\xi_1} = v_2' = v_2 - \xi_2 \qquad (0 \leq \xi_2 < 1)$$

と書ける．また，$n \geq 1$ に対して，$v_n' = \dfrac{1}{\xi_{n-1}}$ より，$v_n \geq 2$ である．従って，

$$x = \langle v_0, v_1' \rangle = \left\langle v_0, \left(v_1 - \frac{1}{v_2'} \right) \right\rangle = \langle v_0, v_1, v_2' \rangle = \cdots .$$

連立方程式

$$\begin{aligned}
& x = v_0 - \xi_0 && (0 \leq \xi_0 < 1), \\
& \frac{1}{\xi_0} = v_1' = v_1 - \xi_1 && (0 \leq \xi_1 < 1), \\
& \frac{1}{\xi_1} = v_2' = v_2 - \xi_2 && (0 \leq \xi_2 < 1), \\
& \quad \vdots
\end{aligned}$$

を減少型連分数アルゴリズムと呼ぼう．

アルゴリズムは，$\xi_n \neq 0$ である限り続く．$\xi_N = 0$ となると，アルゴリズムは止まり,

$$x = \langle v_0, v_1, \cdots, v_N \rangle$$

となる．この場合，x は減少型連分数により表わされ，有理数である．数 v_n' たちは減少型連分数の全商である．

定理 2.6.1

任意の有理数は，有限減少型連分数で表わされる．

(証明)

$x \in \mathbb{R}$ とする．

i) $x \in \mathbb{Z}$ のとき,

$\xi_0 = 0$ で, $v_0 = x$.

ii) $x \notin \mathbb{Z}$ のとき,

$h, k \in \mathbb{Z}$，$k > 1$ を使って,

$$x = \frac{h}{k}$$

とおける．$\dfrac{h}{k} = v_0 - \xi_0$ より,

$$h = v_0 k - \xi_0 k.$$

$k_1 = \xi_0 k$ とおく．$\xi_0 \neq 0$ ならば,

$$v_1' = \frac{1}{\xi_0} = \frac{k}{k_1} = v_1 - \xi_1.$$

よって,

$$k = v_1 k_1 - \xi_1 k_1.$$

このようにして，一連の方程式

$$\begin{aligned} h &= v_0 k - \xi_0 k, \\ k &= v_1 k_1 - \xi_1 k_1, \\ k_1 &= v_2 k_2 - \xi_2 k_2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

が得られる．この列は，$\xi_n \neq 0$，すなわち，$k_{n+1} \neq 0$ である限り続く．

ここで，非負整数 $k, k_1, k_2, \cdots$ は狭義単調減少であることを示す.

I) $n=1$ のとき,

$v_1-\xi_1>1$ より，$k=(v_1-\xi_1)k_1>k_1$.

II) n のとき成り立つと仮定すると，$k_n>k_{n+1}$ であるから,

$$k_{n+1}=(v_{n+2}-\xi_{n+2})k_{n+2}>k_{n+2}.$$

よって，ある N に対して，$k_{N+1}=0$ となる.

ゆえに，$\xi_N=0$ となり，アルゴリズムは止まる.

■

$\xi_N=0$ より，$v'_N=v_N$ だから,

$$0<\frac{1}{v_N}=\frac{1}{v'_N}=\xi_{N-1}<1$$

よって，$v_N\geq 2$.

2.7 減少型連分数とその中間近似分数の差

$N>1$ とする．$1\leq n\leq N-1$ に対して,

$$\begin{aligned}x-\frac{P_n}{Q_n}&=\frac{v'_{n+1}P_n-P_{n-1}}{v'_{n+1}Q_n-Q_{n-1}}-\frac{P_n}{Q_n}\\&=\frac{P_nQ_{n-1}-P_{n-1}Q_n}{Q_n(v'_{n+1}Q_n-Q_{n-1})}\\&=\frac{-1}{Q_n(v'_{n+1}Q_n-Q_{n-1})}.\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}x-\frac{P_0}{Q_0}&=x-v_0\\&=-\frac{1}{v'_1}.\end{aligned}$$

$$Q'_1 = v'_1, \qquad Q'_n = v'_n Q_{n-1} - Q_{n-2} \qquad (1 < n \leq N)$$

と書くと，次が得られる．

定理 2.7.1

$1 \leq n \leq N-1$ に対して，

$$x - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{-1}{Q_n Q'_{n+1}}.$$

定理 2.7.2

$1 \leq n \leq N$ に対して，$|P_n - Q_n x| < |P_{n-1} - Q_{n-1}x|$.

(証明)

定理 2.7.1 より，$|P_{n-1} - Q_{n-1}x| = \dfrac{1}{Q'_n}$.
Q'_n が狭義単調増加であることを示せばよい．

i) $n = 1$ のとき，

$$\begin{aligned}
Q'_2 &= v'_2 Q_1 - Q_0 \\
&= v'_2 v_1 - 1 \\
&= v'_2 \left(v_1 - \frac{1}{v'_2} \right) \\
&= v'_2 v'_1 \\
&= v'_2 Q'_1 > Q'_1.
\end{aligned}$$

ii) $2 \leq n \leq N-1$ のとき，

$$\begin{aligned}
Q'_{n+1} &= v'_{n+1}Q_n - Q_{n-1} \\
&= v'_{n+1}\left(Q_n - \frac{Q_{n-1}}{v'_{n+1}}\right) \\
&= v'_{n+1}\left(v_nQ_{n-1} - Q_{n-2} - \frac{Q_{n-1}}{v'_{n+1}}\right) \\
&= v'_{n+1}\left\{\left(v_n - \frac{1}{v'_{n+1}}\right)Q_{n-1} - Q_{n-2}\right\} \\
&= v'_{n+1}(v'_nQ_{n-1} - Q_{n-2}) \\
&= v'_{n+1}Q'_n > Q'_n.
\end{aligned}$$

iii) $n = N$ のとき，$|P_N - Q_Nx| = 0$.

■

定理 2.7.3

$1 \leq n \leq N$ に対して，$\left|x - \dfrac{P_n}{Q_n}\right| < \left|x - \dfrac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right|$.

定理 2.4.1 と定理 2.7.2 より，明らか.

定理 2.7.4

$0 < n < N$ に対して，

$$\left|\frac{P_n}{Q_n} - x\right| < \frac{1}{Q'_nQ'_{n+1}} < \left(\frac{1}{Q'_n}\right)^2.$$

(証明)

$0 < n < N$ とする.

$$\begin{aligned}
Q_1' &= v_1' < v_1 = Q_1. \\
Q_n' &= v_n' Q_{n-1} - Q_{n-2} \\
&< v_n Q_{n-1} - Q_{n-2} \\
&= Q_n.
\end{aligned}$$

定理 2.7.1 より, $\left|\dfrac{P_n}{Q_n} - x\right| = \dfrac{1}{Q_n Q_{n+1}'} < \dfrac{1}{Q_n' Q_{n+1}'}$.

定理 2.7.2 の証明より, $\dfrac{1}{Q_n' Q_{n+1}'} < \left(\dfrac{1}{Q_n'}\right)^2$.

■

2.8 無限単純減少型連分数

$n \to \infty$ のとき, $x_n = \langle v_0, v_1, v_2, \cdots, v_n \rangle$ が極限値 x に近づくとすれば, 単純減少型連分数 x_n は値 x に収束すると言い,

$$x = \langle v_0, v_1, v_2, \cdots \rangle$$

と書く.

定理 2.8.1

すべての無限単純減少型連分数は収束する.

(証明)

定理 2.3.1 より x_n は狭義単調減少で, $v_{n+1}' > 1$ より,

$$x_n = v_0 - \frac{1}{v_1'} > v_0 - 1.$$

■

2.9　無理数の無限単純減少型連分数表示

$$v_n' = \langle v_n, v_{n+1}, \cdots \rangle$$

を減少型連分数 $x = \langle v_0, v_1, \cdots \rangle$ の n 次の全商という．明らかに，

$$\begin{aligned} v_n' &= \lim_{N\to\infty} \langle v_n, v_{n+1}, \cdots, v_N \rangle \\ &= v_n - \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\langle v_{n+1}, v_{n+2}, \cdots, v_N \rangle} \\ &= v_n - \frac{1}{v_{n+1}'}. \end{aligned}$$

定理 2.9.1

$v_n' = \langle v_n, v_{n+1}, v_{n+2}, \cdots \rangle$ ならば，$v_n = \lceil v_n' \rceil \qquad (n \geq 0)$.

定理 2.5.1 と同様にして示せる．

定理 2.9.2

$\langle v_0, v_1, \cdots \rangle = \langle w_0, w_1, \cdots \rangle$ ならば，

$$v_n = w_n \quad (0 \leq n).$$

定理 2.5.3 と同様に示せる．

ここで，2.6 節の減少型連分数アルゴリズムに戻る．

x が無理数のとき，アルゴリズムは停止しない．ゆえに，整数の無限列

$$v_0, v_1, v_2, \cdots$$

が定義される．そして前と同様に

$$x = \langle v_0, v_1' \rangle = \cdots = \langle v_0, v_1, v_2, \cdots, v_n, v_{n+1}' \rangle = \cdots$$

となる．よって，

$$x = \frac{v_{n+1}' P_n - P_{n-1}}{v_{n+1}' Q_n - Q_{n-1}}.$$

ゆえに,

$$
\begin{aligned}
x - \frac{P_n}{Q_n} &= \frac{P_{n-1}Q_n - P_nQ_{n-1}}{Q_n(v'_{n+1}Q_n - Q_{n-1})} \\
&= \frac{-1}{Q_n(v'_{n+1}Q_n - Q_{n-1})}.
\end{aligned}
$$

そして, $n \to \infty$ のとき,

$$
\left|\frac{P_n}{Q_n} - x\right| < \left(\frac{1}{Q'_n}\right)^2 \longrightarrow 0
$$

となる. 従って,

$$
x = \lim_{N\to\infty} \frac{P_n}{Q_n} = \langle v_0, v_1, v_2, \cdots \rangle.
$$

定理 2.9.2 より一意的である.

定理 2.9.3

任意の無理数は無限単純減少型連分数としてただ一通りに表わすことができる.

x が有理数であれば減少型連分数アルゴリズムは停止するから, 無限単純減少型連分数は無理数であることも同時にわかった.

2.7 節と同様に,

$$
Q'_1 = v'_1, \qquad Q'_n = v'_n Q_{n-1} - Q_{n-2} \quad (2 \le n)
$$

と定めると, 次が得られる.

定理 2.9.4

2.7 節での定理は無限単純減少型連分数に対しても成立する.

2.10 補題

定理 2.10.1

$\zeta \in \mathbb{R},\ \zeta > 1$，かつ P, Q, R, S を

$$Q > S > 0, \qquad PS - QR = -1$$

も満たす整数とし，

$$x = \frac{P\zeta - R}{Q\zeta - S}$$

とする．このとき，$\dfrac{R}{S}$ と $\dfrac{P}{Q}$ は x の引き続く 2 つの中間近似分数である．

$\dfrac{R}{S} = \dfrac{P_{n-1}}{Q_{n-1}},\ \dfrac{P}{Q} = \dfrac{P_n}{Q_n}$ ならば，$\zeta = v'_{n+1}$.

(証明)

$\dfrac{P}{Q} = \langle v_0, v_1, v_2, \cdots, v_n \rangle = \dfrac{P_n}{Q_n}$ とおく．

$PS - QR = -1$ より，$(P,\ Q) = 1$ で，また，$Q > 0$.

そして，$(P_n,\ Q_n) = 1$，$Q_n > 0$ であるから，

$$P = P_n, \qquad Q = Q_n.$$

次に，$R = P_{n-1}$，$S = Q_{n-1}$ を示す.

$P_nQ_{n-1} - P_{n-1}Q_n = -1$ より，

$$PS - QR = P_nQ_{n-1} - P_{n-1}Q_n.$$

$P = P_n,\ Q = Q_n$ より，

$$P_n(S - Q_{n-1}) = Q_n(R - P_{n-1}).$$

$(P_n,\ Q_n) = 1$ より，

$$Q_n | S - Q_{n-1}.$$

しかし，$Q = Q_n > S > 0$，$Q_n > Q_{n-1} > 0$ より，

$$-Q_n < S - Q_{n-1} < Q_n$$

であるから，$S-Q_{n-1}=0$.

よって，

$$S=Q_{n-1}, \qquad R=P_{n-1}.$$

ゆえに，

$$\begin{aligned} x=\frac{P\zeta-R}{Q\zeta-S}&=\frac{P_n\zeta-P_{n-1}}{Q_n\zeta-Q_{n-1}} \\ &=\langle v_0, v_1, v_2, \cdots v_{n-1}, v_n, \zeta\rangle. \end{aligned}$$

$v_{n+1}=\lceil\zeta\rceil$ として，

$$\zeta=\langle v_{n+1}, v_{n+2}, \cdots\rangle$$

が得られる.

■

2.11 対等な数

$a,b,c,d\in\mathbb{Z}$，$ad-bc=-1$，$c>d$ とする.

$\xi,\eta\in\mathbb{R}$ が，

$$\xi=\frac{a\eta-b}{c\eta-d}$$

を満たすとき，ξ は η に対等であるという.

$$\xi=\frac{1\cdot\xi-0}{0\cdot\xi-(-1)}, \qquad 1\cdot(-1)-0\cdot0=-1.$$

よって，ξ は自分自身に対等である．また，ξ が η に対等ならば，

$$\eta=\frac{d\xi-b}{c\xi-a}, \qquad d\cdot a-b\cdot c=ad-bc=-1.$$

よって，η は ξ に対等である.

定理 2.11.1

ξ と η が対等で，η と ζ が対等ならば，ξ と ζ も対等である.

(証明)

$ad-bc=-1,\ a'd'-b'c'=-1$ とする．仮定より，

$$\xi=\frac{a\eta-b}{c\eta-d},\qquad \eta=\frac{a'\zeta-b'}{c'\zeta-d'}$$

と表せる．よって，

$$\begin{aligned}
\xi&=\frac{a\left(\dfrac{a'\zeta-b'}{c'\zeta-d'}\right)-b}{c\left(\dfrac{a'\zeta-b'}{c'\zeta-d'}\right)-d}\\
&=\frac{a(a'\zeta-b')-b(c'\zeta-d')}{c(a'\zeta-b')-d(c'\zeta-d'}\\
&=\frac{(aa'-bc')\zeta-(ab'-bd')}{(ca'-dc')\zeta-(cb'-dd')}.
\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}
&(aa'-bc')(cb'-dd')-(ab'-bd')(ca'-dc')\\
&=(aca'b'-ada'd'-bcb'c+bdc'd')-(aca'b'-adb'c'-bca'd'+bdc'd')\\
&=-ada'd'-bcb'c+adb'c'+bca'd'\\
&=-(ad-bc)(a'd'-b'c')\\
&=-1.
\end{aligned}$$

■

定理 2.11.1 によって，無理数を対等な無理数の類に分けることができる．

$h,k\in\mathbb{Z}$，$(h,\ k)=1$ とすると，

$$hk'-h'k=1$$

となる $h',k'\in\mathbb{Z}$ が存在する．このとき，

$$\frac{h}{k}=\frac{h'\cdot 0-h}{k'\cdot 0-k}\qquad h'k-hk'=-1.$$

よって，$\dfrac{h}{k}$ と 0 は対等である．定理 2.11.1 より，$\dfrac{h}{k}$ は他の任意の有理数と対等である．

定理 2.11.2

任意の 2 つの有理数は対等である．

定理 2.11.3

2 つの無理数 ξ と η が対等であるための必要十分条件は，

$$\xi = \langle v_0, v_1, v_2, \cdots, v_m, c_0, c_1. \cdots \rangle,$$
$$\eta = \langle w_0, w_1, w_2, \cdots, w_n, c_0, c_1, \cdots \rangle.$$

(証明)

($\Leftarrow$)

$\alpha = \langle c_0, c_1, c_2, \cdots \rangle$ とすると，

$$\begin{aligned} \xi &= \langle v_0, v_1, v_2, \cdots, v_m, \alpha \rangle \\ &= \frac{P_m \alpha - P_{m-1}}{Q_m \alpha - Q_{m-1}}. \end{aligned}$$

$P_m Q_{m-1} - P_{m-1} Q_m = -1$ より，ξ と α は対等である．

同様に，η と α も対等である．

($\Rightarrow$)

ξ と η が対等であるとすると，

$$\eta = \frac{a\xi - b}{c\xi - d}, \qquad ad - bc = -1.$$

とおける．$c\xi - d > 0$ と仮定してよい．もしそうでなければ，a, b, c, d の符号を変えたものに置き換えれば，よいからである．ξ を減少型連分数展開すると，

$$\begin{aligned} \xi &= \langle v_0, v_1, \cdots, v_k' \rangle \\ &= \frac{P_{k-1} v_k' - P_{k-2}}{Q_{k-1} v_k' - Q_{k-2}} \end{aligned}$$

が得られる．ゆえに，

$$\eta = \frac{a\left(\dfrac{P_{k-1}v'_k - P_{k-2}}{Q_{k-1}v'_k - Q_{k-2}}\right) - b}{c\left(\dfrac{P_{k-1}v'_k - P_{k-2}}{Q_{k-1}v'_k - Q_{k-2}}\right) - d}$$
$$= \frac{a(P_{k-1}v'_k - P_{k-2}) - b(Q_{k-1}v'_k - Q_{k-2})}{c(P_{k-1}v'_k - P_{k-2}) - d(Q_{k-1}v'_k - Q_{k-2})}$$
$$= \frac{(aP_{k-1} - bQ_{k-1})v'_k - (aP_{k-2} - bQ_{k-2})}{(cP_{k-1} - dQ_{k-1})v'_k - (cP_{k-2} - dQ_{k-2})}.$$

ここで，

$$P = aP_{k-1} - bQ_{k-1}, \qquad R = aP_{k-2} - bQ_{k-2},$$
$$Q = cP_{k-1} - dQ_{k-1}, \qquad S = cP_{k-2} - dQ_{k-2}$$

とおくと，$P, Q, R, S \in \mathbb{Z}$ で，

$$\begin{aligned}PS - RQ &= (aP_{k-1} - bQ_{k-1})(cP_{k-2} - dQ_{k-2}) - (aP_{k-2} - bQ_{k-2})(cP_{k-1} - dQ_{k-1}) \\ &= (acP_{k-1}P_{k-2} - adP_{k-1}Q_{k-2} - bcP_{k-2}Q_{k-1} + bdQ_{k-1}Q_{k-2}) \\ &\qquad - (acP_{k-1}P_{k-2} - adP_{k-2}Q_{k-1} - bcP_{k-1}Q_{k-2} + bdQ_{k-1}Q_{k-2}) \\ &= (ad - bc)(P_{k-2}Q_{k-1} - P_{k-1}Q_{k-2}) \\ &= -1.\end{aligned}$$

定理 2.7.1 より，

$$P_{k-1} = \xi Q_{k-1} + \frac{1}{Q'_k}, \qquad P_{k-2} = \xi Q_{k-2} + \frac{1}{Q'_{k-1}}.$$

よって，

$$Q = c\left(\xi Q_{k-1} + \frac{1}{Q'_k}\right) - dQ_{k-1} \qquad S = (c\xi - d)Q_{k-2} + \frac{c}{Q'_{k-1}}.$$
$$= (c\xi - d)Q_{k-1} + \frac{c}{Q'_k}.$$

$c\xi - d > 0$，$Q_{k-1} > Q_{k-2}$，$\dfrac{1}{Q'_k}$ は狭義単調減少なので，k が十分大きいとき，

$$Q > S > 0.$$

$\zeta = v'_k$ とおくと，そのような k に対して，

$$\eta = \frac{P\zeta - R}{Q\zeta - S}.$$

そして，

$$PS - QR = -1,\ \zeta = v'_k > 1.$$

定理 2.10.1 より，

$$\begin{aligned}\eta &= \langle b_0, b_1, b_2, \cdots, b_l, \zeta\rangle \\ &= \langle b_0, b_1, b_2, \cdots, b_l, v_k, v_{k+1}, \cdots\rangle.\end{aligned}$$

■

2.12 循環減少型連分数

循環減少型連分数とは，ある固定された正の k とすべての $l \geq L$ に対して，

$$v_l = v_{l+k}$$

となるような減少型連分数のことである．部分商の組

$$v_L, v_{L+1}, \cdots, v_{L+k-1}$$

は循環節と呼ばれ，循環減少型連分数を次のように書き表すことができる．

$$\langle v_0, v_1, \cdots, v_{L-1}, \dot{v}_L, \cdots, \dot{v}_{L+k-1}\rangle.$$

定理 2.12.1

循環減少型連分数は 2 次根数である．

(証明)

v'_L を循環減少型連分数 x の L 次の全商とすると，

$$\begin{aligned}v'_L &= \langle v_L, v_{L+1}, \cdots, v_{L+k-1}, v_L, v_{L+1}, \cdots\rangle \\ &= \langle v_L, v_{L+1}, \cdots, v_{L+k-1}, v'_L\rangle \\ &= \frac{v'_L p' - p''}{v'_L q' - q''}. \\ & q' {v'_L}^2 - (q''+p')v'_L + p'' = 0. \ \cdots ①\end{aligned}$$

ここで，$\dfrac{p''}{q''}$，$\dfrac{p'}{q'}$ は $\langle v_L, v_{L+1}, \cdots, v_{L+k-1}\rangle$ の最後の 2 つの中間近似分数である．

また，$x = \dfrac{P_{L-1}v'_L - P_{L-2}}{Q_{L-1}v'_L - Q_{L-2}}$ より，

$$v'_L = \frac{Q_{L-2}x - P_{L-2}}{Q_{L-1}x - P_{L-1}}.$$

これを ① に代入すると，

$$q'\left(\frac{Q_{L-2}x - P_{L-2}}{Q_{L-1}x - P_{L-1}}\right)^2 - (q''+p')\left(\frac{Q_{L-2}x - P_{L-2}}{Q_{L-1}x - P_{L-1}}\right) + p'' = 0.$$

$$q'(Q_{L-2}x - P_{L-2})^2 - (q''+p')(Q_{L-2}x - P_{L-2})(Q_{L-1}x - P_{L-1}) + p''(Q_{L-1}x - P_{L-1})^2 = 0.$$

$$\begin{aligned}&\{q'Q_{L-2}^2 - Q_{L-1}Q_{L-2}(q''+p') + p''Q_{L-1}^2\}x^2 \\ &\quad - \{2q'Q_{L-2}P_{L-2} - (q''+p')(Q_{L-2}P_{L-1} + P_{L-2}Q_{L-1}) + 2p''Q_{L-1}P_{L-1}\}x \\ &\qquad + \{q'P_{L-2}^2 - (q''+p')P_{L-2}P_{L-1} + p''P_{L-1}^2\} = 0.\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}A &= q'Q_{L-2}^2 - Q_{L-1}Q_{L-2}(q''+p') + p''Q_{L-1}^2, \\ B &= 2q'Q_{L-2}P_{L-2} - (q''+p')(Q_{L-2}P_{L-1} + P_{L-2}Q_{L-1}, \\ C &= q'P_{L-2}^2 - (q''+p')P_{L-2}P_{L-1} + p''P_{L-1}^2)\end{aligned}$$

とおくと，

$$Ax^2 - Bx + C = 0$$

が得られる． $A, B, C \in \mathbb{Z}$ で，x は無理数であるから，x は 2 次根数である．

■

定理 2.12.2

2 次根数を表わす減少型連分数は循環する．

定理 2.12.2 を示す前に補題を示す．

補題 2.12.3

$\alpha = \dfrac{b_0 + \sqrt{d_0}}{a_0}$ とする．但し，$a_0, b_0 \in \mathbb{Z}$ で，$d_0 \in \mathbb{N}$ は平方数でない．また，$a_0 | b_0^2 - d_0$ とする．

$$\begin{cases} b_{i+1} = a_i v_i - b_i, \\ a_i a_{i+1} = b_{i+1}^2 - d_0 \end{cases}$$

とおくとき，次が成り立つ．

(1) $\alpha = \left\langle v_0, v_1, \cdots, v_n, \dfrac{b_{n+1} + \sqrt{d_0}}{a_{n+1}} \right\rangle.$

(2) $i \in \mathbb{N}$ とする．$i < j$ となるすべての $j \in \mathbb{N}$ に対して，

$$0 < a_j \quad かつ \quad |b_j - a_j| < \sqrt{d_0} < b_j.$$

(証明)

(1)

i) $n = 0$ のとき，

$b_1 = a_0 v_0 - b_0,\ a_0 a_1 = b_1^2 - d_0$ より，

$$\begin{aligned}\alpha = \frac{b_0 + \sqrt{d_0}}{a_0} &= \frac{(a_0 v_0 - b_1) + \sqrt{d_0}}{a_0} \\ &= v_0 - \frac{b_1 - \sqrt{d_0}}{a_0} \\ &= v_0 - \frac{a_1(b_1 - \sqrt{d_0})}{b_1^2 - d_0} \\ &= v_0 - \frac{a_1}{b_1 + \sqrt{d_0}} \\ &= \left\langle v_0, \frac{b_1 + \sqrt{d_0}}{a_1} \right\rangle.\end{aligned}$$

ii) n のとき成り立つと仮定する．$n+1$ のときについて考える．

$$\begin{aligned}\frac{b_{n+1} + \sqrt{d_0}}{a_{n+1}} &= \frac{a_{n+1} v_{n+1} - b_{n+2} + \sqrt{d_0}}{a_{n+1}} \\ &= v_{n+1} - \frac{b_{n+2} - \sqrt{d_0}}{a_{n+1}} \\ &= v_{n+1} - \frac{a_{n+2}(b_{n+2} - \sqrt{d_0})}{b_{n+2}^2 - d_0} \\ &= v_{n+1} - \frac{a_{n+2}}{b_{n+2} + \sqrt{d_0}}.\end{aligned}$$

帰納法の仮定より，

$$\begin{aligned}\alpha &= \left\langle v_0, v_1, \cdots, v_n, \frac{b_{n+1} + \sqrt{d_0}}{a_{n+1}} \right\rangle \\ &= \left\langle v_0, v_1, \cdots, v_n, \left(v_{n+1} - \cfrac{1}{\cfrac{b_{n+2} + \sqrt{d_0}}{a_{n+2}}} \right) \right\rangle \\ &= \left\langle v_0, v_1, \cdots, v_n, v_{n+1}, \frac{b_{n+2} + \sqrt{d_0}}{a_{n+2}} \right\rangle.\end{aligned}$$

(2)

$\rho=\sqrt{d_0}$ とおく．$a_i<0$ とする．

$v_i-1<v_i'=\dfrac{b_i+\rho}{a_i}$ より，

$$a_i(v_i-1)>b_i+\rho.$$

$$a_iv_i-a_i>b_i+\rho.$$

$$-a_i>-(a_iv_i-b_i)+\rho=-b_{i+1}+\rho.$$

よって，

$$a_i<b_{i+1}-\rho<b_{i+1}.$$

また，$1<v_{i+1}'=\dfrac{b_{i+1}+\rho}{a_{i+1}}$ より，$a_{i+1}<0$ ならば，

$$b_{i+1}<b_{i+1}+\rho<a_{i+1}.$$

よって，$a_i<a_{i+1}$．また，$a_{i+1}>0$ ならば，明らかに　$a_i<a_{i+1}$.

ゆえに，$a_i<0$ ならば，$a_i<a_{i+1}$.

従って，$0<a_{i_0}$ となる i_0 がある．

$\dfrac{b_{i_0}+\rho}{a_{i_0}}=v_{i_0}'<v_{i_0}$ より，

$$\rho<a_{i_0}v_{i_0}-b_{i_0}=b_{i_0+1}$$

であるから，

$$\begin{aligned}0&<b_{i_0+1}^2-\rho^2\\&=b_{i_0+1}^2-d_0\\&=a_{i_0}a_{i_0+1}.\end{aligned}$$

よって，$0<a_{i_0+1}$.

また，$1<v_{i_0+1}'=\dfrac{b_{i_0+1}+\rho}{a_{i_0+1}}$ より，$a_{i_0+1}-b_{i_0+1}<\rho$.

ゆえに，$0<a_i$ ならば $i<j$ となるすべての $j\in\mathbb{N}$ に対して，

$0<a_j$，$a_j-b_j<\rho<b_j$.

次に，$0 < a_i$ となる i に対して，$k_i \in \mathbb{Z}$ を

$$b_i + k_i a_i - a_i < \rho < b_i + k_i a_i$$

となるものとし，$b'_i = b_i + k_i a_i$ とおく．

$a_i < b'_i + \rho$ を示す．

$b'_i + \rho < a_i$ と仮定せよ．

$v_i = \left\lceil \dfrac{b'_i + \rho}{a_i} \right\rceil - k_i$ より，

$$\begin{aligned} b_i &= a_i v_i - b_i \\ &= a_i v_i - (b'_i - k_i a_i) \\ &= a_i(v_i + k_i) - b'_i \\ &= a_i \left\lceil \frac{b'_i + \rho}{a_i} \right\rceil - b'_i \\ &= a_i - b'_i \\ &< a_i. \end{aligned}$$

このとき，$a_i a_{i+1} < b_{i+1}^2 < a_i^2$ より，$0 < a_i < a_{i+1}$ となる．

しかし，$0 < a_i < a_{i+1}$ と矛盾する．

ゆえに，$a_i < b'_i + \rho$.

$\hat{v}_0 = \left\lceil \dfrac{b'_i + \rho}{a_i} \right\rceil$，$\hat{v}_n = v_{i+n}$ $(n \in \mathbb{N})$ とおくと，

$$\begin{aligned} \frac{b'_i + \rho}{a_i} &= \left\langle \hat{v}_0, \frac{b_{i+1} + \rho}{a_{i+1}} \right\rangle \\ &= \left\langle \hat{v}_0, \hat{v}_1, \hat{v}_2, \cdots, \hat{v}_{n-1}, \frac{b_{i+n} + \rho}{a_{i+n}} \right\rangle. \end{aligned}$$

$\hat{a}_m = a_{i+m}$ $(m = 0, 1, 2, \cdots)$.

$$\begin{cases} \hat{b}_0 = b_i' \\ \hat{b}_n = b_{i+n} \ (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

とおく．$\hat{b}_m - \hat{a}_m < \rho$ を示す．

i) $m = 0$ のとき，

$$\begin{aligned} \rho - (\hat{b}_0 - \hat{a}_0) &= \rho - b_i' + a_i \\ &> (b_i' - a_i) - b_i' + a_i = 0. \end{aligned}$$

ii) m のとき成り立つと仮定する．$m + 1$ のときについて考える．

$\hat{b}_m - \hat{a}_m < \rho$ より，$0 < \hat{a}_m - \hat{b}_m + \rho$.

$$\begin{aligned} \hat{a}_m &< \hat{a}_m + (\hat{a}_m - \hat{b}_m + \rho) \\ &= 2\hat{a}_m - \hat{b}_m + \rho. \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

また，$2 \leq \hat{v}_m = v_{i+m}$ より，

$$\begin{aligned} \hat{b}_{m+1} &= b_{i+m+1} \\ &= a_{i+m} v_{i+m} - b_{i+m} \\ &\geq 2a_{i+m} - b_{i+m} = 2\hat{a}_m - \hat{b}_m. \cdots\cdots ② \end{aligned}$$

よって，①，② より，

$$\hat{a}_m < \hat{b}_{m+1} + \rho.$$

ゆえに，

$$\begin{aligned} \hat{a}_{m+1} &= \frac{\hat{b}_{m+1}^2 - d_0}{\hat{a}_m} \\ &= \frac{(\hat{b}_{m+1} + \rho)(\hat{b}_{m+1} - \rho)}{\hat{a}_m} > \hat{b}_{m+1} - \rho. \end{aligned}$$

すなわち，$0 < a_i$ となる i があって，$i < j$ となるすべての $j \in \mathbb{N}$ に対して $b_j - a_j < \rho < b_j$ である．

■

補題 2.12.4

$0 < a$ で $|b-a| < \rho < b$ となる $a, b \in \mathbb{Z}$，$\rho \in \mathbb{R}$ について，a が $b^2 - \rho^2$ を割り切るならば，$a \leq \rho^2$，$b^2 \leq \rho^2$.

(証明)

$a' \in \mathbb{Z}$ を $aa' = b^2 - \rho^2$ となるものとする.

$$|b-a| < \rho \text{より}, \qquad a < b + \rho.$$

$$\rho < b \text{ より}, \qquad 0 < b - \rho.$$

これらより,

$$\begin{aligned} a(b-\rho) &< (b+\rho)(b-\rho) \\ &= aa'. \end{aligned}$$

$a > 0$ より，$b - \rho < a'$．よって，$b - a' < \rho$.

また,

$$|b-a| < \rho,\ \rho < b \text{ より}, \qquad 0 < b - \rho < a.$$

$$0 < \rho < b \text{ より}, \qquad 0 < b + \rho.$$

これらより,

$$\begin{aligned} b^2 - \rho^2 = (b-\rho)(b+\rho) &< a(b+\rho) \\ aa' &< a(b+\rho) \\ a' &< b + \rho \\ -\rho &< b - a'. \end{aligned}$$

よって,

$$|b - a'| < \rho.$$

従って,

$$\begin{aligned} 0 &< \rho^2 - (a-b)(b-a') \\ &= \rho^2 - ab + aa' + b^2 - a'b \\ &= (b^2 - aa') - ab + aa' + b^2 - a'b \\ &= b(2b - a - a'). \end{aligned}$$

$0 < b$ より，$0 < 2b - a - a'$.
また，$b, a, a' \in \mathbb{Z}$ より $2b - a - a' \in \mathbb{Z}$ であるから，$1 \leq 2b - a - a'$.
よって，

$$\begin{aligned} a &\leq a(2b - a - a') \\ &= 2ab - a^2 - aa' \\ &= 2ab - a^2 - (b^2 - \rho^2) \\ &= \rho^2 - (a^2 - 2ab + b^2) = \rho^2 - (a-b)^2 \leq \rho^2. \cdots ① \end{aligned}$$

次に，$b \leq \rho^2$ を示す.

$b \leq a$ のとき，$a \leq \rho^2$ より，$b \leq \rho^2$.

$b > a$ のとき，$b, a \in \mathbb{Z}$ より，$b - a \geq 1$.

① より，$a \leq \rho^2 - (a-b)^2$.

よって，$\rho^2 \geq (b-a)^2 + a \geq b - a + a = b$.

■

定理 2.12.2 を示す.
2 次根数 $\dfrac{b+\sqrt{d}}{a}$ について，

$$a_0 = |a|a, \qquad b_0 = |a|b, \qquad d_0 = a^2 d$$

とおくと，$\dfrac{b+\sqrt{d}}{a} = \dfrac{b_0+\sqrt{d_0}}{a_0}$，$a_0 | b_0^2 - d_0$.
そこで，α, d_0, a_i, b_i を補題 2.12.3 と同じものとする.
補題 2.12.3 と補題 2.12.4 より，ある $i \in \mathbb{N}$ より大きい $j \in \mathbb{N}$ に対して，

$$0 < a_j \leq d_0 \quad \text{かつ} \quad 0 < b_j \leq d_0$$

であるから，組 (a_j, b_j) は有限個しかない．よって，$(a_{j_1}, b_{j_1}) = (a_{j_2}, b_{j_2})$ となる $j_1, j_2 \in \mathbb{N}$ がある.
従って，

$$\alpha = \langle v_0, v_1, \cdots, v_{j_1-1}, \dot{v}_{j_1}, \cdots, \dot{v}_{j_2-1} \rangle .$$

■

2.13 連分数から減少型連分数へ

定理 2.13.1

$\alpha = [a_0, a_1, a_2, \cdots]$ とするとき,

$$\alpha = \langle (a_0+1), \underbrace{2, \cdots, 2}_{a_1 - 1\text{ 個}}, (a_2+2), \underbrace{2, \cdots, 2}_{a_3 - 1\text{ 個}}, \cdots, (a_{2i}+2), \underbrace{2, \cdots, 2}_{a_{2i+1} - 1\text{ 個}}, a'_{2i+2}+1 \rangle$$

と表せる．但し，$i \in \mathbb{N}$ $(i \geq 0)$.

特に,

$$\begin{cases} v_0 = a_0 + 1, \\ v_{\sum_{j=1}^{i} a_{2j-1}} = a_{2i} + 2. \end{cases}$$

(証明)

補題 2.13.2

任意の $h \in \mathbb{N}$ $(1 \leq h)$，$\beta \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\begin{aligned} \frac{(h+1)\beta+1}{h\beta+1} &= 2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{\ddots}{2 - \cfrac{1}{\beta+1}}} \\ &= \langle \underbrace{2, 2, \cdots, 2}_{h\text{ 個}}, (\beta+1) \rangle. \end{aligned}$$

補題を示す.

i) $h = 1$ のとき,

$$\begin{aligned} \frac{2\beta+1}{\beta+1} &= \frac{2(\beta+1)-1}{\beta+1} \\ &= 2 - \frac{1}{\beta+1}. \end{aligned}$$

ii) h のとき成り立つと仮定する．$h+1$ のときについて考える.

$h+1$ のとき，

$$\begin{aligned}
\frac{(h+2)\beta+1}{(h+1)\beta+1} &= \frac{2\{(h+1)\beta+1\}-h\beta-1}{(h+1)\beta+1} \\
&= 2-\frac{h\beta+1}{(h+1)\beta+1} \\
&= 2-\cfrac{1}{\cfrac{(h+1)\beta+1}{h\beta+1}} \\
&= \langle 2, \underbrace{2, 2, \cdots, 2}_{h\text{ 個}}, (\beta+1)\rangle \\
&= \langle \underbrace{2, 2, \cdots, 2}_{h+1\text{ 個}}, (\beta+1)\rangle.
\end{aligned}$$

定理を示す.

I) $i=0$ のとき，$\dfrac{1}{a_1'}<1$ より，

$$\begin{aligned}
\lceil \alpha \rceil &= \left\lceil a_0+\frac{1}{a_1'} \right\rceil \\
&= a_0+\left\lceil \frac{1}{a_1'} \right\rceil \\
&= a_0+1.
\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
\alpha = (a_0+1) - (1 - \frac{1}{a_1'}) &= (a_0+1) - \cfrac{1}{\cfrac{a_1'}{a_1'-1}} \\
&= (a_0+1) - \cfrac{1}{\cfrac{a_1 + \cfrac{1}{a_2'}}{a_1 + \cfrac{1}{a_2'} - 1}} \\
&= (a_0+1) - \cfrac{1}{\cfrac{a_1 a_2' + 1}{(a_1-1)a_2' + 1}} \\
&= (a_0+1) - \cfrac{1}{\langle \underbrace{2, 2, \cdots, 2}_{a_1 - 1\,\text{個}}, (a_2'+1) \rangle} \\
&= \langle (a_0+1), \underbrace{2, 2, \cdots, 2}_{a_1 - 1\,\text{個}}, (a_2'+1) \rangle.
\end{aligned}$$

II) i のとき成り立つと仮定する. $i+1$ のときについて考える.

$$\begin{aligned}
\lceil a_{2i+2}' + 1 \rceil &= \lceil a_{2i+2}' \rceil + 1 \\
&= (a_{2i+2} + 1) + 1 \\
&= a_{2i+2} + 2.
\end{aligned}$$

よって，

$$
\begin{aligned}
a'_{2i+2}+1 &= (a_{2i+2}+2)-\{a_{2i+2}+2-(a'_{2i+2}+1)\} \\
&= (a_{2i+2}+2)-\{a_{2i+2}-(a_{2i+2}+\frac{1}{a'_{2i+3}})+1\} \\
&= (a_{2i+2}+2)-(1-\frac{1}{a'_{2i+3}}) \\
&= (a_{2i+2}+2)-\cfrac{1}{\cfrac{a_{2i+3}a'_{2i+4}+1}{(a_{2i+3}-1)a'_{2i+4}+1}} \\
&= (a_{2i+2}+2)-\frac{1}{\langle \underbrace{2,2,\cdots,2}_{a_{2i+3}-1\text{ 個}},(a'_{2i+4}+1)\rangle}.
\end{aligned}
$$

帰納法の仮定より，

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \langle (a_0+1),\underbrace{2,\cdots,2}_{a_1-1\text{ 個}},(a_2+2),\cdots,(a'_{2i+2}+1)\rangle \\
&= \langle (a_0+1),\underbrace{2,\cdots,2}_{a_1-1\text{ 個}},(a_2+2),\cdots,(a_{2i+2}+2),\ \underbrace{2,\cdots,2}_{a_{2i+3}-1\text{ 個}},(a'_{2i+4}+1)\rangle.
\end{aligned}
$$

■

次に現れる p_n と q_n は第 1 章で定義したものであることに注意してほしい．

定理 2.13.3

任意の $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 1)$ に対して，

$$
\begin{cases}
p_{2n-1} &= P_{(\sum_{i=1}^{n} a_{2i-1})-1}, \\
q_{2n-1} &= Q_{(\sum_{i=1}^{n} a_{2i-1})-1}.
\end{cases}
$$

また，$a_1 \neq 1$ のとき，

$$
\begin{cases}
p_{2n-1}-p_{2n-2} &= P_{(\sum_{i=1}^{n} a_{2i-1})-2}, \\
q_{2n-1}-q_{2n-2} &= Q_{(\sum_{i=1}^{n} a_{2i-1})-2}.
\end{cases}
$$

(証明)

補題 2.13.4

任意の $k \in \mathbb{N}$ $(k \geq 0)$ に対して，$\dfrac{P_{n+k}}{Q_{n+k}} = \langle v_n, \underbrace{2, \cdots, 2}_{k\text{ 個}} \rangle$ とすると，

$$P_{n+k} = (k+1)v_n - k, \qquad Q_{n+k} = k+1.$$

補題を示す.

i) $k = 0$ のとき，

$$\frac{P_n}{Q_n} = \langle v_n \rangle = \frac{v_n}{1}.$$

$(P_n,\ Q_n) = 1$ より，

$$P_n = v_n, \qquad Q_n = 1.$$

ii) $k = 1$ のとき，

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \langle v_n, 2 \rangle = \frac{2v_n - 1}{2}.$$

$(P_{n+1},\ Q_{n+1}) = 1$ より，

$$P_{n+1} = 2v_n - 1, \qquad Q_{n+1} = 2.$$

iii) $k, k-1$ のとき成り立つと仮定する．$k+1$ のときについて考える.

$$\begin{aligned}
\frac{P_{n+k+1}}{Q_{n+k+1}} &= \frac{2P_{n+k} - P_{n+k-1}}{2Q_{n+k} - Q_{n+k-1}} \\
&= \frac{2\{(k+1)v_n - k\} - \{kv_n - (k-1)\}}{2(k+1) - k} \\
&= \frac{(k+2)v_n - (k+1)}{k+2}.
\end{aligned}$$

$(P_{n+k+1},\ Q_{n+k+1}) = 1$ より，

$$P_{n+k+1} = (k+2)v_n - (k+1), \qquad Q_{n+k+1} = k+2.$$

定理を示す.

I) $n = 1$ のとき,

$$\begin{aligned}
\frac{P_{a_1-1}}{Q_{a_1-1}} &= \langle (a_0+1), \underbrace{2, \cdots, 2}_{a_1-1\text{ 個}} \rangle \\
&= \frac{a_1(a_0+1)-(a_1-1)}{a_1} \\
&= \frac{a_1a_0+1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{P_{a_1-2}}{Q_{a_1-2}} &= \langle (a_0+1), \underbrace{2, \cdots, 2}_{a_1-2\text{ 個}} \rangle \\
&= \frac{(a_1-1)(a_0+1)-(a_1-2)}{a_1-1} \\
&= \frac{a_0(a_1-1)+1}{a_1-1} \\
&= \frac{a_1a_0+1-a_0}{a_1-1} \\
&= \frac{p_1-p_0}{q_1-q_0}.
\end{aligned}$$

II) n のとき成り立つと仮定する．$n+1$ のときについて考える．

$$\frac{P_{(\sum_{i=1}^{n+1} a_{2i-1})-1}}{Q_{(\sum_{i=1}^{n+1} a_{2i-1})-1}} = \left\langle (a_0+1), \underbrace{2, \cdots, 2}_{a_1-1\text{ 個}}, \cdots, (a_{2n}+2), \underbrace{2, \cdots, 2}_{a_{2n+1}-1\text{ 個}} \right\rangle$$

$$= \left\langle (a_0+1), \underbrace{2, \cdots, 2}_{a_1-1\text{ 個}}, \cdots, (a_{2n-2}+2), \underbrace{2, \cdots, 2}_{a_{2n-1}-1\text{ 個}}, \frac{a_{2n+1}(a_{2n}+1)+1}{a_{2n+1}} \right\rangle$$

$$= \frac{\dfrac{a_{2n+1}(a_{2n}+1)+1}{a_{2n+1}} P_{(\sum_{i=1}^{n} a_{2i-1})-1} - P_{(\sum_{i=1}^{n} a_{2i-1})-2}}{\dfrac{a_{2n+1}(a_{2n}+1)+1}{a_{2n+1}} Q_{(\sum_{i=1}^{n} a_{2i-1})-1} - Q_{(\sum_{i=1}^{n} a_{2i-1})-2}}$$

$$= \frac{\dfrac{a_{2n+1}(a_{2n}+1)+1}{a_{2n+1}} p_{2n-1} - (p_{2n-1} - p_{2n-2})}{\dfrac{a_{2n+1}(a_{2n}+1)+1}{a_{2n+1}} q_{2n-1} - (q_{2n-1} - q_{2n-2})}$$

$$= \frac{\{a_{2n+1}(a_{2n}+1)+1\} p_{2n-1} - a_{2n-1}(p_{2n-1} - p_{2n-2})}{\{a_{2n+1}(a_{2n}+1)+1\} q_{2n-1} - a_{2n-1}(q_{2n-1} - q_{2n-2})}$$

$$= \frac{a_{2n+1}\{(a_{2n}+1)p_{2n-1} - (p_{2n-1} - p_{2n-2})\} + p_{2n-1}}{a_{2n+1}\{(a_{2n}+1)q_{2n-1} - (q_{2n-1} - q_{2n-2})\} + q_{2n-1}}$$

$$= \frac{a_{2n+1}(a_{2n}p_{2n-1} + p_{2n-2}) + p_{2n-1}}{a_{2n+1}(a_{2n}q_{2n-1} + q_{2n-2}) + q_{2n-1}}$$

$$= \frac{a_{2n+1}p_{2n} + p_{2n-1}}{a_{2n+1}q_{2n} + q_{2n-1}}$$

$$= \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}.$$

$(P_{(\sum_{i=1}^{n+1} a_{2i-1})-1},\ Q_{(\sum_{i=1}^{n+1} a_{2i-1})-1}) = 1$ より，

$$P_{(\sum_{i=1}^{n+1} a_{2i-1})-1} = p_{2n+1}, \qquad Q_{(\sum_{i=1}^{n+1} a_{2i-1})-1} = q_{2n+1}.$$

$a_{2n+1} \neq 1$ のとき，

$$
\begin{aligned}
\frac{P_{(\sum_{i=1}^{n+1} a_{2i-1})-2}}{Q_{(\sum_{i=1}^{n+1} a_{2i-1})-2}} &= \left\langle (a_0+1), \underbrace{2, \cdots, 2}_{a_1-1\text{ 個}}, \cdots, (a_{2n}+2), \underbrace{2, \cdots, 2}_{a_{2n+1}-2\text{ 個}} \right\rangle \\
&= \left\langle (a_0+1), \underbrace{2, \cdots, 2}_{a_1-1\text{ 個}}, \cdots, (a_{2n-2}+2), \underbrace{2, \cdots, 2}_{a_{2n-1}-2\text{ 個}}, \frac{(a_{2n+1}-1)(a_{2n}+1)+1}{a_{2n+1}-1} \right\rangle \\
&= \frac{\dfrac{(a_{2n+1}-1)(a_{2n}+1)+1}{a_{2n+1}-1} P_{(\sum_{i=1}^{n} a_{2i-1})-1} - P_{(\sum_{i=1}^{n} a_{2i-1})-2}}{\dfrac{(a_{2n+1}-1)(a_{2n}+1)+1}{a_{2n+1}-1} Q_{(\sum_{i=1}^{n} a_{2i-1})-1} - Q_{(\sum_{i=1}^{n} a_{2i-1})-2}} \\
&= \frac{\dfrac{(a_{2n+1}-1)(a_{2n}+1)+1}{a_{2n+1}-1} p_{2n-1} - (p_{2n-1} - p_{2n-2})}{\dfrac{(a_{2n+1}-1)(a_{2n}+1)+1}{a_{2n+1}-1} q_{2n-1} - (q_{2n-1} - q_{2n-2})} \\
&= \frac{\{(a_{2n+1}-1)(a_{2n}+1)+1\} p_{2n-1} - (a_{2n-1}-1)(p_{2n-1} - p_{2n-2})}{\{(a_{2n+1}-1)(a_{2n}+1)+1\} q_{2n-1} - (a_{2n-1}-1)(q_{2n-1} - q_{2n-2})} \\
&= \frac{(a_{2n+1}-1)\{(a_{2n}+1)p_{2n-1} - (p_{2n-1} - p_{2n-2})\} + p_{2n-1}}{(a_{2n+1}-1)\{(a_{2n}+1)q_{2n-1} - (q_{2n-1} - q_{2n-2})\} + q_{2n-1}} \\
&= \frac{(a_{2n+1}-1)p_{2n} + p_{2n-1}}{(a_{2n+1}-1)q_{2n} + q_{2n-1}} \\
&= \frac{a_{2n+1}p_{2n} + p_{2n-1} - p_{2n}}{a_{2n+1}q_{2n} + q_{2n-1} - q_{2n}} \\
&= \frac{p_{2n+1} - p_{2n}}{q_{2n+1} - q_{2n}}.
\end{aligned}
$$

$(P_{(\sum_{i=1}^{n+1} a_{2i-1})-2},\ Q_{(\sum_{i=1}^{n+1} a_{2i-1})-2}) = 1$ より，

$$
P_{(\sum_{i=1}^{n+1} a_{2i-1})-2} = p_{2n+1} - p_{2n}, \qquad Q_{(\sum_{i=1}^{n+1} a_{2i-1})-2} = q_{2n+1} - q_{2n}.
$$

$a_{2n+1}=1$ のとき，

$$\begin{aligned}
\frac{P_{(\sum_{i=1}^{n+1}a_{2i-1})-2}}{Q_{(\sum_{i=1}^{n+1}a_{2i-1})-2}} &= \frac{P_{(\sum_{i=1}^{n}a_{2i-1})-1}}{Q_{(\sum_{i=1}^{n}a_{2i-1})-1}} \\
&= \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} \\
&= \frac{p_{2n}+p_{2n-1}-p_{2n}}{q_{2n}+q_{2n-1}-q_{2n}} \\
&= \frac{a_{2n+1}p_{2n}+p_{2n-1}-p_{2n}}{a_{2n+1}q_{2n}+q_{2n-1}-q_{2n}} \\
&= \frac{p_{2n+1}-p_{2n}}{q_{2n+1}-q_{2n}}.
\end{aligned}$$

$(P_{(\sum_{i=1}^{n+1}a_{2i-1})-2},\ Q_{(\sum_{i=1}^{n+1}a_{2i-1})-2})=1$ より，

$$P_{(\sum_{i=1}^{n+1}a_{2i-1})-2}=p_{2n+1}-p_{2n}, \qquad Q_{(\sum_{i=1}^{n+1}a_{2i-1})-2}=q_{2n+1}-q_{2n}.$$

■

定理 2.13.5

$a_1=1$ のとき，任意の $n\in\mathbb{N}$ $(n\geq 2)$ に対して，

$$p_{2n-1}-p_{2n-2}=P_{(\sum_{i=1}^{n}a_{2i-1})-2}.$$
$$q_{2n-1}-q_{2n-2}=Q_{(\sum_{i=1}^{n}a_{2i-1})-2}.$$

(証明)

i) $n=2$ のとき，

・$a_3 \neq 1$ のとき,

$$\begin{aligned}
\frac{P_{a_3+a_1-2}}{Q_{a_3+a_1-2}} &= \left\langle (a_0+1), (a_2+2), \underbrace{2, \cdots, 2}_{a_3-2\text{ 個}} \right\rangle \\
&= \left\langle (a_0+1), \frac{(a_3-1)(a_2+1)+1}{a_3-1} \right\rangle \\
&= (a_0+1) - \frac{a_3-1}{(a_3-1)(a_2+1)+1} \\
&= \frac{(a_0+1)\{(a_3-1)(a_2+1)+1\}-(a_3-1)}{(a_3-1)(a_2+1)+1} \\
&= \frac{(a_3-1)\{(a_0+1)(a_2+1)-1\}+(a_0+1)}{(a_3-1)(a_2+1)+1} \\
&= \frac{(a_3-1)p_2+p_1}{(a_3-1)q_2+q_1} \\
&= \frac{a_3p_2+p_1-p_2}{a_3q_2+q_1-q_2} = \frac{p_3-p_2}{q_3-q_2}.
\end{aligned}$$

$(P_{a_3+a_1-2},\ Q_{a_3+a_1-2}) = 1$ より,

$$P_{a_3+a_1-2} = p_3 - p_2, \qquad Q_{a_3+a_1-2} = q_3 - q_2.$$

・$a_3 = 1$ のとき,

$$\begin{aligned}
\frac{P_{a_3+a_1-2}}{Q_{a_3+a_1-2}} &= \frac{P_0}{Q_0} \\
&= \frac{a_0+1}{1}.
\end{aligned}$$

また，

$$
\begin{aligned}
\frac{p_3 - p_2}{q_3 - q_2} &= \frac{a_3 p_2 + p_1 - p_2}{a_3 q_2 + q_1 - q_2} \\
&= \frac{p_2 + p_1 - p_2}{q_2 + q_1 - q_2} \\
&= \frac{p_1}{q_1} \\
&= \frac{a_0 + 1}{1} \quad .
\end{aligned}
$$

よって，

$$
\frac{P_{a_3+a_1-2}}{Q_{a_3+a_1-2}} = \frac{p_3 - p_2}{q_3 - q_2}.
$$

$(P_{a_3+a_1-2}, Q_{a_3+a_1-2}) = 1$ より，

$$
P_{a_3+a_1-2} = p_3 - p_2, \qquad Q_{a_3+a_1-2} = q_3 - q_2.
$$

ii) n のとき成り立つと仮定する．

$n+1$ のとき，定理 2.13.3 の II) と同様にして，成り立つ．

■

2.14 減少型連分数から連分数へ

定理 2.14.1

$i \in \mathbb{N}$ $(i \geq 1)$ とする．$\alpha = \langle v_0, v_1, v_2, \cdots \rangle$ のとき，

$$
\alpha = \left[v_0 - 1, h_1 + 1, v_{1+h_1} - 2, h_2 + 1, \cdots, v_{i+\sum_{j=1}^{i} h_j} - 2, \frac{v'_{i+1+\sum_{j=1}^{i} h_j}}{v'_{i+1+\sum_{j=1}^{i} h_j} - 1} \right].
$$

ただし，$h_i = \langle \underbrace{2, \cdots, 2}_{h_i \text{ 個}}, v_{i+\sum_{j=1}^{i} h_j} \rangle$，かつ，$v_{i+1+\sum_{j=1}^{i} h_j} \neq 2$.

(証明)

I) $i=1$ のとき，$\dfrac{1}{v_1'}<1$ より，

$$\begin{aligned}\lfloor\alpha\rfloor &= \left\lfloor v_0-\frac{1}{v_1'}\right\rfloor\\ &= v_0-1.\end{aligned}$$

よって，$a_0=v_0-1$.

このとき，

$$\begin{aligned}\alpha &= v_0-\frac{1}{v_1'}\\ &= (v_0-1)+(1-\frac{1}{v_1'})\\ &= v_0-1+\frac{v_1'-1}{v_1'}\\ &= v_0-1+\cfrac{1}{\cfrac{v_1'}{v_1'-1}}\\ &= \left[v_0-1,\frac{v_1'}{v_1'-1}\right].\end{aligned}$$

i) $v_1\neq 2$ のとき，

$$\begin{aligned}a_1'=\frac{v_1'}{v_1'-1} &= \frac{v_1-\cfrac{1}{v_2'}}{v_1-\cfrac{1}{v_2'}-1}\\ &= \frac{v_1v_2'-1}{(v_1-1)v_2'-1}\\ &= 1+\frac{v_2'}{(v_1-1)v_2'-1}.\end{aligned}$$

$\dfrac{v_2'}{(v_1-1)v_2'-1} < 1$ より,

$$a_1 = \left\lfloor \frac{v_1'}{v_1'-1} \right\rfloor = 1.$$

よって,

$$\begin{aligned} a_1' &= 1 + \cfrac{1}{\cfrac{(v_1-1)v_2'-1}{v_2'}} \\ &= 1 + \cfrac{1}{v_1 - 1 - \cfrac{1}{v_2'}} \\ &= \left[1, v_1 - 1 - \frac{1}{v_2'}\right]. \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} a_2 &= \left\lfloor v_1 - 1 - \frac{1}{v_2'} \right\rfloor \\ &= v_1 - 2 \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} a_2' = v_1 - 1 - \frac{1}{v_2'} &= (v_1-2) + (1 - \frac{1}{v_2'}) \\ &= \left[v_1 - 2, \frac{v_2'}{v_2'-1}\right]. \end{aligned}$$

ゆえに,

$$\begin{aligned} \alpha &= [a_0, a_1, a_2, a_3'] \\ &= \left[v_0 - 1, 1, v_1 - 2, \frac{v_2'}{v_2'-1}\right]. \end{aligned}$$

ii) $v_1 = v_2 = \cdots = v_{h_1} = 2$，かつ，$v_{h_1+1} \neq 2$ のとき，$(h_1 \geq 1)$

$$\begin{aligned}
1 - \frac{1}{v'_1} &= 1 - \frac{1}{\langle \underbrace{2, \cdots, 2}_{h_1\text{ 個}}, v'_{1+h_1} \rangle} \\
&= 1 - \frac{h_1(v'_{1+h_1} - 1) + 1}{(h_1 + 1)(v'_{1+h_1} - 1) + 1} \\
&= \frac{(h_1 + 1)(v'_{1+h_1} - 1) + 1 - h_1(v'_{1+h_1} - 1) - 1}{(h_1 + 1)(v'_{1+h_1} - 1) + 1} \\
&= \frac{v'_{1+h_1} - 1}{(h_1 + 1)(v'_{1+h_1} - 1) + 1}.
\end{aligned}$$

逆数をとると，

$$\begin{aligned}
\frac{v'_1}{v'_1 - 1} &= \frac{(h_1 + 1)(v'_{1+h_1} - 1) + 1}{v'_{1+h_1} - 1} \\
&= h_1 + 1 + \frac{1}{v'_{1+h_1} - 1}.
\end{aligned}$$

$\dfrac{1}{v'_{1+h_1} - 1} < 1$ より，$\qquad a_1 = \left\lfloor \dfrac{v'_1}{v'_1 - 1} \right\rfloor = h_1 + 1.$

よって，$\qquad a'_1 = [h_1 + 1, v'_{1+h_1} - 1].$

また，$\dfrac{1}{v'_{2+h_1}} < 1$ より，

$$\begin{aligned}
a_2 &= \lfloor v'_{1+h_1} - 1 \rfloor \\
&= \left\lfloor \left(v_{1+h_1} - \frac{1}{v'_{2+h_1}} \right) - 1 \right\rfloor \\
&= \left\lfloor v_{1+h_1} - 1 - \frac{1}{v'_{2+h_1}} \right\rfloor \\
&= v_{1+h_1} - 2
\end{aligned}$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
a_2' &= v_{1+h_1}' - 1 \\
&= (v_{1+h_1} - 2) + (1 - \frac{1}{v_{2+h_1}'}) \\
&= \left[v_{1+h_1} - 2, \frac{v_{2+h_1}'}{v_{2+h_1}' - 1} \right].
\end{aligned}
$$

ゆえに，

$$
\begin{aligned}
\alpha &= [a_0, a_1, a_2, a_3'] \\
&= \left[v_0 - 1, h_1 + 1, v_{1+h_1} - 2, \frac{v_{2+h_1}'}{v_{2+h_1}' - 1} \right].
\end{aligned}
$$

$h_1 = 0$ のとき，i) と同じになるので，$h_1 \geq 0$ に対して，

$$
\alpha = \left[v_0 - 1, h_1 + 1, v_{1+h_1} - 2, \frac{v_{2+h_1}'}{v_{2+h_1}' - 1} \right].
$$

II) i のとき成り立つと仮定する．$i+1$ のときについて考える．

i) $v_{i+1+\sum_{j=1}^{i} h_j} \neq 2$ のとき，$I = \sum_{j=1}^{i} h_j$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
\frac{v_{i+1+I}'}{v_{i+1+I}' - 1} &= \frac{v_{i+1+I} - \dfrac{1}{v_{i+2+I}'}}{v_{i+1+I} - \dfrac{1}{v_{i+2+I}'} - 1} \\
&= \frac{v_{i+1+I} v_{i+2+I}' - 1}{(v_{i+1+I} - 1) v_{i+2+I}' - 1} \\
&= 1 + \frac{v_{i+2+I}'}{(v_{i+1+I} - 1) v_{i+2+I}' - 1}.
\end{aligned}
$$

$\dfrac{v_{i+2+I}'}{(v_{i+1+I} - 1) v_{i+2+I}' - 1}$ より，

$$
\left\lfloor \frac{v_{i+1+I}'}{v_{i+1+I}' - 1} \right\rfloor = 1.
$$

よって,

$$\frac{v'_{i+1+I}}{v'_{i+1+I}-1} = \left[1, v_{i+1+I}-1-\frac{1}{v'_{i+2+I}}\right].$$

また,

$$\left\lfloor v_{i+1+I}-1-\frac{1}{v'_{i+2+I}}\right\rfloor = v_{i+1+I}-2$$

であるから,

$$v_{i+1+I}-1-\frac{1}{v'_{i+2+I}} = (v_{i+1+I}-2)+(1-\frac{1}{v'_{i+2+I}}).$$

■

3　有理数の木

3.1　有理数の木

$\dfrac{1}{1}$ から始めて，$\dfrac{p}{q}$ の左下に $\dfrac{p}{p+q}$，右下に $\dfrac{p+q}{q}$ を置くと次のような図ができる．

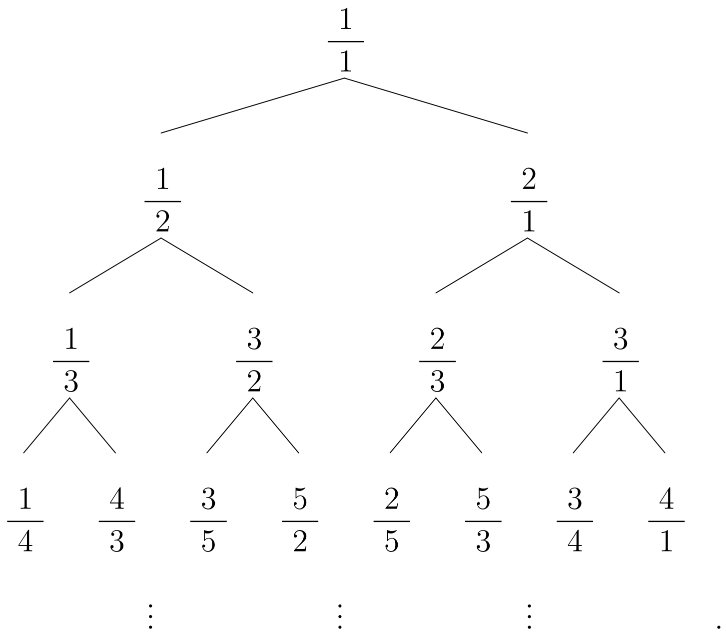

図 (3.1.1)

これを有理数の木と呼ぶ．有理数の木を帰納的に定義する．

T_0 を $\dfrac{1}{1}$ という図形で，T_0 の 0 行目 (の左から)0 番目の有理数を $\dfrac{1}{1}$ と定める．

図形 T_i と T_i の i 行目 (の左から)k 番目 $(0 \leq k < 2^i)$ の有理数が定義されたとき，図形 T_{i+1} とは，すべての k に対して，T_i の i 行目 k 番目の有理数 $\dfrac{p}{q}$ の左下に $\dfrac{p}{p+q}$，右下に $\dfrac{p+q}{q}$ を書いて，以下のように辺で結んだものである．

$$
\begin{array}{ccc}
 & \dfrac{p}{q} & \\
 / & & \backslash \\
\dfrac{p}{p+q} & & \dfrac{p+q}{q}
\end{array}
$$

.

$\dfrac{p}{q}$ を $\dfrac{p}{p+q}$ や $\dfrac{p+q}{q}$ の親と呼ぶ.

この $\dfrac{p}{p+q}$ は T_{i+1} の $i+1$ 行目 $2k$ 番目の有理数，$\dfrac{p+q}{q}$ は T_{i+1} の $i+1$ 行目 $2k+1$ 番目の有理数と呼ぶ．実際，$2k$ 番目の有理数は (左から)$2k$ 番目であり，$2k+1$ 番目もそうである．

$\mathbf{T} = \bigcup T_i$ として，この $\mathbf{T}$ を有理数の木と呼ぶ．$\mathbf{T}$ の i 行目 k 番目の有理数とは，T_i の i 行目 k 番目の有理数のこととする．

$\mathbf{T}$ の i 行目には，2^i 個の有理数が並ぶことになる．0 番目を左端，$2^i - 1$ 番目を右端とも呼ぶ.

補題 3.1.1

任意の $i \in \mathbb{N}$ $(0 \leq i)$ に対し，$\mathbf{T}$ の i 行目左端の有理数の分子は 1，i 行目右端の有理数の分母は 1 である．

(証明)

i) 図 (3.1.1) より，4 行目まで成り立つのは明らか.

ii) i のとき成り立つと仮定する．$i+1$ のときについて考える．

帰納法の仮定より，i 行目 0 番目の有理数を $\dfrac{1}{q}$ とおける．当該部分だけ書き出すと，

$$
\begin{array}{ccc}
 & \dfrac{1}{q} & \\
\diagup & & \diagdown \\
\dfrac{1}{q+1} & & \dfrac{q+1}{q}
\end{array}
$$

.

よって，$i+1$ 行目 0 番目の有理数は $\dfrac{1}{q+1}$.

帰納法の仮定より，i 行目 2^i-1 番目の有理数を $\dfrac{p}{1}$ とおける．当該部分だけを書き出すと，

$$
\begin{array}{ccc}
 & \dfrac{p}{1} & \\
\diagup & & \diagdown \\
\dfrac{p}{p+1} & & \dfrac{p+1}{1}
\end{array}
$$

.

よって，$i+1$ 行目 $2^{i+1}-1$ 番目の有理数は $\dfrac{p+1}{1}$.

■

3.2 有理数の木の性質

定理 3.2.1

$\mathbf{T}$ に現れる有理数はすべて既約分数である.

(証明)

任意の $p,q\in\mathbb{N}$ に対し，$(p,\ q)=1$ ならば，$(p,\ p+q)=1$，$(p+q,\ q)=1$ であることを背理法で示す.

$p, q \in \mathbb{N}$ とし，$(p,\ q) = 1$ で，かつ，$(p,\ p+q) = d$ と仮定する．但し，$d \in \mathbb{N}$, $d \neq 1$.

$d \mid p$, $d \mid p+q$ より，$d \mid q$.

しかし，$(p,\ q) = 1$ と矛盾する．

よって，$(p,\ p+q) = 1$.

同様に，$(p+q,\ q) = 1$ も示せる．

そして，$\mathbf{T}$ は $\dfrac{1}{1}$ から始まるので，$\mathbf{T}$ に現れるすべての有理数は，分母と分子の最大公約数は 1，即ち，既約分数である．

■

定理 3.2.2

$\mathbf{T}$ には，すべての正の既約分数が現れる．

(証明)

正の既約分数を任意にとり，$\dfrac{p}{q}$ とする．ただし，$p, q \in \mathbb{N}, (p,\ q) = 1$.

i) $p > q$ のとき，

ユークリッドの互除法により一連の方程式

$$
\begin{aligned}
p &= a_0 q + b_1 && (0 < b_1 < q),\\
q &= a_1 b_1 + b_2 && (0 < b_2 < b_1),\\
b_1 &= a_2 b_2 + b_3 && (0 < b_3 < b_2),\\
&\vdots\\
b_{n-1} &= a_n b_n + b_{n+1} && (0 < b_{n+1} < b_n),\\
b_n &= a_{n+1} b_{n+1}
\end{aligned}
$$

が得られる．$(p,\ q) = 1$ より，$b_{n+1} = 1$．ここで，次のような操作をする．

・$\dfrac{p}{q}$ から a_0 回，親を辿る．$\left(\dfrac{p}{q} \to \dfrac{p - a_0 q}{q} = \dfrac{b_1}{q}.\right)$

・$\dfrac{b_1}{q}$ から a_1 回，親を辿る．$\left(\dfrac{b_1}{q} \to \dfrac{b_1}{q - a_1 b_1} = \dfrac{b_1}{b_2}.\right)$

・$\dfrac{b_1}{b_2}$ から a_2 回，親を辿る．$\left(\dfrac{b_1}{b_2} \to \dfrac{b_1 - a_2 b_2}{b_2} = \dfrac{b_3}{b_2}.\right)$

$\vdots$

この操作を繰り返すと，

・n が奇数のとき，

$\dfrac{b_n}{b_{n-1}}$ から a_n 回，親を辿る．$\left(\dfrac{b_n}{b_{n-1}} \to \dfrac{b_n}{b_{n-1} - a_n b_n} = \dfrac{b_n}{b_{n+1}}.\right)$

$\dfrac{b_n}{b_{n+1}}$ から $(a_{n+1} - 1)$ 回，親を辿る．

$$\left(\frac{b_n}{b_{n+1}} \to \frac{b_n - (a_{n+1} - 1)b_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{b_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{1}{1}.\right)$$

・n が偶数のとき，

$\dfrac{b_{n-1}}{b_n}$ から a_n 回，親を辿る．$\left(\dfrac{b_{n-1}}{b_n} \to \dfrac{b_{n-1} - a_n b_n}{b_n} = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}.\right)$

$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ から $(a_{n+1} - 1)$ 回，親を辿る．

$$\left(\frac{b_{n+1}}{b_n} \to \frac{b_{n+1}}{b_n - (a_{n+1} - 1)b_{n+1}} = \frac{b_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{1}{1}.\right)$$

この道筋を $\dfrac{1}{1}$ から逆に辿ると，$\dfrac{p}{q}$ に到達する．

ii)$p < q$ のとき，同様に示せる．

■

定理 3.2.2 の証明から，任意の有理数 $\dfrac{p}{q}$ を定めると，$\dfrac{1}{1}$ から $\dfrac{p}{q}$ までの経路がただ一つ定まることがわかる．よって，次の定理が成り立つ．

定理 3.2.3

すべての正の既約分数は $\mathbf{T}$ に一回ずつ現れる．

3.3 有理数を並べる

補題 3.3.1

任意の $i \in \mathbb{N}$ $(1 \leq i)$ に対し，$\mathbf{T}$ の i 行目 k 番目 $(0 \leq k < 2^i - 1)$ の有理数の分母は，直後の有理数，すなわち，i 行目 $k+1$ 番目の有理数の分子と等しい．

(証明)

i と k に関する 2 重帰納法で示す．すなわち，i 以前の成立を仮定し，$i+1$ での成立を示すところで，k に関する帰納法を用いる．

i) 図 (3.1.1) より，4 行目まで成り立つことは明らか．

ii) i 行目まで成り立つと仮定する．

i 行目 0 番目の有理数を $\dfrac{p_0}{q_0}$ とおくと，帰納法の仮定より，i 行目 1 番目の有理数を $\dfrac{q_0}{r_0}$ とおける．当該部分だけ書き出すと，

$$
\begin{array}{cccc}
\multicolumn{2}{c}{\dfrac{p_0}{q_0}} & \multicolumn{2}{c}{\dfrac{q_0}{r_0}} \\
\swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow & \\
\dfrac{p_0}{p_0+q_0} & \dfrac{p_0+q_0}{q_0} & \dfrac{q_0}{q_0+r_0} & \dfrac{q_0+r_0}{r_0}
\end{array}
.
$$

よって，$i+1$ 行目の 0, 1, 2 番目の有理数の分母は，直後の有理数の分子と等しい．すなわち，$k = 0, 1, 2$ については定理は成立する．

次に，$i+1$ 行目 k 番目 $(0 \leq k < 2^{i+1} - 1)$ の有理数の分母は，直後の有理数の分子と等しいと仮定し，$l = \left\lfloor \dfrac{k}{2} \right\rfloor$ とする．i 行目 l 番目の有理数を $\dfrac{p_l}{q_l}$ とおくと，帰納法の仮定より，i 行目 $l+1$ 番目の有理数を $\dfrac{q_l}{r_l}$ とおける．当該部分だけ書き出すと，

$$
\begin{array}{cccc}
\multicolumn{2}{c}{\dfrac{p_l}{q_l}} & \multicolumn{2}{c}{\dfrac{q_l}{r_l}} \\[2ex]
\dfrac{p_l}{p_l+q_l} & \dfrac{p_l+q_l}{q_l} & \dfrac{q_l}{q_l+r_l} & \dfrac{q_l+r_l}{r_l}
\end{array}
.
$$

・k が偶数のとき，$2l = k$.

よって，$i+1$ 行目の $k+1$ 番目の有理数は $\dfrac{p_l+q_l}{q_l}$，$k+2$ 番目の有理数は $\dfrac{q_l}{q_l+r_l}$.

・k が奇数のとき，$2l+1 = k$.

よって，$i+1$ 行目の $k+1$ 番目の有理数は $\dfrac{q_l}{q_l+r_l}$，$k+2$ 番目の有理数は $\dfrac{q_l+r_l}{r_l}$.

ゆえに，k がいずれにせよ $i+1$ 行目 k 番目の有理数の分母は，直後の有理数の分子と等しい.

■

有理数の木の i 行目 k 番目の有理数を i と k の辞書式順序で並べると，次のようになる.

$$
\underbrace{\frac{1}{1}}_{0\text{ 行目}},\ \underbrace{\frac{1}{2},\frac{2}{1}}_{1\text{ 行目}},\ \underbrace{\frac{1}{3},\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{1}}_{2\text{ 行目}},\ \underbrace{\frac{1}{4},\frac{4}{3},\frac{3}{5},\frac{5}{2},\frac{2}{5},\frac{5}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{1}}_{3\text{ 行目}},\ \cdots.
$$

補題 3.1.1 と補題 3.3.1 より，次の定理がわかる.

定理 3.3.2

上の有理数列は，どの項の分母も，次の項の分子と等しい.

$n \in \mathbb{N},\ 0 \leq n$ に対し，

$$\begin{cases} f(0) & = 1 \\ f(2n+1) & = f(n) \\ f(2n+2) & = f(n) + f(n+1) \end{cases}$$

と定義する．

定理 3.3.3

$i, k \in \mathbb{N},\ 0 \leq k < 2^i$ に対して，$\dfrac{f(2^i + k - 1)}{f(2^i + k)}$ は $\mathbf{T}$ の i 行目 k 番目の有理数と完全に一致する．

(証明)

i) $i = 0$ のとき，$k = 0$.

$$\frac{f(2^0 + 0 - 1)}{f(2^0 + 0)} = \frac{f(0)}{f(1)} = \frac{1}{1}.$$

ii) i のとき成り立つと仮定する．

帰納法の仮定より，$\mathbf{T}$ の i 行目 k 番目の有理数は，$\dfrac{f(2^i + k - 1)}{f(2^i + k)}$ とおける．$\mathbf{T}$ の定義より，当該部分だけ書き出すと，

$$\frac{f(2^i + k - 1)}{f(2^i + k)}$$

$$\frac{f(2^i + k - 1)}{f(2^i + k - 1) + f(2^i + k)} \qquad \frac{f(2^i + k - 1) + f(2^i + k)}{f(2^i + k)}$$

.

定理 3.2.1 より，$\dfrac{f(2^i + k - 1)}{f(2^i + k - 1) + f(2^i + k)}$ と $\dfrac{f(2^i + k - 1) + f(2^i + k)}{f(2^i + k)}$ は既約分数である．

f の定義より,

$$\frac{f(2^i+k-1)}{f(2^i+k-1)+f(2^i+k)} = \frac{f(2^{i+1}+2k-1)}{f(2^{i+1}+2k)},$$

$$\frac{f(2^i+k-1)+f(2^i+k)}{f(2^i+k)} = \frac{f(2^{i+1}+2k)}{f(2^{i+1}+2k+1)}.$$

よって，$0 \leq h < 2^{i+1}$ のとき，$\dfrac{f(2^{i+1}+h-1)}{f(2^{i+1}+h)}$ は，$\mathbf{T}$ の $i+1$ 行目 h 番目の有理数で，既約分数である．

■

定理 3.3.3 より，$f(2^i+k)$ は有理数の木の i 行目 k 番目の有理数の分母であることが分かり，

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{1},\ \cdots$$

と

$$\frac{f(0)}{f(1)},\ \frac{f(1)}{f(2)},\ \frac{f(2)}{f(3)},\ \cdots$$

は完全に一致することが分かった．以上より，次の定理が得られる．

定理 3.3.4

有理数列

$$\frac{f(0)}{f(1)}, \frac{f(1)}{f(2)}, \frac{f(2)}{f(3)}, \cdots$$

には，すべての正の既約分数がちょうど一回だけ現れる．

数列 $\{f(n)\}$ は二つおきに偶数になっている．すなわち，

定理 3.3.5

任意の $n \in \mathbb{N}$ $(0 \leq n)$ に対して，$f(3n)$，$f(3n+1)$ は奇数であり，$f(3n+2)$ は偶数である．

(証明)

i) $n=0$ のとき，$f(0)=f(1)=1$，$f(2)=2$.

ii) n まで成り立つと仮定する．$n+1$ のときについて考える．

n が偶数か奇数かで場合分けをする．$k \in \mathbb{N}\ (0 \leq k)$ とする．

I) $n=2k$ のとき，

$$\begin{aligned} f(3n+3) &= f(6k+3) \\ &= f(3k+1). \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(3n+4) &= f(6k+4) \\ &= f(3k+2)+f(3k). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(3n+5) &= f(6k+5) \\ &= f(3k+2). \end{aligned}$$

帰納法の仮定より，

$$f(3k)=2a-1,\ f(3k+1)=2b-1,\ f(3k+2)=2c$$

とおける．但し，$a,b,c \in \mathbb{N}\ (1 \leq a,b,c)$.

よって，

$$f(3n+3)=2b-1. \qquad f(3n+4)=2(a+c)-1.$$
$$f(3n+5)=2c.$$

II) $n=2k+1$ のとき，I) のときと同じようにして示せる．

■

補題 3.3.6

任意の $i,a \in \mathbb{N}\ (i,a \geq 0)$ に対して，$f(a)=f((a+1)2^i-1)$.

(証明)

i) $i=0$ のとき，$f((a+1)2^0-1)=f(a)$.

ii) i のとき，成り立つと仮定する．$i+1$ のときについて考える．

f の定義より，

$$\begin{aligned} f(a) &= f((a+1)2^{i+1}-1) \\ &= f((a+1)2^{i}-1) \\ &= f(a). \end{aligned}$$

■

有理数の木の i 行目の有理数の分母のみを並べた列

$$f(2^i),\ \cdots,\ f(2^i+2^{i-1}-1),\ f(2^i+2^{i-1}),\ \cdots, f(2^i+2^i-1)$$

を考える．この列の中央で前半と後半に分けたときの前半の末尾，すなわち，$2^{i-1}-1$ 番目は常に 2 であり，これを中心に左右対称になっていることを示す．

定理 3.3.7

任意の $i, k \in \mathbb{N}$ $(1 \leq i,\ 0 \leq k < 2^{i-1})$ に対して，

$$\begin{aligned} f(2^i+2^{i-1}-1) &= 2, \\ f(2^i+2^{i-1}-1-k) &= f(2^i+2^{i-1}-1+k). \end{aligned}$$

(証明)

補題 3.3.6 より，

$$\begin{aligned} f(2^i+2^{i-1}-1) &= f((2+1)2^{i-1}-1) \\ &= f(2) = 2. \end{aligned}$$

i と k に関する 2 重帰納法で示す．すなわち，i 以前の成立を仮定し，$i+1$ での成立を示すところで，k に関する帰納法を用いる．

i) $i=1$ のとき，$k=0$.

$$f(2^1+2^0-1+0) = f(2^1+2^0-1-0) = f(2) = 2.$$

ii) i のとき成り立つと仮定する．$i+1$ のときについて考える．

I) $k=0$ のとき,

$$f(2^{i+1}+2^i-1+0)=f(2^{i+1}+2^i-1-0)=2.$$

II) k のとき成り立つと仮定する．$k+1$ のときについて考える．$h\in\mathbb{N}$, $0\leq h$ とする．

(1) $k=2h$ のとき,

$$\begin{aligned}f(2^{i+1}+2^i-2-2h)&=f(2^i+2^{i-1}-2-h)+f(2^i+2^{i-1}-1-h)\\&=f(2^i+2^{i-1}+h)+f(2^i+2^{i-1}-1+h)\\&=f(2^{i+1}+2^i+2h).\end{aligned}$$

(2) $k=2h+1$ のとき,

$$\begin{aligned}f(2^{i+1}+2^i-2-(2h+1))&=f(2^i+2^{i-1}-h-2)\\&=f(2^i+2^{i-1}+h)\\&=f(2^{i+1}+2^i+(2h+1)).\end{aligned}$$

■

また，i 行目の分母の総和は 3^i である．すなわち,

定理 3.3.8

$0\leq i$ に対して,

$$\sum_{k=0}^{2^i-1}f(2^i+k)=3^i.$$

(証明)

i) $i=0$ のとき,

$$\sum_{k=0}^{2^0-1}f(2^0+k)=f(1)=1=3^0.$$

ii) i のとき成り立つと仮定する．$i+1$ のときについて考える．

$$\sum_{k=0}^{2^{i+1}-1}f(2^{i+1}+k)=\sum_{h=0}^{2^i-1}\left\{f(2^{i+1}+2h)+f(2^{i+1}+2h+1)\right\}.$$

ここで，

$$\begin{aligned}\sum_{h=0}^{2^i-1} f(2^{i+1}+2h) &= \sum_{h=0}^{2^i-1} \left\{f(2^i+h)+f(2^i+h-1)\right\} \\ &= \sum_{h=0}^{2^i-1} f(2^i+h) + \sum_{h=0}^{2^i-1} f(2^i+h-1) \\ &= 3^i + f(2^i-1) + \sum_{h=1}^{2^i-1} f(2^i+h-1) \\ &= 3^i + f(2^{i+1}-1) + \sum_{h=1}^{2^i-1} f(2^i+h-1) \\ &= 3^i + \sum_{h=1}^{2^i} f(2^i+h-1) \\ &= 3^i + \sum_{h'=0}^{2^i-1} f(2^i+h') \\ &= 3^i+3^i.\end{aligned}$$

但し，$h' = h-1$. また，

$$\begin{aligned}\sum_{h=0}^{2^i-1} f(2^{i+1}+2h+1) &= \sum_{h=0}^{2^i-1} f(2^i+h) \\ &= 3^i.\end{aligned}$$

以上より，

$$\sum_{k=0}^{2^{i+1}-1} f(2^{i+1}+k) = 3^i+3^i+3^i = 3^{i+1}.$$

■

引き続き i 行目の分母だけを並べた列を考える．k を偶数とするとき k 番目と，k の 2 進展開を逆順に書いた 2 進数の値番目とが等しくなることを示そう．

補題 3.3.9

任意の $i, k \in \mathbb{N}$ $(1 \le i,\ 0 \le k < 2^{i-1})$ に対して，

$$f(2^i+k) = f(2^{i-1}+k) + f(k).$$

(証明)

i) $i=1$ のとき，$k=0$.

$$\begin{aligned} f(2^1+0) = f(2) &= f(1)+f(0) \\ &= f(2^0+0)+f(0). \end{aligned}$$

ii) i のとき成り立つと仮定する．$i+1$ のときについて考える．$h \in \mathbb{N}$ とする．

I) $0 \leq h,\ k=2h+1$ のとき，

$$\begin{aligned} f(2^{i+1}+k) &= f(2^{i+1}+2h+1) \\ &= f(2^i+h) \\ &= f(2^{i-1}+h)+f(h) \\ &= f(2^i+2h+1)+f(2h+1) \\ &= f(2^i+k)+f(k). \end{aligned}$$

II) $1 \leq h,\ k=2h$ のとき，

$$\begin{aligned} f(2^{i+1}+k) &= f(2^{i+1}+2h) \\ &= f(2^i+h)+f(2^i+h-1) \\ &= f(2^{i-1}+h)+f(h)+f(2^{i-1}+h-1)+f(h-1) \\ &= f(2^{i-1}+h)+f(2^{i-1}+h-1)+f(h)+f(h-1) \\ &= f(2^i+2h)+f(2h) \\ &= f(2^i+k)+f(k). \end{aligned}$$

III) $k=0$ のとき，補題 3.3.6 より，

$$\begin{aligned} f(2^{i+1}) &= f(2^i)+f(2^i-1) \\ &= f(2^i)+f((0+1)2^i-1) \\ &= f(2^i)+f(0). \end{aligned}$$

■

定理 3.3.10

任意の $i, n \in \mathbb{N},\ i \geq 2,\ 1 \leq m_n < \cdots < m_2 < m_1 \leq i-1 \quad (1 \leq n \leq i-1)$ に対して，

$$f(2^i + 2^{m_1} + 2^{m_2} + \cdots + 2^{m_n}) = f(2^i + 2^{i-m_1} + 2^{i-m_2} + \cdots + 2^{i-m_n}).$$

(証明)

i) $i = 2$ のとき，$m_1 = 1$.

$$f(2^2 + 2^1) = f(2^2 + 2^{2-1}).$$

ii) i まで成り立つと仮定する．$i+1$ のときについて考える．

このとき，$1 \leq m_n \leq i \quad (1 \leq n \leq i)$.

I) $m_1 \neq i$ のとき，

$$\begin{aligned}
&f(2^{i+1} + 2^{m_1} + 2^{m_2} + \cdots + 2^{m_n}) \\
=&f(2^i + 2^{m_1} + 2^{m_2} + \cdots + 2^{m_n}) + f(2^{m_1} + 2^{m_2} + \cdots + 2^{m_n}) \\
=&f(2^i + 2^{i-m_1} + 2^{i-m_2} + \cdots + 2^{i-m_n}) + f(2^{m_1} + 2^{m_1-m_2} + \cdots + 2^{m_1-m_n}) \\
=&f(2^i + 2^{i-m_1} + 2^{i-m_2} + \cdots + 2^{i-m_n}) \\
&\qquad\qquad + f\left((2^{m_1} + 2^{m_1-m_2} + \cdots + 2^{m_1-m_n} + 1)2^{i-m_1} - 1\right) \\
=&f(2^i + 2^{i-m_1} + 2^{i-m_2} + \cdots + 2^{i-m_n}) + f(2^i + 2^{i-m_2} + \cdots + 2^{i-m_n} + 2^{i-m_1} - 1) \\
=&f(2^{i+1} + 2^{i+1-m_1} + 2^{i+1-m_2} + \cdots + 2^{i+1-m_n}).
\end{aligned}$$

II) $m_1 = i$ のとき，

1) $m_2 \neq i-1$ のとき，

$$\begin{aligned}
&f(2^{i+1} + 2^{m_1} + 2^{m_2} + \cdots + 2^{m_n}) \\
=&f(2^{i+1} + 2^i + 2^{m_2} + \cdots + 2^{m_n}) \\
=&f(2^{i+1} + 2^i - (2^{m_2} + \cdots + 2^{m_n}) - 2) \\
=&f(2^i + 2^i - (2^{m_2} + \cdots + 2^{m_n}) - 2) + f(2^i - (2^{m_2} + \cdots + 2^{m_n}) - 2)
\end{aligned}$$

$$=f(2^i+2^i-(2^{m_2}+\cdots+2^{m_n})-2)+f(2^{i-1}+2^{i-1}-(2^{m_2}+\cdots+2^{m_n})-2)$$
$$=f(2^i+2^{m_2}+\cdots+2^{m_n})+f(2^{i-1}+2^{m_2}+\cdots+2^{m_n})$$
$$=f(2^i+2^{i-m_2}+\cdots+2^{i-m_n})+f(2^{i-1}+2^{i-1-m_2}+\cdots+2^{i-1-m_n})$$
$$=f(2^i+2^{i-m_2}+\cdots+2^{i-m_n})+f(2^i+2^{i-m_2}+\cdots+2^{i-m_n}+1)$$
$$=f(2^{i+1}+2^{i+1-m_2}+\cdots+2^{i+1-m_n}+2^1)$$
$$=f(2^{i+1}+2^{i+1-m_1}+2^{i+1-m_2}+\cdots+2^{i+1-m_n}).$$

2) $m_2=i-1,\ m_3=i-2,\ \cdots,\ m_h=i+1-h,\ m_{h+1}\neq(i+1)-(h+1)$ のとき，$(2\leq h\leq i-1)$.

$$f(2^{i+1}+2^{m_1}+2^{m_2}+\cdots+2^{m_n})$$
$$=f(2^{i+1}+2^i+2^{m_2}+\cdots+2^{m_n})$$
$$=f(2^{i+1}+2^i-(2^{m_2}+\cdots+2^{m_n})-2)$$
$$=f(2^i+2^i-(2^{m_2}+\cdots+2^{m_n})-2)+f(2^i-(2^{m_2}+\cdots+2^{m_n})-2)$$
$$=f(2^i+2^i-(2^{m_2}+\cdots+2^{m_n})-2)+f(2^{i-1}+2^{i-1}-(2^{m_2}+\cdots+2^{m_n})-2)$$
$$=f(2^i+2^{m_2}+\cdots+2^{m_n})+f(2^{i-1}+2^{i-1}-(2^{i-1}+2^{m_3}+\cdots+2^{m_n})-2)$$
$$=f(2^i+2^{m_2}+\cdots+2^{m_n})+f(2^{i-1}-(2^{m_3}+\cdots+2^{m_n})-2)$$
$$=\cdots$$
$$=f(2^i+2^{m_2}+\cdots+2^{m_n})+f(2^{i-h+1}-(2^{m_{h+1}}+\cdots+2^{m_n})-2)$$
$$=f(2^i+2^{m_2}+\cdots+2^{m_n})+f(2^{i-h}+2^{i-h}-(2^{m_{h+1}}+\cdots+2^{m_n})-2)$$
$$=f(2^i+2^{m_2}+\cdots+2^{m_n})+f(2^{i-h}+2^{m_{h+1}}+\cdots+2^{m_n})$$
$$=f(2^i+2^{i-m_2}+\cdots+2^{i-m_n})+f(2^{i-h}+2^{i-h-m_{h+1}}+\cdots+2^{i-h-m_n})$$
$$=f(2^i+2^{i-m_2}+\cdots+2^{i-m_n})+f((2^{i-h}+2^{i-h-m_{h+1}}+\cdots+2^{i-h-m_n}+1)2^h-1)$$
$$=f(2^i+2^{i-m_2}+\cdots+2^{i-m_n})+f(2^i+2^{i-m_{h+1}}+\cdots+2^{i-m_n}+2^h-1)$$
$$=f(2^i+2^{i-m_2}+\cdots+2^{i-m_n})$$
$$\qquad+f(2^i+2^{i-m_{h+1}}+\cdots+2^{i-m_n}+2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{h-1})$$

$$
\begin{aligned}
=& f(2^i + 2^{i-m_2} + \cdots + 2^{i-m_n}) \\
&\qquad + f(2^i + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{h-1} + 2^{i-m_{h+1}} + \cdots + 2^{i-m_n} + 1) \\
=& f(2^i + 2^{i-m_2} + \cdots + 2^{i-m_n}) + f(2^i + 2^{i-m_2} + \cdots + 2^{i-m_n} + 1) \\
=& f(2^{i+1} + 2^{i+1-m_2} + \cdots + 2^{i+1-m_n} + 2^1) \\
=& f(2^{i+1} + 2^{i+1-m_1} + 2^{i+1-m_2} + \cdots + 2^{i+1-m_n}).
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

3.4 最大値

補題 3.4.1

任意の $n, k \in \mathbb{N}$ $(n, k \geq 1)$ に対して，次が成り立つ.

(1) $f\left(2^{2k+1}n + \dfrac{2^{2k}-4}{3}\right) < f\left(2^{2k+1}n + \dfrac{2^{2k+1}-2}{3}\right).$

(2) $f\left(2^{2k+1}n + \dfrac{2^{2k+2}-4}{3}\right) > f\left(2^{2k+1}n + \dfrac{5 \cdot 2^{2k}-2}{3}\right).$

(3) $f\left(2^{2k+2}n + \dfrac{2^{2k+1}-2}{3}\right) < f\left(2^{2k+2}n + \dfrac{2^{2k+2}-4}{3}\right).$

(4) $f\left(2^{2k+2}n + \dfrac{2^{2k+3}-2}{3}\right) > f\left(2^{2k+2}n + \dfrac{5 \cdot 2^{2k+1}-4}{3}\right).$

i) $k = 1$ のとき，

(1)

$$\begin{aligned} f(8n+2) - f(8n) &= \{f(4n+1) + f(4n)\} - \{f(4n) + f(4n-1)\} \\ &= f(4n+1) - f(4n-1) \\ &= f(2n) - f(2n-1) \\ &= \{f(n) + f(n-1)\} - f(n-1) \\ &= f(n) > 0. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} f(8n+4) - f(8n+6) &= \{f(4n+2) + f(4n+1)\} - \{f(4n+3) + f(4n+2)\} \\ &= f(4n+1) - f(4n+3) \\ &= f(2n) - f(2n+1) \\ &= \{f(n) + f(n-1)\} - f(n) \\ &= f(n-1) > 0. \end{aligned}$$

(3)

$$f(16n+4)-f(16n+2)=\{f(8n+2)+f(8n+1)\}-\{f(8n+1)+f(8n)\}$$
$$=f(8n+2)-f(8n)>0.$$

(4)

$$f(16n+10)-f(16n+12)=\{f(8n+5)+f(8n+4)\}-\{f(8n+6)+f(8n+5)\}$$
$$=f(8n+4)-f(8n+6)>0.$$

ii) k のとき成り立つと仮定する．$k+1$ のときについて考える．

(1)

$$f\left(2^{2k+3}n+\frac{2^{2k+3}-2}{3}\right)-f\left(2^{2k+3}n+\frac{2^{2k+2}-4}{3}\right)$$
$$=\left\{f\left(2^{2k+2}+\frac{2^{2k+2}-1}{3}\right)+f\left(2^{2k+2}+\frac{2^{2k+2}-4}{3}\right)\right\}$$
$$-\left\{f\left(2^{2k+2}n+\frac{2^{2k+1}-2}{3}\right)+f\left(2^{2k+2}n+\frac{2^{2k+1}-5}{3}\right)\right\}$$
$$>f\left(2^{2k+2}+\frac{2^{2k+2}-1}{3}\right)-f\left(2^{2k+2}n+\frac{2^{2k+1}-5}{3}\right)$$
$$=f\left(2^{2k+1}n+\frac{2^{2k+1}-2}{3}\right)-f\left(2^{2k+1}n+\frac{2^{2k}-4}{3}\right)>0.$$

(2)

$$\begin{aligned}
&f\left(2^{2k+3}n+\frac{2^{2k+4}-4}{3}\right)-f\left(2^{2k+3}n+\frac{5\cdot 2^{2k+2}-2}{3}\right)\\
=&\left\{f\left(2^{2k+2}+\frac{2^{2k+3}-2}{3}\right)+f\left(2^{2k+2}+\frac{2^{2k+3}-5}{3}\right)\right\}\\
&\quad-\left\{f\left(2^{2k+2}n+\frac{5\cdot 2^{2k+1}-1}{3}\right)+f\left(2^{2k+2}n+\frac{5\cdot 2^{2k+1}-4}{3}\right)\right\}\\
>&f\left(2^{2k+2}+\frac{2^{2k+3}-5}{3}\right)-f\left(2^{2k+2}n+\frac{5\cdot 2^{2k+1}-1}{3}\right)\\
=&f\left(2^{2k+1}n+\frac{2^{2k+2}-4}{3}\right)-f\left(2^{2k+1}n+\frac{5\cdot 2^{2k}-2}{3}\right)>0.
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
&f\left(2^{2k+4}n+\frac{2^{2k+4}-4}{3}\right)-f\left(2^{2k+4}n+\frac{2^{2k+3}-2}{3}\right)\\
=&\left\{f\left(2^{2k+3}+\frac{2^{2k+3}-2}{3}\right)+f\left(2^{2k+3}+\frac{2^{2k+3}-5}{3}\right)\right\}\\
&\quad-\left\{f\left(2^{2k+3}n+\frac{2^{2k+2}-1}{3}\right)+f\left(2^{2k+3}n+\frac{2^{2k+2}-4}{3}\right)\right\}\\
>&f\left(2^{2k+3}+\frac{2^{2k+3}-5}{3}\right)-f\left(2^{2k+3}n+\frac{2^{2k+2}-1}{3}\right)\\
=&f\left(2^{2k+2}n+\frac{2^{2k+2}-4}{3}\right)-f\left(2^{2k+2}n+\frac{2^{2k+1}-2}{3}\right)>0.
\end{aligned}$$

(4)

$$
\begin{aligned}
&f\left(2^{2k+4}n+\frac{2^{2k+5}-2}{3}\right)-f\left(2^{2k+4}n+\frac{5\cdot 2^{2k+3}-4}{3}\right)\\
=&\left\{f\left(2^{2k+3}+\frac{2^{2k+4}-1}{3}\right)+f\left(2^{2k+3}+\frac{2^{2k+4}-4}{3}\right)\right\}\\
&\quad-\left\{f\left(2^{2k+3}n+\frac{5\cdot 2^{2k+2}-2}{3}\right)+f\left(2^{2k+3}n+\frac{5\cdot 2^{2k+2}-5}{3}\right)\right\}\\
>&f\left(2^{2k+3}+\frac{2^{2k+4}-1}{3}\right)-f\left(2^{2k+3}n+\frac{5\cdot 2^{2k+2}-5}{3}\right)\\
=&f\left(2^{2k+2}n+\frac{2^{2k+3}-2}{3}\right)-f\left(2^{2k+2}n+\frac{5\cdot 2^{2k+1}-4}{3}\right)>0.
\end{aligned}
$$

■

$1\leq i\in\mathbb{N}$ に対し，

$$
\begin{cases}
F_1=F_2=1\\
F_{i+2}=F_{i+1}+F_i
\end{cases}
$$

と定める．$\{F_i\}_{1\leq i}$ をフィボナッチ数列という．i 行目に現れる有理数の分母の最大値は，F_{i+2} と一致する．すなわち，

定理 3.4.2

任意の $i\in\mathbb{N}\ (0\leq i)$ に対して，$F_{i+2}=max\{f(2^i+k)\mid 0\leq k<2^i\}$.

(証明)

$M_i=max\{f(2^i+k)\mid 0\leq k<2^i\}$ とおく．

隣同士を比べてトーナメントのように i 行目の最大値を求める．

$M_0=F_2=1$，$M_1=F_3=2$ は明らかに分かる．$i\geq 2$ のときについて考える．$n\in\mathbb{N},\ 1\leq n$ とする．

⟨ 1 回目の比較 ⟩

$f(2n+1)=f(n)>f(n)+f(n+1)=f(2n+2)$ より，

$$f(2^i)>f(2^i+1),\ f(2^i+2)>f(2^i+3),\ \cdots,\ f(2^i+2^i-2)>f(2^i+2^i-1).$$

つまり，$f(2^i)$, $f(2^i+2)$, $\cdots$, $f(2^i+2^i-2)$ が残る．

$\langle$ 2回目の比較 $\rangle$

補題 3.4.1 より，

$$f(2^i) = f(2^3 \cdot 2^{i-3}+0) < f(2^3 \cdot 2^{i-3}+2) = f(2^i+2),$$
$$f(2^i+4) = f(2^3 \cdot 2^{i-3}+4) > f(2^3 \cdot 2^{i-3}+6) = f(2^i+6),$$
$$f(2^i+8) = f(2^3(2^{i-3}+1)+0) < f(2^3(2^{i-3}+1)+2) = f(2^i+10),$$
$$\vdots$$
$$f(2^i+2^i-4) = f(2^3(2^{i-3}+2^{i-3}-1)+4) > f(2^3(2^{i-3}+2^{i-3}+6) = f(2^i+2^i-2).$$

よって，$f(2^i+2)$, $f(2^i+4)$, $f(2^i+10)$, $\cdots$, $f(2^i+2^i-4)$ が残る．

$\langle$ 3回目の比較 $\rangle$

補題 3.4.1 より，

$$f(2^i+2) = f(2^4 \cdot 2^{i-4}+2) < f(2^4 \cdot 2^{i-4}+4) = f(2^i+4),$$
$$f(2^i+10) = f(2^4 \cdot 2^{i-4}+10) > f(2^4 \cdot 2^{i-4}+12) = f(2^i+12),$$
$$\vdots$$
$$f(2^i+2^i-6) = f(2^4(2^{i-4}+2^{i-4}-1)+10) > f(2^4(2^{i-4}+2^{i-4}-1)+12) = f(2^i+2^i-4).$$

よって，$f(2^i+4)$, $f(2^i+10)$, $\cdots$, $f(2^i+2^i-6)$ が残る．

このように比較していくと，

・i が偶数のとき，

$\langle$ $i-1$ 回目の比較 $\rangle$

補題 3.4.1 より，

$$f\left(2^i \cdot 1 + \frac{2^{i-1}-2}{3}\right) < f\left(2^i \cdot 1 + \frac{2^i-4}{3}\right),$$
$$f\left(2^i \cdot 1 + \frac{2^{i+1}-2}{3}\right) > f\left(2^i \cdot 1 + \frac{5 \cdot 2^{i-1}-4}{3}\right).$$

$$f\left(2^i+\frac{2^i-4}{3}\right)=f\left(2^i+2^{i-1}-1-\frac{2^{i-1}+1}{3}\right),$$

$$f\left(2^i+\frac{2^{i+1}-2}{3}\right)=f\left(2^i+2^{i-1}-1+\frac{2^{i-1}+1}{3}\right)$$

であるから，定理 3.3.7 より，

$$f\left(2^i+\frac{2^i-4}{3}\right)=f\left(2^i+\frac{2^{i+1}-2}{3}\right).$$

よって，

$$M_i=f\left(2^i+\frac{2^i-4}{3}\right)=f\left(2^i+\frac{2^{i+1}-2}{3}\right).$$

· i が奇数のとき，

$\langle\ i-1$ 回目の比較 $\rangle$

補題 3.4.1 より，

$$f\left(2^i\cdot 1+\frac{2^{i-1}-4}{3}\right)<f\left(2^i\cdot 1+\frac{2^i-2}{3}\right)$$

$$f\left(2^i\cdot 1+\frac{2^{i+1}-4}{3}\right)>f\left(2^i\cdot 1+\frac{5\cdot 2^{i-1}-2}{3}\right).$$

$$f\left(2^i+\frac{2^i-2}{3}\right)=f\left(2^i+2^{i-1}-1-\frac{2^{i-1}-1}{3}\right),$$

$$f\left(2^i+\frac{2^{i+1}-4}{3}\right)=f\left(2^i+2^{i-1}-1+\frac{2^{i-1}-1}{3}\right)$$

であるから，定理 3.3.7 より，

$$f\left(2^i+\frac{2^i-2}{3}\right)=f\left(2^i+\frac{2^{i+1}-4}{3}\right).$$

よって，

$$M_i=f\left(2^i+\frac{2^i-2}{3}\right)=f\left(2^i+\frac{2^{i+1}-4}{3}\right).$$

次に，$M_i = F_{i+2}$ を示す.

・i が偶数のとき，

$$\begin{aligned} M_i &= f\left(2^i + \frac{2^{i+1}-2}{3}\right) \\ &= f\left(2^{i-1} + \frac{2^i-1}{3}\right) + f\left(2^{i-1} + \frac{2^i-4}{3}\right) \\ &= f\left(2^{i-2} + \frac{2^{i-1}-2}{3}\right) + M_{i-1} \\ &= M_{i-2} + M_{i-1}. \end{aligned}$$

・i が奇数のとき，

$$\begin{aligned} M_i &= f\left(2^i + \frac{2^i-2}{3}\right) \\ &= f\left(2^{i-1} + \frac{2^{i-1}-1}{3}\right) + f\left(2^{i-1} + \frac{2^{i-1}-4}{3}\right) \\ &= f\left(2^{i-2} + \frac{2^{i-2}-2}{3}\right) + M_{i-1} \\ &= M_{i-2} + M_{i-1}. \end{aligned}$$

よって，$M_i = M_{i-2} + M_{i-1}$.

また，$M_0 = F_2 = 1$，$M_1 = F_3 = 2$ であるから，$M_i = F_{i+2}$.

■

4　有理数の木と連分数

有理数の木に現れる有理数を連分数展開すると，次のようになる．

$$
\begin{array}{cccccccc}
\multicolumn{8}{c}{[0,1]=[1]} \\
\multicolumn{4}{c}{[0,2]} & \multicolumn{4}{c}{[2]} \\
\multicolumn{2}{c}{[0,3]} & \multicolumn{2}{c}{[1,2]} & \multicolumn{2}{c}{[0,1,2]} & \multicolumn{2}{c}{[3]} \\
[0,4] & [1,3] & [0,1,1,2] & [2,2] & [0,2,2] & [1,1,2] & [0,1,3] & [4] \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}
.
$$

定理 4.1.1

任意の既約分数 $\dfrac{p}{q}$ に対し，その連分数展開を

$$\frac{p}{q} = [a_0, a_1, \cdots, a_N]$$

とする．このとき，

$$
\begin{aligned}
\frac{p+q}{q} &= [1 + a_0, a_1, \cdots, a_N], \\
\frac{p}{p+q} &= \begin{cases} [0, a_1 + 1, a_2, \cdots, a_N] & (a_0 = 0 \text{ のとき}), \\ [0, 1, a_0, a_1, \cdots, a_N] & (a_0 \neq 0 \text{ のとき}). \end{cases}
\end{aligned}
$$

但し，$a_0, a_1, \cdots, a_N \in \mathbb{N}$，$a_N \neq 1$.

(証明)

$$
\begin{aligned}
\frac{p+q}{q} &= 1 + \frac{p}{q} \\
&= 1 + a_0 + \frac{1}{a'_1} \\
&= [1 + a_0, a_1, \cdots, a_N].
\end{aligned}
$$

i) $a_0 = 0$ のとき，

$\dfrac{p}{q} = [0, a'_1] = \dfrac{1}{a'_1}$ より， $\dfrac{q}{p} = a'_1$.
よって，

$$
\begin{aligned}
\frac{p}{p+q} &= \frac{1}{\dfrac{p+q}{p}} \\
&= \frac{1}{1 + \dfrac{q}{p}} \\
&= \frac{1}{1 + a'_1} \\
&= \frac{1}{1 + a_1 + \dfrac{1}{a'_2}} \\
&= [0, 1 + a_1, a'_2] = [0, 1 + a_1, a_2, \cdots, a_N].
\end{aligned}
$$

ii) $a_0 \neq 0$ のとき，

$\dfrac{p}{q} = a'_0$ より， $\dfrac{q}{p} = \dfrac{1}{a'_0}$.

よって，

$$\frac{p}{p+q} = \cfrac{1}{1+\cfrac{q}{p}}$$
$$= \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{a_0'}}$$
$$= [0,1,a_0'] = [0,1,a_0,a_1,\cdots,a_N].$$

■

有理数の木の i 行目 k 番目の有理数を連分数展開すると，その商の和は $i+1$ である．すなわち，

定理 4.1.2

$i \in \mathbb{N}$ $(0 \leq i)$，i 行目の任意の有理数 $\dfrac{p}{q}$ に対し，その連分数展開を $\dfrac{p}{q} = [a_0, a_1, \cdots, a_N]$ とすると，

$$\sum_{h=0}^{N} a_h = i+1.$$

(証明)

i) $i=0$ のとき，

$$\frac{f(0)}{f(1)} = \frac{1}{1} = [1].$$

ii) i のとき成り立つと仮定する．$i+1$ のときについて考える．

i 行目の任意の有理数からできる $i+1$ 行目の有理数の連分数表示の商の和が $i+2$ であることを示せばよい．

i 行目の任意の有理数 $\dfrac{p}{q}$ の連分数表示を $[a_0, a_1, \cdots, a_N]$ とおくと，帰納法の仮定より，$\displaystyle\sum_{h=0}^{N} a_h = i+1$ とおける．

$\dfrac{p+q}{q}=[a_0+1,a_1,\cdots,a_N]$ であるから，商の和は $i+2$ である．

・$a_0=0$ のとき，

$\dfrac{p}{p+q}=[0,a_1+1,a_2,\cdots,a_N]$ であるから，商の和は $i+2$ である．

・$a_0\neq 0$ のとき，

$\dfrac{p}{p+q}=[0,1,a_0,a_1,\cdots,a_N]$ であるから，商の和は $i+2$ である．

■

定理4.1.2より任意の既約分数を連分数展開してその商の和を求めることにより，何行目に現れるかがすぐにわかる．

定理 4.1.3

$i\in\mathbb{N}$ $(i\geq 3)$ とする．$j,h\in\mathbb{N}$ $(1\leq j\leq i-1,\ 0\leq h<2^j)$ に対し，$\dfrac{f(2^j+h-1)}{f(2^j+h)}=[a_0,a_1,\cdots,a_N]$ とすると，

$$\frac{f(2^i+2^j+h-1)}{f(2^i+2^j+h)}=\begin{cases}[a_0,a_1,\cdots,a_N-1,1,i-j] & (0\leq h<2^{j-1}\text{のとき}),\\ \\ [a_0,a_1,\cdots,a_N,i-j] & (2^{j-1}\leq h<2^j\text{のとき}).\end{cases}$$

但し，$a_0,a_1,\cdots,a_N\in\mathbb{N},a_N\neq 1$.

(証明)

i) $i=3$ のとき，$j=1,2$.

・$j=1$ のとき，$h=0,1$.

$h=0$ のとき，

$$\frac{f(2^1+0-1)}{f(2^1+0)}=\frac{f(1)}{f(2)}=\frac{1}{2}=[0,2].\qquad \frac{f(2^3+2^1+0-1)}{f(2^3+2^1+0)}=\frac{f(9)}{f(10)}=\frac{3}{5}=[0,1,1,2].$$

$h=1$ のとき,

$$\frac{f(2^1+1-1)}{f(2^1+1)} = \frac{f(2)}{f(3)} = \frac{2}{1} = [2]. \qquad \frac{f(2^3+2^1-1)}{f(2^3+2^1+1)} = \frac{f(10)}{f(11)} = \frac{5}{2} = [2,2].$$

・$j=2$ のとき, $h=0,1,2,3.$

$h=0$ のとき,

$$\frac{f(2^2-1)}{f(2^2+0)} = \frac{1}{3} = [0,3]. \qquad \frac{f(2^3+2^2-1)}{f(2^3+2^2+0)} = \frac{2}{5} = [0,2,1,1].$$

$h=1$ のとき,

$$\frac{f(2^2+0)}{f(2^2+1)} = \frac{3}{2} = [1,2]. \qquad \frac{f(2^3+2^2+0)}{f(2^3+2^2+1)} = \frac{5}{3} = [1,1,1,1].$$

$h=2$ のとき,

$$\frac{f(2^2+1)}{f(2^2+2)} = \frac{2}{3} = [0,1,2]. \qquad \frac{f(2^3+2^2+1)}{f(2^3+2^2+2)} = \frac{3}{4} = [0,1,2,1].$$

$h=3$ のとき,

$$\frac{f(2^2+2)}{f(2^2+3)} = \frac{3}{1} = [3]. \qquad \frac{f(2^3+2^2+2)}{f(2^3+2^2+3)} = \frac{4}{1} = [3,1].$$

ii) i のとき成り立つと仮定する. $i+1$ のときについて考える.

I) $i+1-j>1$, すなわち, $1 \leq j < i$ のとき,

$\dfrac{f(2^j+h-1)}{f(2^j+h)} = [a_0, a_1, \cdots, a_N] \quad (a_N \neq 1)$ とおく.

・$0 \leq h < 2^{j-1}$ のとき,

$$\begin{aligned}[a_0, a_1, \cdots, a_{N-1}, a_N - 1, 1, i+1-j] &= [a_0, a_1, \cdots, a_{N-1}, a_N - 1, 1, i-j, 1] \\ &= \frac{f(2^i+2^j+h-1)+f(2^j+h-1)}{f(2^i+2^j+h)+f(2^j+h)} \\ &= \frac{f(2^{i+1}+2^j+h-1)}{f(2^{i+1}+2^j+h)}.\end{aligned}$$

・$2^{j-1} \leq h < 2^j$ のとき,

$$\begin{aligned}[a_0, a_1, \cdots, a_N, i+1-j] &= [a_0, a_1, \cdots, a_N, i-j, 1] \\ &= \frac{f(2^i+2^j+h-1)+f(2^j+h-1)}{f(2^i+2^j+h)+f(2^j+h)} \\ &= \frac{f(2^{i+1}+2^j+h-1)}{f(2^{i+1}+2^j+h)}.\end{aligned}$$

II) $i+1-j=1$, すなわち, $j=i$ のとき,

$\dfrac{f(2^i+h-1)}{f(2^i+h)} = [\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_M] \quad (\alpha_M \neq 1)$ とおく.

・$0 \leq h < 2^{i-1}$ のとき,

1) $h = 4c \quad (0 \leq c < 2^{i-3})$ のとき,

$\dfrac{f(2^{i-1}+2c-1)}{f(2^{i-1}+2c)} = [\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_L] \quad (\beta_L \neq 1)$ とおく.

$$\begin{aligned}f(2^{i-1}+2c-1) &= f(2^{i-2}+c-1) \\ &< f(2^{i-2}+c-1)+f(2^{i-2}+c) \\ &= f(2^{i-1}+2c)\end{aligned}$$

より，$\dfrac{f(2^{i-1}+2c-1)}{f(2^{i-1}+2c)} < 1$．よって，$\beta_0 = 0$.

帰納法の仮定より，

$$\frac{f(2^i+2^{i-1}+2c-1)}{f(2^i+2^{i-1}+2c)} = [0, \beta_1, \cdots, \beta_{L-1}, \beta_L - 1, 1, 1].$$

$\mathbf{T}$ の定義より，当該部分だけ書き出すと，

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny] & \dfrac{f(2^i+2^{i-1}+2c-1)}{f(2^i+2^{i-1}+2c)} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \dfrac{f(2^{i+1}+2^i+4c-1)}{f(2^{i+1}+2^i+4c)} & & \dfrac{f(2^{i+1}+2^i+4c)}{f(2^{i+1}+2^i+4c+1)} \end{tikzcd}.$$

よって，定理 4.1.1 より，

$$\frac{f(2^{i+1}+2^i+4c-1)}{f(2^{i+1}+2^i+4c)} = [0, \beta_1 + 1, \beta_2, \cdots, \beta_{L-1}, \beta_L - 1, 1, 1].$$

$$\frac{f(2^{i+1}+2^i+4c)}{f(2^{i+1}+2^i+4c+1)} = [1, \beta_1, \cdots, \beta_{L-1}, \beta_L - 1, 1, 1].$$

また，$\mathbf{T}$ の定義より，当該部分だけ書き出すと，

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny] & \dfrac{f(2^{i-1}+2c-1)}{f(2^{i-1}+2c)} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \dfrac{f(2^i+4c-1)}{f(2^i+4c)} & & \dfrac{f(2^i+4c)}{f(2^i+4c+1)} \end{tikzcd}.$$

ゆえに，

$$\begin{aligned} \frac{f(2^i+4c-1)}{f(2^i+4c)} &= [0, \beta_1 + 1, \beta_2, \cdots, \beta_L] \\ &= [\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_M]. \end{aligned}$$

定理 1.5.3 より，連分数表示は一意的なので，$M=L$ で，

$$\alpha_0=0,\ \alpha_1=\beta_1+1,\ \alpha_n=\beta_n \quad (2\le n\le M).$$

従って，

$$\begin{aligned}\frac{f(2^i+4c)}{f(2^i+4c+1)}&=[1,\beta_1,\cdots,\beta_L]\\&=[1,\alpha_1-1,\alpha_2,\cdots,\alpha_M].\end{aligned}$$

以上より，

$$\frac{f(2^{i+1}+2^i+h-1)}{f(2^{i+1}+2^i+h)}=[\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{M-1},\alpha_M-1,1,1].$$

$$\frac{f(2^{i+1}+2^i+h)}{f(2^{i+1}+2^i+h+1)}=[1,\alpha_1-1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{M-1},\alpha_M-1,1,1].$$

同時に $h=4c+1$ のときも成り立つことを示せた.

2) $h=4c+2 \quad (0\le c<2^{i-3})$ のとき，

$\dfrac{f(2^{i-1}+2c)}{f(2^{i-2}+2c+1)}=[\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_K] \quad (\gamma_K\ne1)$ とおく.

$$\begin{aligned}f(2^{i-1}+2c)&=f(2^{i-2}+c)+f(2^{i-2}+c-1)\\&>f(2^{i-2}+c)\\&=f(2^{i-1}+2c+1)\end{aligned}$$

より，$\dfrac{f(2^{i-1}+2c)}{f(2^{i-1}+2c+1)}>1$．よって，$\gamma_0\ne0$.

帰納法の仮定より，

$$\frac{f(2^i+2^{i-1}+2c)}{f(2^i+2^{i-1}+2c+1)}=[\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_{K-1},\gamma_K-1,1,1].$$

T の定義より，当該部分だけ書き出すと，

$$\frac{f(2^i+2^{i-1}+2c)}{f(2^i+2^{i-1}+2c+1)}$$

$$\frac{f(2^{i+1}+2^i+4c+1)}{f(2^{i+1}+2^i+4c+2)} \qquad \frac{f(2^{i+1}+2^i+4c+2)}{f(2^{i+1}+2^i+4c+3)}$$

.

ゆえに，定理 4.1.1 より，

$$\frac{f(2^{i+1}+2^i+4c+1)}{f(2^{i+1}+2^i+4c+2)} = [0, 1, \gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_{K-1}, \gamma_K - 1, 1, 1],$$

$$\frac{f(2^{i+1}+2^i+4c+2)}{f(2^{i+1}+2^i+4c+3)} = [\gamma_0 + 1, \gamma_1, \cdots, \gamma_{K-1}, \gamma_K - 1, 1, 1].$$

また，$\mathbf{T}$ の定義より，当該部分だけ書き出すと，

$$\frac{f(2^{i-1}+2c)}{f(2^{i-1}+2c+1)}$$

$$\frac{f(2^i+4c+1)}{f(2^i+4c+2)} \qquad \frac{f(2^i+4c+2)}{f(2^i+4c+3)}$$

より，

$$\begin{aligned}\frac{f(2^i+4c+1)}{f(2^i+4c+2)} &= [0, 1, \gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_K] \\ &= [\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_M].\end{aligned}$$

定理 1.5.3 より，連分数表示は一意的なので，$K = M - 2$ で，

$$\alpha_0 = 0,\ \alpha_1 = 1,\ \alpha_n = \gamma_{n-2} \quad (2 \le n \le M).$$

よって，

$$\begin{aligned}\frac{f(2^i+4c+2)}{f(2^i+4c+3)} &= [\gamma_0 + 1, \gamma_1, \cdots, \gamma_K] \\ &= [\alpha_2 + 1, \alpha_3, \cdots, \alpha_M]. \qquad (4.1.1)\end{aligned}$$

ゆえに,

$$\frac{f(2^{i+1}+2^i+4c+1)}{f(2^{i+1}+2^i+4c+2)} = [\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{M-1}, \alpha_M - 1, 1, 1].$$

$$\frac{f(2^{i+1}+2^i+4c+2)}{f(2^{i+1}+2^i+4c+3)} = [\alpha_2 + 1, \alpha_3, \cdots, \alpha_{M-1}, \alpha_M - 1, 1, 1].$$

同時に $h = 4c+3$ のときも成り立つことを示せた.

・$2^{i-1} \leq h < 2^i$ のとき，上と同様に示せる.

■

次に現れる p_n と q_n は，第1章で定義したものであることに注意してほしい.

補題 4.1.4

$a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{N}$ $(a_0, a_n \neq 1,\ a_2, \cdots, a_{n-1} > 0)$ に対して,

$$[a_0, a_1, \cdots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$$

とすると,

$$[a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0] = \frac{p_n}{p_{n-1}}.$$

(証明)

i) $n = 1$ のとき,

$$[a_0] = \frac{a_0}{1} \qquad [a_0, a_1] = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_0}.$$

よって，$p_0 = a_0,\ p_1 = a_0 + a_1 + 1$.

ゆえに,

$$[a_1, a_0] = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_0} = \frac{p_1}{p_0}.$$

ii) n のとき成り立つと仮定する．$n+1$ のときについて考える.

帰納法の仮定より,

$[a_0, a_1, \cdots, a_n] = \dfrac{p_n}{q_n}$ とおくと，$[a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0] = \dfrac{p_n}{p_{n-1}}$ とおける.

$$\begin{aligned}
[a_{n+1}, a_n, \cdots, a_0] &= a_{n+1} + \frac{1}{[a_n, \cdots, a_0]} \\
&= a_{n+1} + \frac{p_{n-1}}{p_n} \\
&= \frac{a_{n+1}p_n + p_{n-1}}{p_n} \\
&= \frac{p_{n+1}}{p_n}.
\end{aligned}$$

■

定理 4.1.5

任意の $i, n \in \mathbb{N},\ i \geq 4,\ 2 \leq m_n < \cdots < m_2 < m_1 \leq i-2 \quad (1 \leq n \leq i-3)$ に対して，

$$[a_0, a_1, \cdots, a_N] = \frac{f(2^i + 2^{i-1} + 2^{m_1} + 2^{m_2} + \cdots + 2^{m_n} + 2)}{f(2^i + 2^{i-1} + 2^{m_1} + 2^{m_2} + \cdots + 2^{m_n} + 3)}$$

とすると，

$$[a_N, a_{N-1}, \cdots, a_0] = \frac{f(2^i + 2^{i-1} + 2^{i-m_1} + 2^{i-m_2} + \cdots + 2^{i-m_n} + 2)}{f(2^i + 2^{i-1} + 2^{i-m_1} + 2^{i-m_2} + \cdots + 2^{i-m_n} + 3)}.$$

但し，$a_0, a_1, \cdots, a_N \in \mathbb{N}$，$a_0, a_N \neq 1$.

(証明)

式 (4.1.1) より，$a_0 > 1$.

$$\frac{p_N}{q_N} = \frac{f(2^i + 2^{i-1} + 2^{m_1} + 2^{m_2} + \cdots + 2^{m_n} + 2)}{f(2^i + 2^{i-1} + 2^{m_1} + 2^{m_2} + \cdots + 2^{m_n} + 3)} \qquad (4.1.2)$$

とすると,

$$\begin{aligned}\frac{q_N}{p_N} &= \frac{f(2^i+2^{i-1}+2^{m_1}+2^{m_2}+\cdots+2^{m_n}+3)}{f(2^i+2^{i-1}+2^{m_1}+2^{m_2}+\cdots+2^{m_n}+2)}\\ &= \frac{f(2^i+2^{i-1}-(2^{m_1}+2^{m_2}+\cdots+2^{m_n}+3)-2)}{f(2^i+2^{i-1}-(2^{m_1}+2^{m_2}+\cdots+2^{m_n}+2)-2)}\\ &= [0,a_0,a_1,\cdots,a_N].\end{aligned}$$

定理 4.1.3 より,

$$\begin{aligned}[0,a_0,a_1,\cdots,a_{N-1}] &= \frac{f(2^{i-1}-(2^{m_1}+2^{m_2}+\cdots+2^{m_n}+3)-2)}{f(2^{i-1}-(2^{m_1}+2^{m_2}+\cdots+2^{m_n}+2)-2)}\\ &= \frac{f(2^{i-2}+2^{m_1}+2^{m_2}+\cdots+2^{m_n}+3)}{f(2^{i-2}+2^{m_1}+2^{m_2}+\cdots+2^{m_n}+2)}.\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}\frac{p_{N-1}}{q_{N-1}} &= [a_0,a_1,\cdots,a_{N-1}]\\ &= \frac{f(2^{i-2}+2^{m_1}+2^{m_2}+\cdots+2^{m_n}+2)}{f(2^{i-2}+2^{m_1}+2^{m_2}+\cdots+2^{m_n}+3)}.\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

式 (4.1.2) と式 (4.1.3) の両辺は既約分数なので,

$$p_N = f(2^i+2^{i-1}+2^{m_1}+2^{m_2}+\cdots+2^{m_n}+2), \quad p_{N-1} = f(2^{i-2}+2^{m_1}+2^{m_2}+\cdots+2^{m_n}+2).$$

補題 4.1.4 より,

$$\begin{aligned}[a_N,a_{N-1},\cdots,a_0] &= \frac{p_N}{p_{N-1}}\\ &= \frac{f(2^i+2^{i-1}+2^{m_1}+2^{m_2}+\cdots+2^{m_n}+2)}{f(2^{i-2}+2^{m_1}+2^{m_2}+\cdots+2^{m_n}+2)}\\ &= \frac{f(2^i+2+2^{i-m_1}+2^{i-m_2}+\cdots+2^{i-m_n}+2^{i-1})}{f(2^{i-2}+2^{i-2-m_1}+2^{i-2-m_2}+\cdots+2^{i-2-m_n}+2^{i-3})}\end{aligned}$$

$$= \frac{f(2^i + 2 + 2^{i-m_1} + 2^{i-m_2} + \cdots + 2^{i-m_n} + 2^{i-1})}{f((2^{i-2} + 2^{i-2-m_1} + 2^{i-2-m_2} + \cdots + 2^{i-2-m_n} + 2^{i-3} + 1)2^2 - 1)}$$

$$= \frac{f(2^i + 2 + 2^{i-m_1} + 2^{i-m_2} + \cdots + 2^{i-m_n} + 2^{i-1})}{f(2^i + 2^{i-m_1} + 2^{i-m_2} + \cdots + 2^{i-m_n} + 2^{i-1} + 3)}$$

$$= \frac{f(2^i + 2^{i-1} + 2^{i-m_1} + 2^{i-m_2} + \cdots + 2^{i-m_n} + 2)}{f(2^i + 2^{i-1} + 2^{i-m_1} + 2^{i-m_2} + \cdots + 2^{i-m_n} + 3)}.$$

■

定理 4.1.5 の有理数において，その 2 つの分母が等しいとき，商 $a_0, a_1, \cdots a_N$ を左から並べても右から並べても同じ列になることが分かる.

つまり，定理 4.1.5 の仮定に

$$f(2^i+2^{i-1}+2^{m_1}+2^{m_2}+\cdots+2^{m_n}+3) = f(2^i+2^{i-1}+2^{i-m_1}+2^{i-m_2}+\cdots+2^{i-m_n}+3)$$

を加えると，

$$[a_0, a_1, \cdots, a_N] = \frac{f(2^i + 2^{i-1} + 2^{m_1} + 2^{m_2} + \cdots + 2^{m_n} + 2)}{f(2^i + 2^{i-1} + 2^{m_1} + 2^{m_2} + \cdots + 2^{m_n} + 3)}$$

$$= \frac{f(2^i + 2^{i-1} + 2^{i-m_1} + 2^{i-m_2} + \cdots + 2^{i-m_n} + 2)}{f(2^i + 2^{i-1} + 2^{i-m_1} + 2^{i-m_2} + \cdots + 2^{i-m_n} + 3)}$$

$$= [a_N, a_{N-1}, \cdots, a_0].$$

すなわち，

$$a_n = a_{N-n} \qquad (0 \leq n \leq N).$$

5　有理数の木と複２進分割

1 以上の自然数 n に対し，$i_1 \geq i_2 \geq \cdots \geq i_k$ であって，$i_1, i_2, \cdots, i_k$ には同じ自然数が高々 2 回しか現れず，$n = 2^{i_1} + 2^{i_2} + \cdots + 2^{i_k}$ が成立するとき，$2^{i_1} + 2^{i_2} + \cdots + 2^{i_k}$ を n の複 2 進分割という．

n の相異なる複 2 進分割の総数を $b(n)$ とかく．n の 2 進展開は n の 1 つの複 2 進分割を与えているので，任意の $n \geq 1$ に対し，$b(n) \geq 1$ が成り立つ．$b(0) = 1$ と定める．

例)

$n = 1$ のとき, $b(1) = 1$.　　$1 = 2^0$

$n = 2$ のとき, $b(2) = 2$.　　
$$\begin{aligned} 2 &= 2^1 \\ &= 2^0 + 2^0 \end{aligned}$$

$n = 10$ のとき, $b(10) = 5$.　　
$$\begin{aligned} 10 &= 2^3 + 2^1 \\ &= 2^3 + 2^0 + 2^0 \\ &= 2^2 + 2^2 + 2^1 \\ &= 2^2 + 2^2 + 2^0 + 2^0 \\ &= 2^2 + 2^1 + 2^1 + 2^0 + 2^0 \end{aligned}$$

定理 5.1.1

任意の $n \in \mathbb{N}$ $(0 \leq n)$ に対して，$b(2n+1) = b(n)$.

(証明)

$2n+1$ のある複 2 進分割を，

$$2n + 1 = 2^{i_1} + 2^{i_2} + \cdots + 2^{i_k} + 2^0$$

とする．但し，$i_h \in \mathbb{N}$, $1 \leq i_h$ $(1 \leq h \leq k)$.

$n = 2^{i_1 - 1} + 2^{i_2 - 1} + \cdots + 2^{i_k - 1}$ より n の複 2 進分割が得られる．逆に，n の複 2 進分割から $2n+1$ の複 2 進分割を得ることができる．

このようにして得られる $2n+1$ の複２進分割と n の複２進分割の対応は明らかに１対１なので，$b(2n+1) = b(n)$.

■

定理 5.1.2

任意の $n \in \mathbb{N}$ $(0 \leq n)$ に対して，$b(2n+2) = b(n) + b(n+1)$.

(証明)

$2n+2$ を複２進分割したときに，2^0 を含むか含まないかで場合分けをする．

i) 2^0 を含むとき，

$$2n+2 = 2^{i_1} + 2^{i_2} + \cdots + 2^{i_k} + 2^0 + 2^0$$

とおける．但し，$i_h \in \mathbb{N}$, $1 \leq i_h$ $(1 \leq h \leq k)$.

$n = 2^{i_1-1} + 2^{i_2-1} + \cdots + 2^{i_k-1}$ より n の複２進分割が得られる．逆に，n の複２進分割から 2^0 を含む $2n+2$ の複２進分割を得ることができる．

このようにして得られる 2^0 を含む $2n+2$ の複２進分割と n の複２進分割の対応は明らかに１対１である．

ii) 2^0 を含まないとき，

$$2n+2 = 2^{l_1} + 2^{l_2} + \cdots + 2^{l_j}$$

とおける．但し，$l_h \in \mathbb{N}$, $1 \leq l_h$ $(1 \leq h \leq j)$.

$n+1 = 2^{l_1-1} + 2^{l_2-1} + \cdots + 2^{l_j-1}$ より $n+1$ の複２進分割が得られる．逆に，$n+1$ の複２進分割から 2^0 を含まない $2n+2$ の複２進分割を得ることができる．

このようにして得られる 2^0 を含まない $2n+2$ の複２進分割と $n+1$ の複２進分割の対応は１対１である．

i) と ii) は，排反であるから，$b(2n+2) = b(n) + b(n+1)$.

■

以上より，次が分かる．

定理 5.1.3

任意の $n \in \mathbb{N}$ $(0 \leq n)$ に対して，$b(n) = f(n)$.

あとがき

具体例をたくさん作り眺めることで，一見しただけでは見えてこない法則が見えてくるのはとてもおもしろく，推測をして，それの証明を与えることができたときは，とてもうれしかった．有意義な大学院二年間を過ごすことができた．

最後に，序文で述べた研究のきっかけとなる命題と自分で作り証明した命題の番号を書いておく．

「集合論・入門」[2] の命題：

> 正の有理数 p, q を既約分数 $\frac{n_1}{m_1}$，$\frac{n_2}{m_2}$ で表して，$2^{m_1}3^{n_1} < 2^{m_2}3^{n_2}$ なるとき p の後に q をおく．このようにして正の有理数を並べると，既約分数 $\frac{n}{m}$ で表される有理数は高々 $\displaystyle\sum_{i=1}^{m+n} i$ 番目に現れる．

自分で気づいた定理は以下の通りである．但し，補題 4.1.4 は後から調べたら，「数値計算とその応用」[9] に書いてあったのでオリジナルではない．また，他にも調査不足で既知の結果が含まれているかもしれない．

⟨ 減少型連分数 ⟩

定理 2.13.1　補題 2.13.2　定理 2.13.3　補題 2.13.4　定理 2.13.5　定理 2.14.1

⟨ 有理数の木 ⟩

補題 3.1.1　定理 3.3.5　補題 3.3.6　定理 3.3.7　定理 3.3.8　補題 3.3.9
定理 3.3.10　補題 3.4.1　定理 3.4.2　定理 4.1.1　定理 4.1.2　定理 4.1.3
定理 4.1.4　補題 4.1.5

参考文献

[1] 斎藤　正彦, “ 数学の基礎　集合・数・位相 ”, 東京大学出版会

[2] 上江洲　忠弘, “ 集合論・入門 ”, 遊星社

[3] 上江洲　忠弘, “ 減少型連分数 (まとめ) ”, プレプリント

[4] G.H. ハーディ, E.M. ライト (著), 示野　信一, 矢神　毅 (訳), “ 数論入門 ”, シュプリンガー・ジャパン

[5] Neil Calkin, Hervert S.Wilf, “ Recounting the Rationals ”, Amer. Math. Monthly 107(2000), no.4, 360-363

[6] Daniel Duverney(著), 塩川　宇賢 (訳), “ 数論 ”, 森北出版

[7] 小松　勇作, “ 復刊　無理数と極限 ”, 共立出版

[8] 芹沢　正三, “ 数論入門 ”, 講談社

[9] 高橋　磐郎, 室谷　義昭, “ 数値計算とその応用 ”, コロナ社

[10] http://club.pep.ne.jp/ tatematsu/index.html

[11] http://www7b.biglobe.ne.jp/ fukagawa/documents/yuurisuunoki.pdf