

# 円筒タンクにおけるポテンシャル流体と弾性容器との 大変形動的不安定問題の解析

皆川洋一\*

Nonlinear Vibration Problem of Cylindrical Tank with Water in Large Deformations

*Youichi MINAKAWA*

It is reported that responses of liquid-filled tank on a shaking table showed some vibration modes that was contradiction to expectation of elementary tank theory. Then, author has been studying to analyze the response that might be caused by dynamic geometric nonlinear behavior, and showed a Lagrangian function that governed the interactive behavior between the potential fluid and elastic container in large deformations. Here, applying ALE(arbitrary Lagrangian-Eulerian Element) to the functional of a cylindrical tank in a three dimension, we propose a new procedure, analyze nonlinear responses of the system, and demonstrate the effectiveness of the method.

**Keywords :** *Potential Fluid, Lagrangian of interaction between fluid and container, Nonlinear response of elastic tank, Sub-harmonic response*

## 1. はじめに

液体と弾性容器の連成問題は、液体の質量効果を弾性容器に付加する定式化が 1950 年代まで用いられていた。その後、ポテンシャル流体と弾性容器の微小変形場における連成問題の汎関数が開発された。これに基づく線形理論が定式化され、工学問題に適用され、有用な知見<sup>3,4,5,6</sup>が得られている。

J.C.Luke<sup>1</sup>)はポテンシャル流体の圧力式を流体場

で積分する関数がこの流体の運動を支配する厳密な Lagrange 関数となることを示した。これを利用して、剛なタンクに入った液体の厳密な振動問題が解析され、実験値との整合性が報告されている。

著者は前述した Lagrange 関数をポテンシャルエネルギーとして、ハミルトンの原理に取り込み、容器の弾性変位に伴う流体場の変形を考慮すると、ポテンシャル流体と弾性容器の大変形動的連成問題における厳密な汎関数<sup>7,8,9</sup>)になることを示した。

流体と弾性容器の連成問題を大変形の下で解析するとき、流体と移動する境界、すなわち運動する容

---

2013 年 8 月 13 日受理

\* 建築学専攻

器との整合性を担保する処理が必要となる。有限要素法を利用すると、この条件を十分な精度で満足することに困難が伴う。また、ポテンシャル流体の圧力積分は Euler の方法で表示され、弾性容器は通常 Lagrange の方法を用いて表示されるので、流体と弾性容器の相互作用面が大変形時に変形・移動することを的確に表現することが難しく、安定な応答を得ることは困難であった。

円筒タンクの浮き屋根に地震被害が発生し、この屋根のスロッシング振動時の波高の非線形解析<sup>5,6)</sup>が行われている。しかしながら、流体と変形する容器の大変形場における移動境界問題は適正に処理された手法が利用されている訳ではない。

1990年代に入って、移動する参照座標を導入する ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) 要素<sup>23)</sup>が開発され、流体の運動を流体粒子の運動とは独立した座標系を用いて計測することが可能となった。これを利用すれば、移動変形する境界のもとで、粘性、圧縮性等を示す一般の流体の示す多様な挙動を解析する事が可能となる。

流体を非粘性、渦なしのポテンシャル流体に限定すれば、自由表面を持つ流体と弾性体の相互作用問題を支配する上記の汎関数が存在するので、有限要素法を適用し、離散系の場の方程式を容易に誘導することができる。ここでは、遷移座標系を利用し、流体へ移動節点を導入し、円筒タンクにおけるポテンシャル流体と弾性容器の大変形動的連成問題における厳密な汎関数へ有限要素法を適用し、離散化された場の方程式の誘導、および非線形応答の数値解析を行い、手法の有為性を実証する。

## 2. ポテンシャル流体と容器の連成場の汎関数と離散化手法

自由表面を有するポテンシャル流体と弾性容器が、速度  $\mathbf{v}_0$  で運動する基盤の上に在る系を考える。基盤

の上に立つ観察者が観測する流体へ速度ポテンシャル  $\phi$ 、および参照座標の移動速度  $\hat{\mathbf{v}}$  を導入すると、著者が示したポテンシャル流体と弾性容器の大変形動的連成場における汎関数  $I_m^{ALE}(\phi, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{u})$ <sup>7,16,19)</sup> は次式のように表される。

$$I_m^{ALE} = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \iiint_{V_L(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{u})} \rho_L \{ \dot{\phi} + \nabla \phi (\nabla \phi / 2 - \hat{\mathbf{v}}) + \dot{\mathbf{v}}_0 \cdot \mathbf{r} + g(z - z_f) \} r dx d\theta dz - \iint_{A_s} \{ \rho_E h \dot{\mathbf{u}} (\dot{\mathbf{u}} / 2 + \mathbf{v}_0) - \Pi(\mathbf{u}) \} r_s dx d\theta \right] dt \quad (1)$$

ここに、 $\phi$ : 系と同一の基盤から観測した流体の速度ポテンシャル、 $\mathbf{v}_0$ : 基盤の速度ベクトル、 $\boldsymbol{\eta}$ : 自由表面の波高ベクトル、 $\mathbf{u}$ : 弾性容器の変位ベクトル、 $\mathbf{r}$ : 変形後の位置ベクトル、 $\Pi$ : 弾性容器のポテンシャルエネルギー (付録 1)、 $V_L$ : 流体領域、 $\rho_L$ : 流体質量密度、 $A_s$ : 容器表面積、 $\rho_E$ : 容器質量密度、 $h$ : 容器の厚さ、 $g$ : 重力加速度、 $\hat{\mathbf{v}}$ : 遷移座標速度、 $r_s$ : 円筒シェル半径を意味する。流体は Euler 表示され、容器は Lagrange 表示されている。

系に右手系の円筒座標系  $(r, \theta, z)$  を導入し、 $z$  軸の原点をタンク底の中心とし、逆鉛直方向を正とする。(1)式の第1変分を算定し、次式を得る。

$$\begin{aligned} \delta I_m^{ALE} = & \int_{t_0}^{t_1} \left[ - \iiint_{V_L(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{u})} \rho_L \delta \phi \nabla^2 \phi r dr d\theta dz + \iint_{S_0} \rho_L \delta \phi (\nabla \phi - \hat{\mathbf{v}}) \mathbf{n}_L dS_0 \right. \\ & + \iint_{S_f} \rho_L \delta \phi (\nabla \phi - \hat{\mathbf{v}} - \dot{\boldsymbol{\eta}} \mathbf{i}_z) \mathbf{n}_L dS_f + \iint_{S_s} \rho_L \delta \phi (\nabla \phi - \hat{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}}) \mathbf{n}_L dS_s \\ & + \iint_{S_f} \rho_L \delta \eta \{ \dot{\phi} + \nabla \phi (\nabla \phi / 2 - \hat{\mathbf{v}}) + \dot{\mathbf{v}}_0 \cdot \mathbf{r} + g \eta \mathbf{i}_z \} \mathbf{n}_L dS_f \\ & + \iint_{S_s} \rho_L \delta \mathbf{u}' \{ \dot{\phi} + \nabla \phi (\nabla \phi / 2 - \hat{\mathbf{v}}) + \dot{\mathbf{v}}_0 \cdot \mathbf{r} + g(z - z_f) \mathbf{i}_z \} \mathbf{n}_L dS_s \\ & \left. + \iint_{A_s} \delta \mathbf{u}' \{ \rho_E h (\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_0) - \partial \Pi / \partial \mathbf{u} \} r_s dx d\theta \right] dt \quad (2) \end{aligned}$$

ここに、記号  $\mathbf{n}_L$ : 各境界における流体外向きの法線方向ベクトル、 $S_f$ : 流体自由表面、 $S_s$ : 流体と容器の相互作用面、 $S_0$ : 固定境界面を示す。

(2)式の第1変分から得られる流体領域、および各境界における境界条件式を整理する。

$$1) \text{ 流体内部 } V_L \text{ の条件: } \nabla^2 \phi = 0 \quad (3)$$

2) 流体自由表面  $S_f$ :

$$(\nabla \phi - \hat{\mathbf{v}} - \dot{\boldsymbol{\eta}} \mathbf{i}_z) \mathbf{n}_L |_{z=z_f+\eta} = 0 \quad (4)$$

$$\{ \dot{\phi} + \nabla \phi (\nabla \phi / 2 - \hat{\mathbf{v}}) + \dot{\mathbf{v}}_0 \cdot \mathbf{r} + g \eta \} \mathbf{n}_L |_{z=z_f+\eta} = 0 \quad (5)$$

$$3) \text{ 流体固定境界 } S_0: (\nabla \phi - \hat{\mathbf{v}}) \mathbf{n}_L = 0 \quad (6)$$

4) 流体と容器の相互作用面  $S_i$  :

$$(\nabla\varphi - \hat{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{u}})\mathbf{n}_L = 0 \quad (7)$$

$$\rho_L \{ \dot{\varphi} + \nabla\varphi(\nabla\varphi/2 - \hat{\mathbf{v}}) + \dot{\mathbf{v}}_0 \cdot \mathbf{r} + g(z - z_f) \} \mathbf{n}_L \cdot \mathbf{u} + \{ \rho_E h(\ddot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{v}}_0) + \partial\Pi/\partial\mathbf{u} \} = 0 \quad (8)$$

(3)式は流体の基礎式である。流体の速度は移動速度を持つ座標系で観測されているので、固定された座標で観測される速度は  $\nabla\varphi - \hat{\mathbf{v}}$  と表される。

(4)式は自由表面において、流体速度と波高速度の流体法線方向成分が一致すること、(5)式は流体表面の法線方向において、流体圧力成分がゼロであることを表す。(6)式は固定境界の法線方向の速度がゼロであることを表す。(7)式はこの境界の法線方向において、流体速度と容器の速度が一致することを表す。(8)式は容器の法線方向に流体圧力が作用して、弾性容器とつりあう力学的条件を表す。汎関数は物理的に適切なこれら基礎式、および境界条件を与える。

## 2.1 要素のモデル化

流体は8節点6面体要素を採用する。この要素は相互作用面  $S_i$  において、容器(円筒シェル)と接する。円筒シェル要素の節点は初期状態において、周方向に等角度で要素分割され、 $z$ 方向には座標値が一定を有する同心円状に存在するものと仮定する。すなわち、円を周方向に  $N_c$  等分、あるいは半円を  $N_c - 1$  等分する  $N_c$  本の母線を有するモデルとなる。相互作用面上のシェル節点はすべてこの母線上に存在する。相互作用面上の流体節点も変形前後を通じて、この母線上にある。この流体節点の初期  $z$  座標は、同一座標値(円筒シェルとは異なる  $z$  座標値)を持つ同心円に存在すると仮定する。これらの仮定は簡単のための扱いであり、他の選択も可能である。

容器は Lagrange 座標を用いて表されているので、変形後において節点が載っている母線は直線ではなく一般に空間曲線となる。流体節点もこの空間曲線上に常に存在し、遷移座標系を構成する。流体の運

動はこの空間曲線上の点で観測される。

この方法は容器を利用して、相互作用面上の流体節点の位置を定めるので、流体節点において流体と容器が密接する条件を容易に導入することができる。

## 2.2 移動境界の適合条件

まず、流体の運動を測定する参照座標を構成する流体節点を運動の仕方に応じて、5種類<sup>16,19)</sup>に分類する。それらは、(1)流体自由表面  $S_f$  と相互作用面  $S_i$  の両面に在る節点(2移動境界面上の節点)、(2)流体自由表面上の節点、(3)相互作用面上の節点、(4)移動しない節点、および(5)流体の内部節点である。

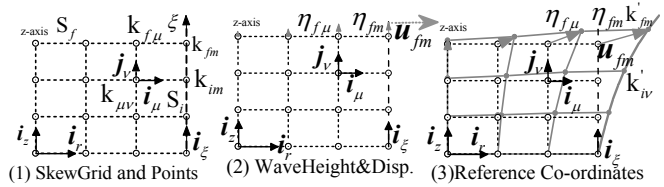


Fig.1 Fluid Node Move and Reference Coordinates

### 1) 相互作用面上の流体節点の移動

2移動境界面上の流体節点に波高が生じれば、相互作用面は面積が変化する。Fig.1における2移動境界面上の節点  $k_{fm}$  ( $z$ 座標を  $z_{fm}$  とする)の波高を  $\eta_{fm}$  とすると、この点の流体移動は波高と、その到達点の弾性変位の和として表される。

$$\Delta \mathbf{r}_{fm} = \mathbf{r}(r_s, \theta_m, z_{fm} + \eta_{fm}) - \mathbf{r}(r_s, \theta_m, z_{fm}) + \mathbf{u}(s_m + \eta_{fm}, \theta_m) = \eta_{fm} \mathbf{i}'_m + \mathbf{u}(x_{fm}, \phi_m) \quad (9)$$

ここに、添字  $f$  はそれぞれ流体自由表面、および添字  $m$  は上記した  $N_c$  本の母線のひとつを代表する番号であり、母線  $\theta = \theta_m$  の量であることを示す。相互作用面上の波高の方向  $\mathbf{i}'_m$  は円筒シェル母線の変形後の接線方向ベクトル、円筒座標系の座標値  $s_m + \eta_{fm}$ 、 $\theta_m$  はシェルの要素座標値  $x_m$ 、および  $\phi_m$  (付録2)に対応する。(9)式は2移動境界面上の流体節点の変形後も容器上に存在することを担保する。容器の中央面と相互作用面は容器厚の1/2程度の距離がある。この距離は小さいと仮定して無視する。

同様に、同一母線上の相互作用面上にある流体内部節点  $k_{im}$  ( $z$ 座標を  $z_{im}$  とする) の移動は次式のように定められる。

$$\Delta \mathbf{r}_{im} = \eta_{fm} (z_{im} / z_f) \mathbf{i}_m + \mathbf{u}(x'_{im}, \theta_m) \quad (10)$$

ここに、 $x'_{im}$  は座標値  $s_{im} + \eta_{fm} z_{im} / z_f$  に対応する円筒シェル要素の  $x$ 座標値である。 $x'_{im}$  は波高  $\eta_{fm}$  を含むので、流体節点の移動量は波高の関数となる。

波高による移動量は、波高  $\eta_{fm}$  を初期座標の  $z$  値を利用した内分比に応じて定め、その点のシェル変位を追加して定める。この母線上にある初期座標  $x_{im}$  の節点における容器の変位は、シェル変位成分を用いて表すことができる。

$$\mathbf{u} = w(x'_{im}, \theta_m) \mathbf{i}_s + v(x'_{im}, \theta_m) / r_s \quad (11)$$

ここに、流体と容器の適合条件において、円筒シェルの母線方向の変位は無視する。波高の高さと比較して、この変位は小さいと判断した。

## 2) 自由表面の流体節点の移動

波高は鉛直方向に発生し、シェルの変位は流体節点の  $r_{m0} \leq r_s$  座標とシェル半径  $r_s$  の内分比に応じて内部流体節点の移動に影響すると仮定する。

$$\Delta \mathbf{r}_{f\mu} = \eta_{f\mu} (z_{f\mu} / z_f) \mathbf{i}_m + (r_{im} / r_s) (w(x'_{im}, \theta_m) \mathbf{i}_r + v(x'_{im}, \theta_m) \mathbf{i}_\theta) \quad (12)$$

容器の鉛直方向の変位は、相互作用面上にない流体節点の  $z$  方向に影響しないとする。これは2移動境界上の波高と、自由表面のみの上に在る波高の関与が異なることを意味する。本論では波高ベクトル全体を  $\boldsymbol{\eta}_e$  と表現する。このベクトルの部分集合である2移動境界上節点の波高ベクトルを  $\boldsymbol{\eta}_m$  と表す。 $\boldsymbol{\eta}_m$  は容器変位の変数となる。

## 3) 内部節点の移動

内部節点の移動は次式のように定義する。各節点と同じ  $r, \theta$  座標を持つ自由表面上の波高を各節点の  $z$  座標との内分比で、鉛直方向に移動し、同じ  $\theta, z$  座標を持つシェルの変位成分  $w, v$  は節点の  $r$  座標とシェル半径  $r_s$  の比に応じて移動すると仮定する。

$$\Delta \mathbf{r}_{\mu\nu} = \eta_{f\mu} (z_{\mu\nu} / z_f) \mathbf{i}_z + (r_{\mu\nu} / r_s) (w(x'_{im}, \theta_m) \mathbf{i}_r + v(x'_{im}, \theta_m) \mathbf{i}_\theta) \quad (13)$$

## 2.3 座標系と極座標表示

円筒タンクを解析するので、円を多角形に近似せずに、円柱座標を導入した8節点の6面体流体要素を利用する。この流体要素の形状関数  $N_i(\xi_{1i}, \xi_{2i}, \xi_{3i})$  を用いると、流体の初期座標は、次式のように表される。

$$\begin{aligned} r &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi_{1i}, \xi_{2i}, \xi_{3i}) r_i = \mathbf{N} \mathbf{r}_e, \theta = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi_{1i}, \xi_{2i}, \xi_{3i}) \theta_i = \mathbf{N} \boldsymbol{\theta}_e, \\ z &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi_{1i}, \xi_{2i}, \xi_{3i}) z_i = \mathbf{N} \mathbf{z}_e \end{aligned} \quad (14)$$

ここに、 $N_k = (1 + \xi_{1k} \xi_{2k})(1 + \xi_{2k} \xi_{3k})(1 + \xi_{3k} \xi_{1k}) / 8, (k=1, \dots, 8)$ 。

これらの式に、各節点の各方向の初期座標値を並べて構成されるベクトルに添え字  $e$  を付して表した。円柱座標は  $z$  軸が特異点なので、この軸上の座標値を利用するとき若干の配慮が必要となる。

## 2.4 円筒シェル要素

円筒シェルを離散化する要素として、1節点5自由度  $\{u_k, v_k, w_k, \beta_{\theta k}, \beta_{\theta k}\}$ 、4節点の要素 ( $k=1, \dots, 4$ ) を利用する。ここに、変位成分  $u, v, w$  はそれぞれ母線方向、周方向、および法線方向の変位であり、 $\beta_x, \beta_\theta$  (付録1に定義した) は母線方向、それぞれ周方向の回転を表す。円筒シェルのひずみ表現は Sanders による剛体変形<sup>21)</sup>を考慮したひずみを利用する。有限変形の円筒シェルは次式を利用する。

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= u_{,x} + \beta_x^2 / 2, \varepsilon_\theta = (v_{,\theta} + w) / r_s + \beta_\theta^2 / 2, \gamma = u_{,\theta} / r_s + v_{,x} + \beta_x \beta_\theta \\ \kappa_x &= \beta_{x,x}, \kappa_\theta = \beta_{\theta,\theta} / r_s, \chi = \beta_{\theta,x} + (\beta_{x,\theta} + \omega) / r_s \quad (15) \\ \beta_x &= -w_{,x}, \beta_\theta = (v - w_{,\theta}) / r_s, \omega = (v_{,x} - u_{,\theta} / r_s) / (2r_s) \end{aligned}$$

この基礎式の誘導等を付録1に示す。

円筒シェルへ回転シェル要素を利用すると、線形解析は極めて容易になる。周方向の物理量をフーリエ級数に展開して、各フーリエ級数次数の方程式に分解して定式化できる。

しかしながら、本論文の定式化では円筒シェル要素を適用するので、利用している要素の精度を把握する必要がある。固有振動数解析において、3種類の要素 (Sabir 要素、三次元平板要素、および Sabir

要素を修正した要素) を数値解析<sup>17)</sup>して、各要素の特性を把握し、1種類の要素を採用した。この要素の概要を付録2に示す。この要素は剛体変形によるひずみが生じない、および一定ひずみの条件を満たしている。

このタイプのシェル要素の法線方向変位は代数3次関数で変化する。辺両端の節点自由度は変位と回転であるから、回転は2次関数以下の代数関数で表されることが適切である。これを考慮して変位関数の一部を修正した変位関数を利用する。

節点変位ベクトル $\mathbf{d}_e$ を利用すると、円筒シェル要素の変位ベクトルは次式のように表される。

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x_s, \phi) \\ v(x_s, \phi) \\ w(x_s, \phi) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} NL_u \\ NL_v \\ NL_w \end{bmatrix} \mathbf{d}_e = \begin{Bmatrix} NL_u \mathbf{d}_e \\ NL_v \mathbf{d}_e \\ NL_w \mathbf{d}_e \end{Bmatrix} \quad (16)$$

ここに、要素座標系の $\phi$ 座標値と円筒座標系の $\theta$ 座標値は線形の関係性を有する座標パラメータである。

## 2.5 離散化手法<sup>16,19)</sup>

### 2.5.1 流体節点の変形後の位置

流体節点の変形後の位置は2.2節で定義される。

これらを用いて、流体要素の8点の移動量を流体要素の形状関数に代入して、移動量は次式のようにマトリクス表示される。

$$\Delta \mathbf{r} = \begin{Bmatrix} \Delta r \\ \Delta \theta \\ \Delta z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} X_r \\ X_\theta \\ X_z \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_e + \begin{bmatrix} C_r \\ C_\theta \\ C_z \end{bmatrix} \mathbf{d}_e = \mathbf{B}_\eta(\mathbf{d}_e) \boldsymbol{\eta}_e + \mathbf{B}_d(\boldsymbol{\eta}_e) \mathbf{d}_e \quad (17)$$

ここに、 $\boldsymbol{\eta}_e$ は自由表面上の波高ベクトル、 $\mathbf{d}_e$ は円筒シェルの節点変位ベクトルである。(17)式において、 $\mathbf{B}_\eta$ は $\mathbf{d}_e$ の関数であり、 $\mathbf{B}_d$ は $\boldsymbol{\eta}_e$ の関数となる。

相互作用面上に4節点を有する流体要素は2本の母線上にそれぞれ2個の節点を持つ。これら節点の変形後の位置は2.2節に示した座標 $s_m$ を用いて示される。この座標値に対応する円筒シェルの変位 $v, w$ を定める。この容器節点は同一の母線上にあり、この節点を挟む円筒シェルの2点の節点変位ベクトル

を用いて定義することができる。容器上にある流体要素の節点は4個ある。これら節点における容器の変位を一義的に定めるために、最小で容器の4節点、最大8節点の節点変位ベクトルが必要となる。

簡単な例を示す。初期座標 $\mathbf{r}_0 = (r_s, \theta_m, z_{im})$ の相互作用面上の節点は(10)式から次式のように表される。

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} r_s \\ \theta_m \\ z_{im} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -(z_m/z_f)\beta_x/(1+\beta_x^2)\eta_{fm} \\ 0 \\ (z_m/z_f)/(1+\beta_x^2)\eta_{fm} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{L}_w(x'_{im})\mathbf{d}_e \\ (1/r_s)\mathbf{L}_v(x'_{im})\mathbf{d}_e \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

ここに、 $\beta_x = w_z(z_{im})$ 。

(12)式、および(13)式も同様に表示できる。これらを行列表示して、次式を得る。

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{B}_\eta \boldsymbol{\eta}_e + \mathbf{B}_d \mathbf{d}_e \quad (19)$$

この式は波高、および容器が弾性変位した変形後の流体節点の座標位置を表す。

### 2.5.2 極座標と流体要素の表示

流体要素の形状関数、および流体節点の速度ポテンシャル・ベクトル $\boldsymbol{\varphi}_e$ を用いて、速度ポテンシャル $\varphi$ は次式のように表される。

$$\varphi = \sum_{k=1}^8 N_k \varphi_k = \mathbf{N} \boldsymbol{\varphi}_e \quad (20)$$

全体座標系としての円筒座標 $(r, \theta, z)$ と、形状関数を用いた要素の座標 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ の関係を示す。

$$\begin{Bmatrix} \partial/\partial \xi_1 \\ \partial/\partial \xi_2 \\ \partial/\partial \xi_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \partial/\partial r \\ \partial/(r\partial\theta) \\ \partial/\partial z \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \partial r/\partial \xi_1 & \partial \theta/\partial \xi_1 & \partial z/\partial \xi_1 \\ \partial r/\partial \xi_2 & \partial \theta/\partial \xi_2 & \partial z/\partial \xi_2 \\ \partial r/\partial \xi_3 & \partial \theta/\partial \xi_3 & \partial z/\partial \xi_3 \end{bmatrix} \quad (21)$$

ここに、 $\mathbf{J}$ はヤコビアン行列。

(21)式から、次式の表現を得る。

$$\begin{Bmatrix} \partial/\partial r \\ \partial/(r\partial\theta) \\ \partial/\partial z \end{Bmatrix} = \nabla = \mathbf{grad} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \partial/\partial \xi_1 \\ \partial/\partial \xi_2 \\ \partial/\partial \xi_3 \end{Bmatrix} \quad (22)$$

(22)式を $\varphi$ に作用させて、次式を得る。

$$\nabla \varphi = \mathbf{grad} \varphi = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \partial/\partial \xi_1 \\ \partial/\partial \xi_2 \\ \partial/\partial \xi_3 \end{Bmatrix} \mathbf{N} \boldsymbol{\varphi}_e = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \mathbf{A}_e \boldsymbol{\varphi}_e \quad (23)$$

ここに、 $|\mathbf{J}|$ はヤコビアンの行列式の値である。

参照座標の速度  $\hat{\mathbf{v}}$  は(19)式を時刻で微分した次式で定義される。

$$\hat{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{r}} \quad (24)$$

(18),(19),(21)式等を(1)式へ代入すると、変形後の形状で評価され、離散化された汎関数を得る。

$$\begin{aligned} I_m^{ALE}(\varphi_e, \boldsymbol{\eta}_e, \mathbf{d}_e) = & \int_{t_0}^{t_1} \left[ \sum_{m_r=1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho_L (N \dot{\varphi}_e |J| - \varphi_e^t A_e^t \cdot \dot{\mathbf{r}}) \right. \\ & + \frac{1}{2|J|} \varphi_e^t N^t N \varphi_e + (\dot{\mathbf{v}}_0 \cdot \mathbf{r} |J| + g(z - z_f) |J|) \left. \right] d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (25) \\ & - \sum_m \int_{A_e} \left\{ \rho_e h \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^t \cdot \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{v}}_0 \right) - \Pi(\mathbf{u}) \right\} r_s dx d\theta dt \end{aligned}$$

(24)式の参照速度はすべての各要素節点の変位に依存する。(25)式は、要素の変形前の座標に基づいて、変形後の形状に関して積分することを表す。

(25)式の各項に対する変分式を示す。

ヤコビアン  $|J|$  はスカラーであり、 $\boldsymbol{\eta}_e, \boldsymbol{\eta}_m$ , および  $\mathbf{d}_e$  の関数である。変数に関する増分を表示する。

$$\Delta |J| = \mathbf{D}_\eta \Delta \boldsymbol{\eta}_e + \mathbf{D}_m \Delta \boldsymbol{\eta}_m + \mathbf{D}_d \Delta \mathbf{d}_e \quad (26)$$

$$\text{ここに、} \mathbf{D}_\eta = \frac{\partial |J|}{\partial \boldsymbol{\eta}_e^t}, \mathbf{D}_m = \frac{\partial |J|}{\partial \boldsymbol{\eta}_m^t}, \mathbf{D}_d = \frac{\partial |J|}{\partial \mathbf{d}_e^t} \quad (26.1)$$

$\mathbf{A}_e \varphi_e$  はベクトルであり、各成分を同様に変数  $\varphi_e, \boldsymbol{\eta}_e, \boldsymbol{\eta}_m$ , および  $\mathbf{d}_e$  を用いて微分して、次式を得る。

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{A}_e \varphi_e) = & \mathbf{A}_e \Delta \varphi_e + \mathbf{S}_\eta \Delta \boldsymbol{\eta}_e + \mathbf{S}_m \Delta \boldsymbol{\eta}_m + \mathbf{S}_d \Delta \mathbf{d}_e \\ \Delta(\mathbf{B}_\eta \boldsymbol{\eta}_e) = & \mathbf{B}_\eta \Delta \boldsymbol{\eta}_e + \mathbf{T}_d \Delta \mathbf{d}_e, \quad \Delta \mathbf{B}_d \mathbf{d}_e = \mathbf{B}_d \Delta \mathbf{d}_e + \mathbf{B}_m \Delta \boldsymbol{\eta}_m \quad (27) \\ \mathbf{B}_r = & \mathbf{B}_d + \mathbf{T}_d \end{aligned}$$

(26), (27)式を(25)式へ代入して、この式の各項は次式のように表される。ただし、簡単のために、各要素の総和記号は省略する。

$$\begin{aligned} \delta \rho_L \iiint_{V_L} (\dot{\varphi} - \nabla \varphi \cdot \dot{\mathbf{r}}) dV_L = & \delta \rho_L \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (N \dot{\varphi}_e |J| - \varphi_e^t A_e^t \cdot \dot{\mathbf{r}}) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\ = & -\delta \varphi_e^t \rho_L \iiint_{V_L} [(N^t \mathbf{D}_\eta + \mathbf{A}_e^t \mathbf{B}_\eta) \dot{\boldsymbol{\eta}}_e + (N^t \mathbf{D}_m + \mathbf{A}_e^t \mathbf{B}_m) \dot{\boldsymbol{\eta}}_m \\ & + (N^t \mathbf{D}_d + \mathbf{A}_e^t \mathbf{B}_d) \dot{\mathbf{d}}_e] d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 + \delta \boldsymbol{\eta}_e^t \rho_L \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [(\mathbf{D}_\eta^t N + \mathbf{B}_\eta^t \mathbf{A}_e) \dot{\varphi}_e \\ & + (\mathbf{B}_\eta^t \mathbf{S}_\eta - \mathbf{S}_\eta^t \mathbf{B}_\eta) \dot{\boldsymbol{\eta}}_e + (\mathbf{B}_\eta^t \mathbf{S}_m - \mathbf{S}_m^t \mathbf{B}_m) \dot{\boldsymbol{\eta}}_m + (\mathbf{B}_\eta^t \mathbf{S}_d - \mathbf{S}_d^t \mathbf{B}_r) \dot{\mathbf{d}}_e] d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\ & + \delta \boldsymbol{\eta}_m^t \rho_L \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [(\mathbf{D}_m^t N + \mathbf{B}_m^t \mathbf{A}_e) \dot{\varphi}_e + (\mathbf{B}_m^t \mathbf{S}_\eta - \mathbf{S}_m^t \mathbf{B}_\eta) \dot{\boldsymbol{\eta}}_e \\ & + (\mathbf{B}_m^t \mathbf{S}_m - \mathbf{S}_m^t \mathbf{B}_m) \dot{\boldsymbol{\eta}}_m + (\mathbf{B}_m^t \mathbf{S}_d - \mathbf{S}_d^t \mathbf{B}_r) \dot{\mathbf{d}}_e] d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\ & + \delta \mathbf{d}_e^t \rho_L \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [(\mathbf{D}_d^t N + \mathbf{B}_d^t \mathbf{A}_e) \dot{\varphi}_e + (\mathbf{B}_d^t \mathbf{S}_\eta - \mathbf{S}_d^t \mathbf{B}_\eta) \dot{\boldsymbol{\eta}}_e \\ & + (\mathbf{B}_d^t \mathbf{S}_m - \mathbf{S}_d^t \mathbf{B}_m) \dot{\boldsymbol{\eta}}_m + (\mathbf{B}_d^t \mathbf{S}_d - \mathbf{S}_d^t \mathbf{B}_r) \dot{\mathbf{d}}_e] d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (28.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_L \delta \frac{1}{2} \iiint_{V_L} \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi dV_L = & \delta \boldsymbol{\varphi}_e^t \rho_L \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{A}_e^t \mathbf{A}_e / |J| d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \boldsymbol{\varphi}_e \\ & + \delta \boldsymbol{\eta}_e^t \rho_L \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{S}_e^t \mathbf{A}_e \boldsymbol{\varphi}_e / |J| - \frac{1}{2} \mathbf{D}_\eta^t \boldsymbol{\varphi}_e^t \mathbf{A}_e^t \mathbf{A}_e \boldsymbol{\varphi}_e / |J|^2] d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\ & + \delta \boldsymbol{\eta}_m^t \rho_L \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{S}_m^t \mathbf{A}_e \boldsymbol{\varphi}_e / |J| - \frac{1}{2} \mathbf{D}_m^t \boldsymbol{\varphi}_e^t \mathbf{A}_e^t \mathbf{A}_e \boldsymbol{\varphi}_e / |J|^2] d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\ & + \delta \mathbf{d}_e^t \rho_L \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{S}_d^t \mathbf{A}_e \boldsymbol{\varphi}_e / |J| - \frac{1}{2} \mathbf{D}_d^t \boldsymbol{\varphi}_e^t \mathbf{A}_e^t \mathbf{A}_e \boldsymbol{\varphi}_e / |J|^2] d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (28.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_L \delta \iiint_{V_L} \mathbf{a}^t \cdot \mathbf{r} dV_L = & \rho_L \delta \iiint_{V_L} \{a_r r + a_z z + g(z - z_0)\} r dr d\theta dz \\ = & \delta \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho_L (\mathbf{a}^t \cdot \mathbf{r} |J| + g(y - y_0) |J|) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\ = & \delta \boldsymbol{\eta}_e^t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho_L [\mathbf{B}_\eta^t |J| + \mathbf{D}_\eta^t (\mathbf{r}_0 + \mathbf{B}_\eta \boldsymbol{\eta}_e + \mathbf{B}_d \mathbf{d}_e)] \mathbf{a} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\ & + \delta \boldsymbol{\eta}_m^t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho_L [\mathbf{B}_c^t |J| + \mathbf{D}_m^t (\mathbf{r}_0 + \mathbf{B}_\eta \boldsymbol{\eta}_e + \mathbf{B}_d \mathbf{d}_e)] \mathbf{a} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\ & + \delta \mathbf{d}_e^t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho_L [\mathbf{B}_d^t |J| + \mathbf{D}_d^t (\mathbf{r}_0 + \mathbf{B}_\eta \boldsymbol{\eta}_e + \mathbf{B}_d \mathbf{d}_e)] \mathbf{a} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (28.3) \end{aligned}$$

ここに、 $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}_0$  であり、地動加速度ベクトルを表す。

(25)式の第4項は容器の離散系運動方程式となる。

$$\begin{aligned} -\delta \int_{t_0}^{t_1} \iiint_{A_e} \{ \rho_e h \dot{\mathbf{u}} (\dot{\mathbf{u}} / 2 + \mathbf{v}_0) - \Pi(\mathbf{u}) \} r_s dx d\theta dt \\ = \delta \mathbf{d}_e^t (\mathbf{M} \dot{\mathbf{d}}_e + \mathbf{K} \mathbf{d}_e + \mathbf{f}_e) \quad (28.4) \end{aligned}$$

これらの変分式を集計すると、次式のような離散系の場の方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{S}_1^t & \mathbf{S}_\eta & \mathbf{S}_2 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{S}_2^t & -\mathbf{S}_2^t & \mathbf{S}_d & \mathbf{M} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_e \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_e \\ \dot{\mathbf{d}}_e \\ \dot{\mathbf{d}}_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_\varphi & \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_1^t & \mathbf{K}_\eta & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_2^t & \mathbf{K}_{12}^t & \mathbf{K}_d & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_e \\ \boldsymbol{\eta}_e \\ \mathbf{d}_e \\ \mathbf{d}_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}_\varphi \\ \mathbf{f}_\eta \\ \mathbf{f}_d \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (29)$$

(2)式のみを離散化すると、上式の行列  $\mathbf{S}_e$ , および行列  $\mathbf{S}_d$  項はゼロである。これらの項は系に減衰項を導入したときに非ゼロとなる。

$$\mathbf{R} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (30)$$

ここに、未知のベクトル  $\mathbf{q} = \{\varphi_e, \boldsymbol{\eta}_e, \mathbf{d}_e, \dot{\mathbf{d}}_e\}$  である。

### 3. 場の方程式の解法<sup>16,19)</sup>

#### 3.1 固有振動数

行列  $\mathbf{K}_\varphi$  は特異  $\det \mathbf{K}_\varphi = 0$  であり、次式の有意で無い解を有する。

$$\mathbf{K}_\varphi \boldsymbol{\varphi}_0 = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\varphi}_0 = \{1, \dots, 1\} \quad (31)$$

上式を利用して、次の形式の逆行列を得る。

$$\begin{bmatrix} \varphi_e \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_\varphi & \boldsymbol{\varphi}_0 \\ \boldsymbol{\varphi}_0^t & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}}_e \\ \dot{\mathbf{d}}_e \end{bmatrix} \quad (32)$$

これを利用して、次式の運動方程式を得る。

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_1^T & 0 \\ S_2^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_\phi & \phi_0 \\ \phi_0^T & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\eta}_e \\ \dot{d}_e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_g & K_{12} \\ K_{12}^T & K_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_e \\ d_e \end{pmatrix} = \theta \quad (33)$$

この方程式を、対称行列を持つ一般固有値問題へ誘導して、固有振動数を得ることができる。

### 3.2 応答の解析手法

時間積分に用いる解法を選択は重要な判断事項のひとつである。この問題に適用し易く、安定性があるとして広く流体問題の解析に利用されているCrank・Nicolson(クランク・ニコルソン)法<sup>19)</sup>を採用する。 $n$ ステップの諸量が既知として、この方法を(30)式へ適用すると、 $(n+1)$ ステップのつりあい式は次式のように表現される。

$$(R_{n+1} + R_n) \frac{q_{n+1} - q_n}{\Delta t} + (K_{n+1} q_{n+1} + K_n q_n + f_{n+1} + f_n) = \theta \quad (34)$$

この式は、ステップ中央における諸量(平均値)を用いてステップ間の速度を定めることを表す。流体と弾性容器の大変形動的連成問題であり、非線形性が高いと予測されるので、各ステップにおいて、収束計算を行う。 $(n+1)$ ステップにおいて、ニュートン・ラプソン法を用いた収束演算を行う。 $(n+1)$ ステップの $\gamma$ 回目の近似値を $q_{n+1}^\gamma$ 、次回の増分を $\Delta q_{n+1}$ とすると、増分式は形式的に次式のように表される。

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{(R_{n+1} + R_n)}{\Delta t} + \frac{\partial R_{n+1}(q_{n+1}^\gamma - q_n)}{\partial q'} \frac{1}{\Delta t} + K_{n+1} + \frac{\partial K_{n+1} q_{n+1}^\gamma}{\partial q'} + \frac{\partial f_{n+1}}{\partial q'} \right] \Delta q_{n+1} \\ & = - \{ (R_{n+1} + R_n) \frac{q_{n+1}^\gamma - q_n}{\Delta t} + (K_{n+1} q_{n+1}^\gamma + K_n q_n + f_{n+1} + f_n) \} \quad (35) \end{aligned}$$

系の応答は、(35)式を用いて算定される。

## 4. 数値解析

### 4.1 解析モデルと応答解析の基本定数

ここで利用する円筒タンクの数値解析モデルを示す。タンクは2軸対称の形状を有する円筒シェルで構成される。シェル脚部はピン支持とする。円筒シェル、および流体は周方向に16個の要素メッシュ

を有する。円筒シェルは母線方向に4個の要素メッシュを有する。流体は半径方向に5層、上下に6層のメッシュを持つ。閉曲面(close)の容器であり、流体の半径方向の要素、周方向の要素数、および流体の上下の要素数と容器の上下の要素数の数字を並べて、記号C5×16×6×4を用いて表す。

タンクの半径 $r_s$ は25m、容器高さ $H$ は30m、流体高さは21.6mとする。容器厚さ $h$ は40mm、および55mmを用いる。容器の要素分割と流体の自由表面の要素メッシュをアイソメ表示して、Fig.2に示す。(35)式の独立自由度は1384個(速度ポテンシャル623個、波高89個、シェル672個)である。

減衰は分数調波振動の生起に大きな影響を有することが知られている。ここでは、次の減衰<sup>16,19)</sup>を仮定した。臨界減衰比は振動数 $\omega_\eta = 0.82\text{rad/s}$ 、および $\omega_c = 7.0\text{rad/s}$ に対して、 $h_c = h_\eta = 0.0075$ を与えた。

また、時刻歴応答は時間刻み $\Delta t = 0.01$ 秒とし、時刻100秒までの応答を解析した。(35)式におけるニュートン・ラプソン法の収束演算は4回とした。

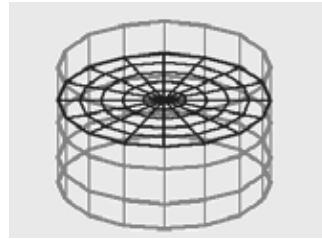


Fig.2 C5×16×6×4 Model

### 4.2 応答データの整理

#### 4.2.1 タンク応答の計測位置と周方向展開次数

流体の波高、および容器の変位、合応力の測定位置と表示方法を示す。容器の差分変位、および合応力は自由表面から-6m位置(タンク底から15.6m)の応答値を用いた。容器の周方向法線方向の差分変位、差分合応力、および周方向波高は有限フーリエ級数へ展開したフーリエ係数(スペクトルと記述する)を用いた表示も利用する。容器の応力もこのレベルの合応力 $N_\theta$ 、および $M_\theta$ を用いて、図示する。

フーリエ級数の周方向展開次数を  $n$  と表示し、加力方向に関して対称な波高、および変位モードを Cosine 成分、逆対称となるモードを Sine 成分と記述する。これらの成分はそれぞれ周方向展開次数の成分を持つので、Cosine 成分 (C0,C1,...,C8)、および Sine 成分(S1,S2,...,S7) の表示を利用する。

#### 4.2.2 非線形振動応答の振動モードの特定

分岐する非線形振動応答を構成する振動モードを特定するために、固有振動数  $\omega_{n,k}$  に対応する固有振動モード  $\phi_{nk}^c$ 、および  $\phi_{nk}^s$  を用いて、応答を次式のように分析する。任意時刻の応答  $q = \{\varphi_e, \eta_e, d_e\}$  とするとき、このうちベクトル  $\varphi_e$  を省略し、残るベクトル  $\bar{q} = \{\eta_e, d_e\}$  を振動モードの張る空間に展開する。

$$\bar{q} = \sum_{n=0}^N \sum_{k=1}^{M_n} (\zeta_{nk}^c \phi_{nk}^c + \zeta_{nk}^s \phi_{nk}^s) \quad (36)$$

ここでは、周方向にシェル、および流体を 16 等分しているため、 $n$  は 0 から 8 までをとり、 $n=0,8$  に対する  $\phi_{nk}^s$  は存在しない。

時刻歴 89.77 秒から 100 秒までの、時間間隔 0.01 秒の応答 1024 個を上記振動モードに分解する。その後、各振動モードの応答を有限フーリエ級数に展開して、応答スペクトルを解析し、分岐する応答の振動モードを特定する。本論文では、最小固有振動数から 144 番目の固有振動数に対応する固有振動モードを利用して、応答の振動モード分析を行う。

#### 4.2.3 応答成分のスペクトル分析

本論文に用いた波高、および容器の差分変位・合応力等の応答スペクトルを示す。時間間隔 0.01 秒を用いて解析された時刻歴 89.77 秒から 100 秒までの 1024 個のデータを有限フーリエ級数に展開し、得られたフーリエ係数を応答スペクトルとした。

### 4.3 固有振動数の数値解析

容器は鋼板、流体は水をモデルとし、材料の機械的性質を Table1 に示す。4.1 節に示した解析モデル C5×16×6×4 の容器シェル厚さ  $h$  を 40mm、および

55mm とした系の固有振動数をそれぞれ Table2, および Table3 に示す。シェル板厚が変化しても振動数が一定の値を示す固有振動数はスロッシング振動、あるいはシェル面内変形に対応する振動モードに対応する。板厚の影響を受ける固有振動数に対応する振動モードはシェル面外変形が比較的大きいと判断できる。これらの振動モードの挙動が流体と容器の非線形振動応答に大きな影響を及ぼす。

Table2 に示した周方向展開次数  $n=5$  に対応する 6, 8, 9 番目の固有振動数  $\omega_{5,6}, \omega_{5,7},$  および  $\omega_{5,8}$  に対応する振動モードのアイソメ図と平面投影図を Fig.3.1 に示す。 $n=6$  に対応する 5,6, および 8 番目の固有振動数  $\omega_{6,5}, \omega_{6,6},$  および  $\omega_{6,8}$  に対応する振動モードのアイソメ図と平面投影図を Fig.3.2 に示す。

Fluid	Shell(Steel)		
Mass Density	Mass Density	Young Modulus	Poisson Ratio
1000kg/m <sup>3</sup>	7850kg/m <sup>3</sup>	205.9GPa	0.3

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1.08	1.33	1.79	2.28	2.77	3.08	32.20	33.12	35.01
1	0.82	1.49	1.99	2.50	2.87	15.12	17.55	25.14	31.56
2	1.11	1.70	2.20	2.71	2.99	9.98	17.49	19.11	27.85
3	1.33	1.89	2.38	2.84	3.42	8.06	16.51	23.63	30.41
4	1.53	2.08	2.57	2.95	3.93	7.17	14.98	17.41	18.37
5	1.73	2.28	2.77	3.12	4.83	6.73	12.72	13.49	17.43
6	1.91	2.47	2.94	3.38	5.59	6.47	9.23	11.66	15.70
7	2.06	2.62	3.08	3.65	6.22	6.37	7.53	9.48	12.29
8	2.12	2.69	3.14	3.77	6.51	6.66	6.99	7.90	9.55

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1.08	1.33	1.79	2.28	2.77	3.08	44.28	48.13	52.75
1	0.82	1.49	1.99	2.50	2.87	17.55	22.25	35.39	43.22
2	1.11	1.70	2.20	2.71	2.99	14.89	17.49	22.25	37.84
3	1.33	1.89	2.38	2.85	3.42	11.92	22.35	30.74	33.58
4	1.53	2.08	2.57	2.96	4.23	10.36	17.41	19.32	21.71
5	1.73	2.28	2.78	3.13	4.83	9.26	14.67	17.43	18.22
6	1.92	2.48	2.95	3.39	5.59	8.26	11.86	15.58	19.63
7	2.07	2.64	3.09	3.65	6.23	8.02	10.41	12.67	15.75
8	2.13	2.70	3.16	3.77	6.53	8.55	9.61	10.86	13.13



イソメ図と平面投影図を Fig.3.2 に示す。振動モードの波高とシェル変位の値を同じ倍率で拡大し、図示した。固有振動数 $\omega_{6,5}$ の振動モードはシェルの変位を含まないスロッシング振動が主のモードである。他の振動モードは容器が変位する成分を多く含む流体と容器が連成するモードに対応する。

水のスロッシング振動の最小固有振動数 $\omega_{1,1}$ は 0.82rad/s であり、容器の振動モードを含む固有振動数は 6.2rad/s 以上である。

## 5. 振動応答

### 5.1 振動応答のタイプ

振幅が小さな応答を解析し、線形振動理論を用いて説明されるタンクの応答を解析する。分岐を伴う振動は一般に変化の激しい応答を示す。まず、分岐する振動成分がほぼ単一の卓越周期を有する応答を解析し、応答を検討する。続いて、分岐する振動が

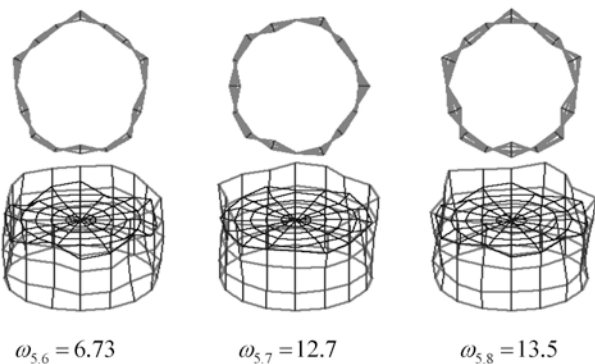


Fig.3.1 Three Frequencies and Vibration Modes with  $n=5$

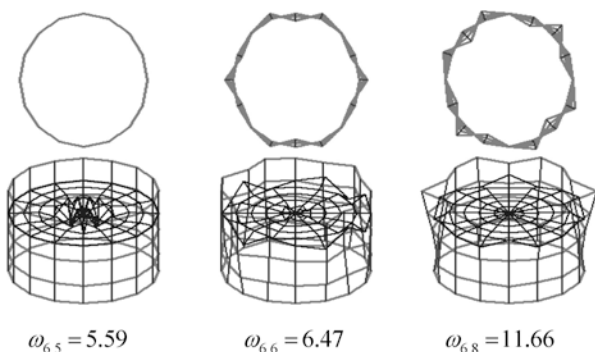


Fig.3.2 Three Frequencies and Vibration Modes with  $n=6$

複数のスペクトルを有する応答を検討する。

#### 5.1.1 微小振幅の応答

外力振動数 $\omega = 24\text{rad/s}$ 、外力振幅 $a_x = 0.08\text{m/s}^2$ と設定したモデルを解析した。得られた波高の Cosine 成分(C1,C2,および C3) の時刻歴応答(0-100 秒)を Fig. 4 に示す。同様に、容器の法線方向差分変位の Cosine 成分(C1,C2,および C3)の時刻歴応答(0-100 秒)を Fig.5 に示す。それらに対応する各応答スペクトルをそれぞれ Fig.6, および Fig.7 に示す。時刻歴応答は収束に向かう応答を示す。容器の応答は外力振動数と同一の振動数を有する基本振動数の成分のみの応答スペクトルを有する。波高の応答に、過渡応答が残存しているものの、いずれゼロに収束するものと思われる。これらの応答は線形振動理論を用いて、説明される。容器差分変位の Cosine 成分の基本振動数応答のスペクトル(変位振幅)は周方向展開次数  $n$  の 1,2,3,4,5,および 6 に対応して、それぞれ 0.1mm,0.87mm, 0.22mm, 0.15mm, 0.16mm, および 0.13mm である。

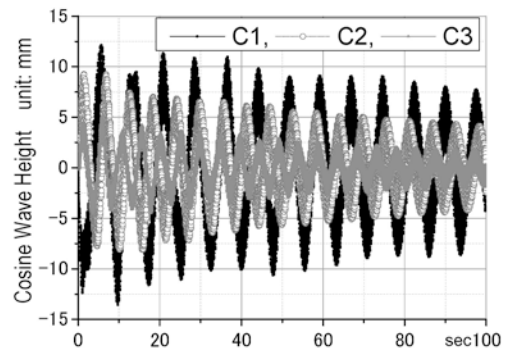


Fig.4 Time History Response of Wave Height ( $\omega=24, a_x=0.08$ )

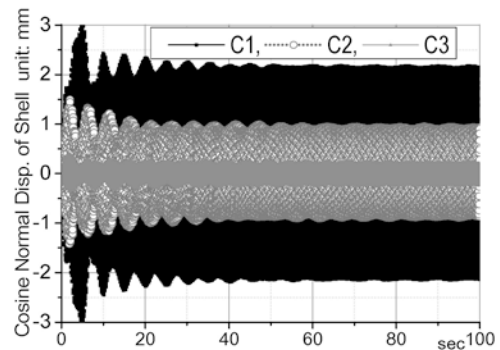
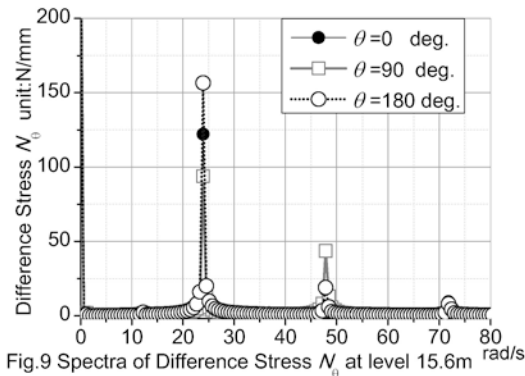
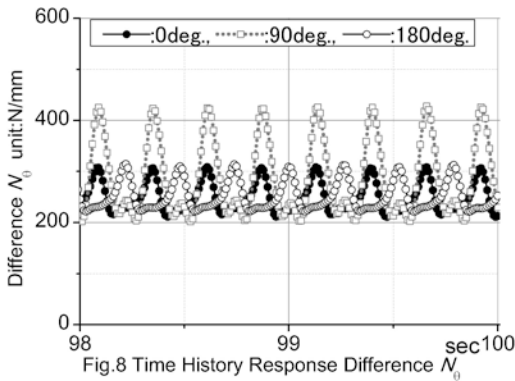
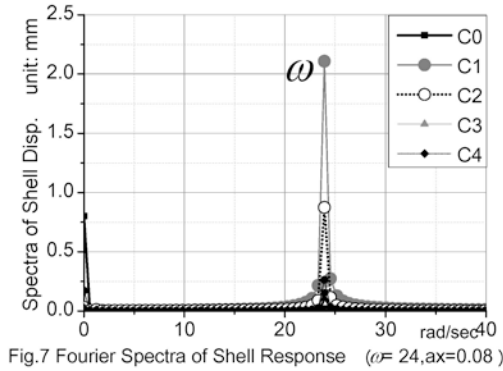
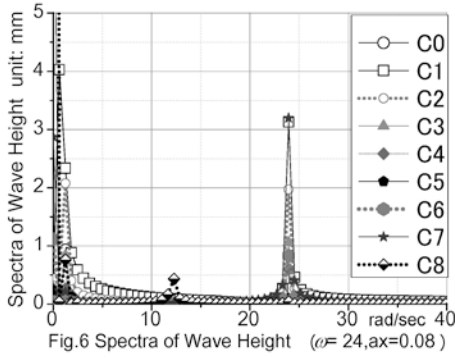


Fig.5 Time History Response of Shell Disp. ( $\omega=24, a_x=0.08$ )

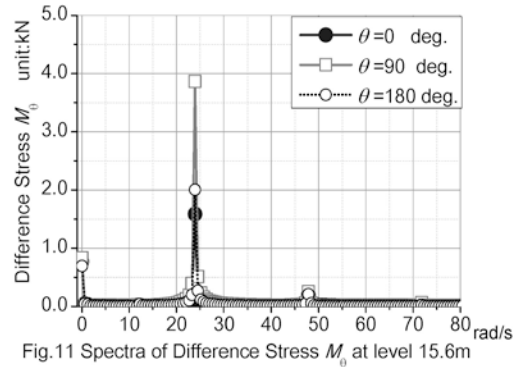
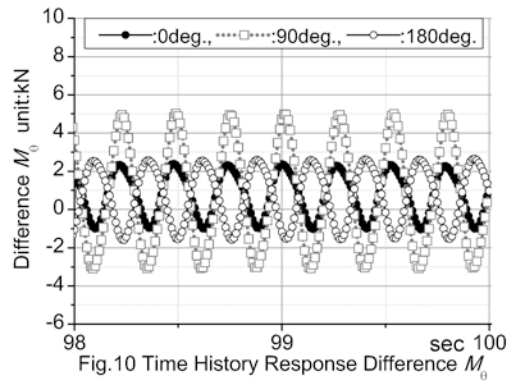
0°, 90°, および180° 位置における容器の差分の膜応力（位置は4.2.1に示した） $N_\theta$ の時刻歴



応答(98-100秒), および応答スペクトルをそれぞれ Fig.8, および Fig.9 に示す. これら3点の最大値を用いると, 差分の膜力  $N_\theta$  は基本振動成分 157N/mm, および2倍高調波振動成分 44N/mm の振幅を示す. 同じ時刻の差分合応力  $M_\theta$  の応答, および応答スペクトルをそれぞれ Fig.10, および Fig.11 に示す. Fig.11 は基本振動成分のみのスペクトルを有する.

### 5.1.21/2 分数調波振動応答の生起

外力振動数  $\omega = 21.5 \text{ rad/s}$ , 外力振幅  $a_x = 0.4 \text{ m/s}^2$  と設定したモデルを解析した. 得られた容器の法線方向差分変位応答の Cosine 成分, および Sine 成分の時刻歴応答(0-100秒)をそれぞれ Fig.12, および Fig.13 に示す. Cosine 成分の応答は時刻 40 秒近傍で定常的な応答となる. Sine 成分の応答は 40 秒近傍以降急激に増大し, 70 秒近傍以降, 定常的な応答となる. これらの成分の応答スペクトルをそれぞれ Fig.14, および Fig.15 に示す. 各成分に振動数 11.04rad/s を卓越スペクトルとする 1/2 分数調波振



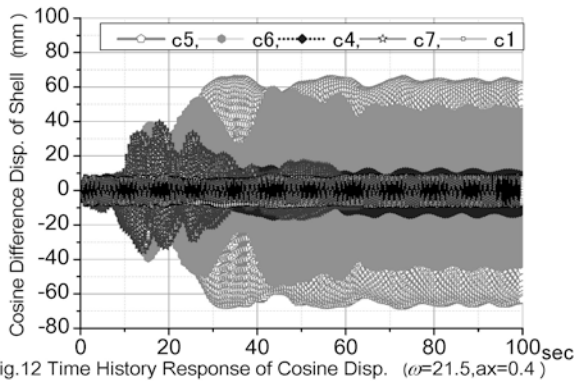


Fig.12 Time History Response of Cosine Disp. ( $\omega=21.5, ax=0.4$ )

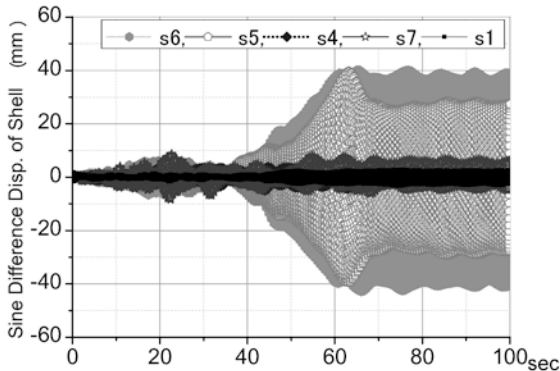


Fig.13 Time History Response of Sine Disp. ( $\omega=21.5, ax=0.4$ )

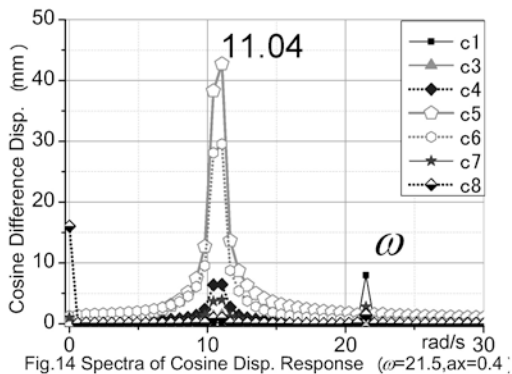


Fig.14 Spectra of Cosine Disp. Response ( $\omega=21.5, ax=0.4$ )

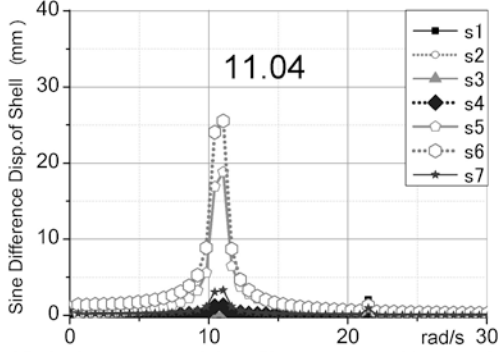


Fig.15 Spectra of Sine Disp. of Response ( $\omega=21.5, ax=0.4$ )

動応答が発生している。Cosine成分 C6モード、および C5モードの卓越したスペクトルは、振動数 11.66rad/sにおいてそれぞれ 42.7mm, および 29.6mm である。Sine成分の S5モード, および S6モードの卓越したスペクトルは、その振動数においてそれぞれ 25.5mm, および 18.9mm である。Cosine成分、および Sine成分の両方に 1/2 分数調波振動応答が生起する。この分数調波振動応答の発生に周方向展開次数  $n=6$ , および 5 に対応する振動モードが関与している。この分数調波振動応答を構成する振動モードを特定する。

一般化座標の差分応答を、最小固有振動数から 144 番目までの固有振動数に対応する固有振動モードに分解し、それぞれの時刻歴応答を有限フーリエ級数分解して得られたスペクトルを、周方向展開次数  $n$  が奇数、および偶数に分けてそれぞれ Fig.16, および Fig.17 に示す。  $n=5$ , および 6 の 1/2 分数調波振動応答はそれぞれ固有振動数  $\omega_{5,6}$ , および  $\omega_{6,6}$  に対応する Cosine成分, および Sine成分の振動モードに生起する。これらの固有振動数は Table2 から、それぞれ 6.73rad/s, および 6.47rad/s を有する。

次に、タンク底からレベル 15.6m 位置の容器の差分の合応力応答を示す。  $\theta$  が  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ , および  $180^\circ$  位置における容器の母線方向の差分膜応力  $N_\theta$  の時刻歴応答 (98-100 秒), およびこの差分膜応力のスペクトルをそれぞれ Fig.18, および Fig.19 に示す。  $\theta$  が  $0^\circ$ , および  $180^\circ$  位置の応答は 1/2 分数調波振動成分が主となり、基本振動数成分を含む応答を示す。  $90^\circ$  の応答はこれら 2 つ振動成分の他 2 倍高調波振動成分を含む応答を示す。

差分の合応力  $M_\theta$  の時刻歴応答 (98-100 秒), およびこの合応力のスペクトルをそれぞれ Fig.20, および Fig.21 に示す。  $\theta$  が  $0^\circ$ , および  $180^\circ$  位置の応答は 1/2 分数調波振動成分が主となる。  $90^\circ$  位置の応答は 1/2 分数調波振動成分が主となり、基本振動成分を含む応答を示す。

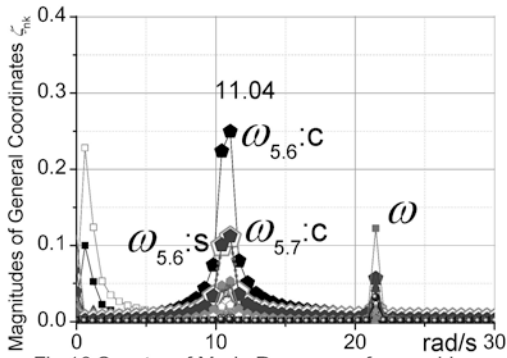


Fig.16 Spectra of Mode Responses for n=odd

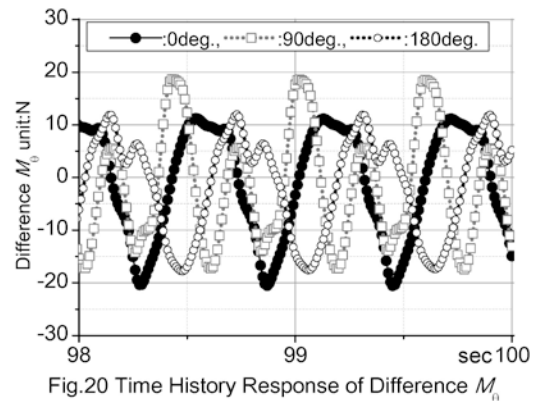


Fig.20 Time History Response of Difference  $M_n$

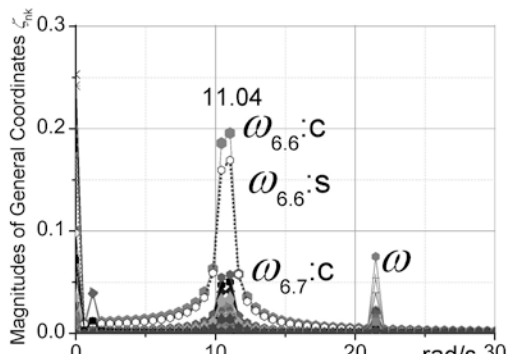


Fig.17 Spectra of Mode Responses for n=even

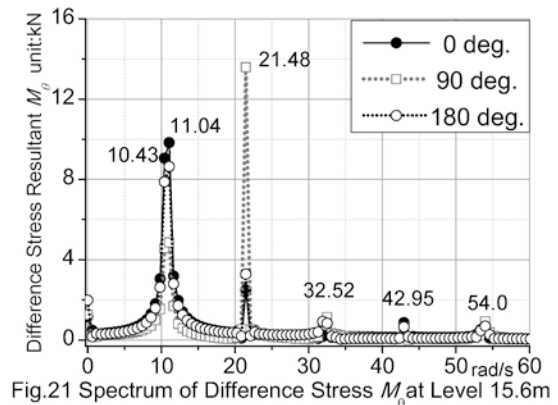


Fig.21 Spectrum of Difference Stress  $M_n$  at Level 15.6m

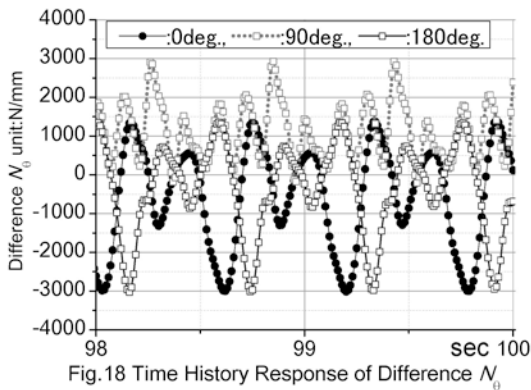


Fig.18 Time History Response of Difference  $N_0$

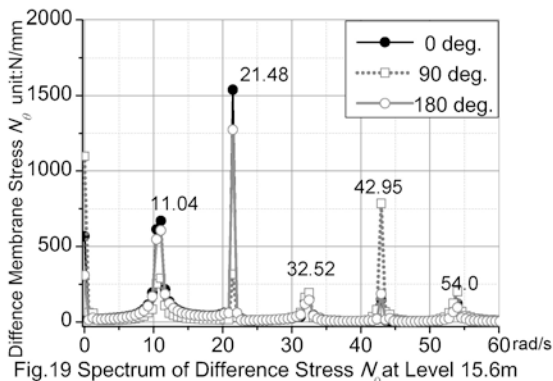


Fig.19 Spectrum of Difference Stress  $N_0$  at Level 15.6m

### 5.1.3 1/3 分数調波振動応答

外力振動数  $\omega = 33.1 \text{ rad/s}$ , 外力振幅  $a_x = 1.0 \text{ m/s}^2$  と設定したモデルを解析した. 得られた容器の法線方向差分変位応答の Cosine 成分, および Sine 成分の時刻歴応答(0-100 秒)をそれぞれ Fig.22, および Fig.23 に示す.

Cosine 成分, および Sine 成分の時刻 80 秒以降は周方向展開次数  $n=5$  を有する変位応答が主となる定常的な応答となる. これらに対応する Cosine 成分, および Sine 成分の応答スペクトルをそれぞれ Fig.24, および Fig.25 に示す. 振動数  $11.04 \text{ rad/s}$  を有する  $n=5$  を有するモードが主となる分数調波振動が生起する. この振動数は基本振動数  $33.13 \text{ rad/s}$  の  $1/3$  の振動数を有する  $1/3$  分数調波振動である. 時刻 50-80 秒において,  $n=5$ , および  $6$  を有する振動モードが連成して分数調波振動が生起していることが伺える. その後,  $n=5$  のモードが主となる  $1/3$  分数

調波振動応答となり、 $n=6$ の振動モードは減衰して小さな応答となる。

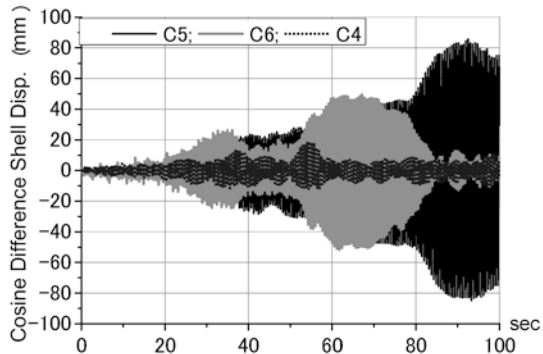


Fig.22 Time History Response of Shell Disp. ( $\omega=33.1, ax=1$ )

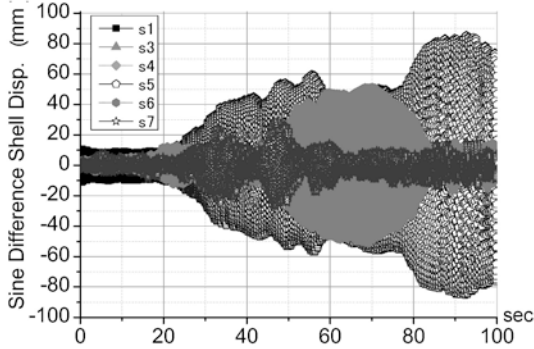


Fig.23 Time History Response of Shell Disp. ( $\omega=33.1, ax=1$ )

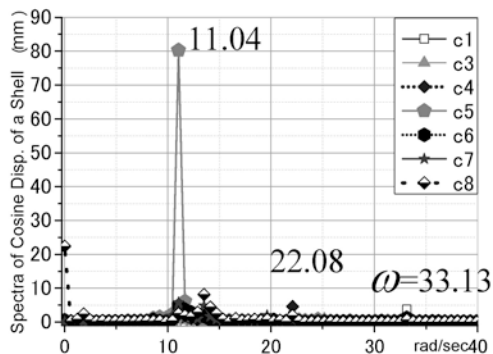


Fig.24 Spectra of Difference Disp. Response ( $\omega=33.1, ax=1$ )

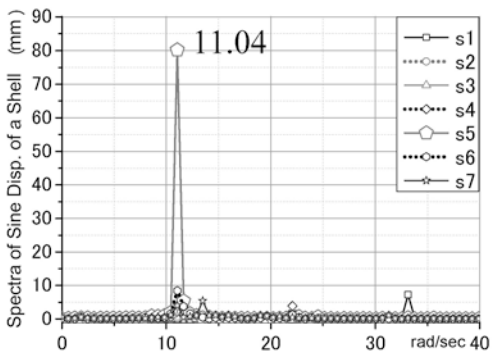


Fig.25 Spectra of Difference Disp. Response ( $\omega=33.1, ax=1$ )

これらの応答に参与する固有振動モードを特定する。一般化座標の差分応答を、最小固有振動数から144番目までの固有振動数に対応する固有振動モードに分解し、それぞれの時刻歴応答を有限フーリエ級数分解して得られたスペクトルを、周方向展開次数  $n$  が奇数、および偶数に分けて、それぞれ Fig.26、および Fig.27 に示す。振動数 11.04rad/s を持つ  $n=5$  の  $1/2$  分数調波振動のスペクトルのみが卓越する。これは固有振動数  $\omega_{5,6}$  に対応する Cosine 成分、および Sine 成分の固有振動モードに生起し、両成分の振幅は Fig.24、および Fig.25 からそれぞれ 80.3mm、および 80.1mm であり、ほぼ等しい値を示す。このため、Cosine 成分、および Sine 成分の時刻歴応答 (Fig.22, および Fig.23) は相互に類似する。

次に、容器の差分合応力の応答を示す。  $\theta$  が  $0^\circ, 90^\circ$ 、および  $180^\circ$  位置における容器の母線方向の差分の膜応力  $N_\theta$  の時刻歴応答 (98-100 秒)、および応答スペクトルをそれぞれ Fig.28、および Fig.29 に示す。 Fig.29 から  $1/3$  分数調波振動、および

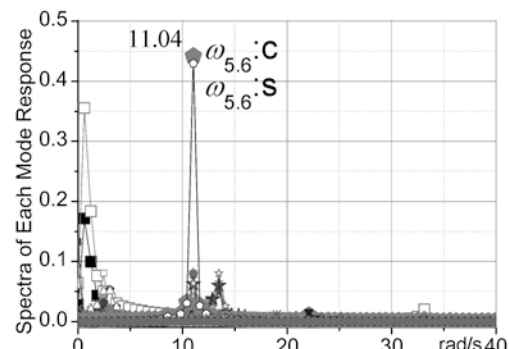


Fig.26 Spectra of Each Vibration Mode for  $n=odd$

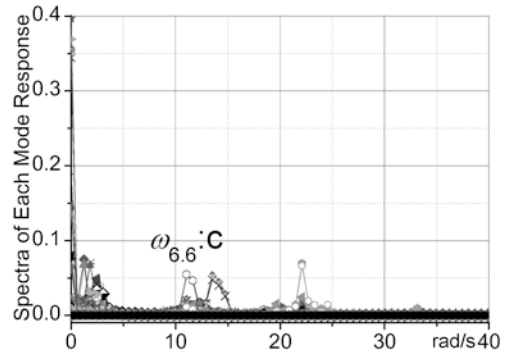


Fig.27 Spectra of Each Vibration Mode for  $n=even$

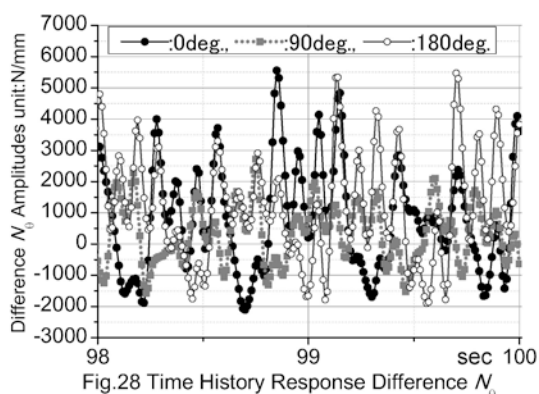


Fig.28 Time History Response Difference  $N_0$

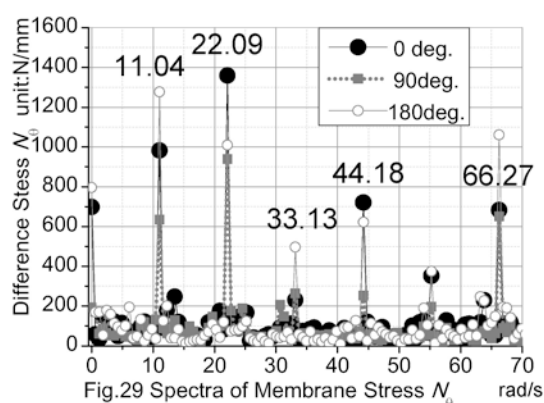


Fig.29 Spectra of Membrane Stress  $N_0$

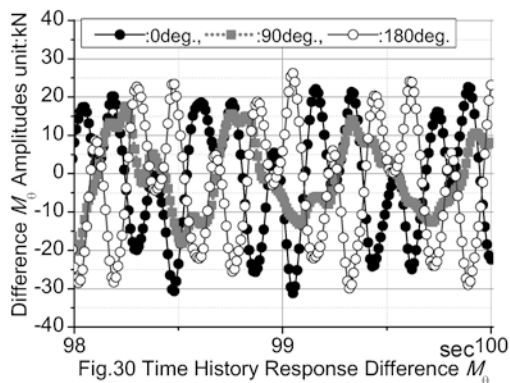


Fig.30 Time History Response Difference  $M_0$

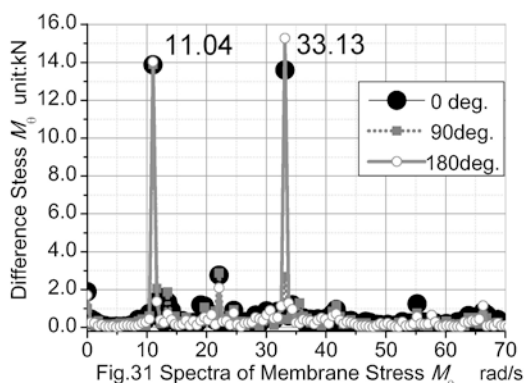


Fig.31 Spectra of Membrane Stress  $M_0$

2/3 分数調波振動が卓越し、4/3 分数調波振動、および 2 倍高調波振動の応答が基本振動数のそれより大きな成分となる。高調波振動成分が大きいので、応答は複雑な波形を示す。

差分の合応力  $M_0$  の時刻歴応答 (98-100 秒)、およびこの合応力のスペクトルをそれぞれ Fig.30、および Fig.31 に示す。これらの応答は 1/3 分数調波振動が主となり、2/3 分数調波振動、および基本振動成分を含む応答を示す。

#### 5.1.4 複数のスペクトルを有する 1/2 分数調波振動応答

前項まで単一の卓越したスペクトルを有する分数調波振動応答が生起する応答を示した。これらモデルにおいて、外力振動数をわずかに変更すると、複数のスペクトルを有する分数調波振動応答が生起する。一般に、単一のスペクトルを持つ分数調波振動応答が出現する外力振動数、および外力振幅の不安定領域において、これらのパラメータをわずかに変更すると、複数のスペクトルを有する分数調波振動応答が出現する。一方、外力振動数に大きな変化を与えると、分数調波振動は生起しないこともある。

外力振動数  $\omega = 24 \text{ rad/s}$ 、外力振幅  $a_x = 1.2 \text{ m/s}^2$  と設定したモデルを解析する。得られた Cosine 成分、および Sine 成分の差分変位の時刻歴応答(0-100 秒)をそれぞれ Fig. 32, および Fig.33 に示す。これらに対応する応答スペクトルをそれぞれ Fig.34、および Fig.35 に示す。両方の卓越応答スペクトルは振動数  $11.66 \text{ rad/s}$  の周方向展開次数  $n=5$  の振動モードの分数調波振動である。振動数  $12.27 \text{ rad/s}$  を有する 2 番目の大きさを持つスペクトルが観察される。これらは両方のスペクトルにおいて  $n=4$ 、および  $6$  を有する振動モードに生起した分数調波振動に対応する。これら卓越するスペクトルの振動数の和は  $23.93 \text{ rad/s}$  であり、基本振動数と一致する。さらに、Fig.35 の卓越スペクトルを示す  $n=5$  の振動モードは

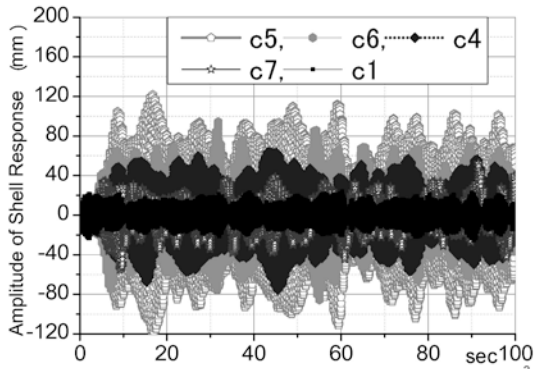


Fig.32 Time History Response of Shell ( $\omega=24\text{rad/s}, ax=1.2\text{m/s}^2$ )

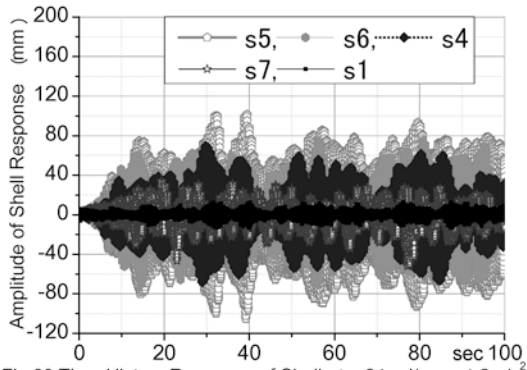


Fig.33 Time History Response of Shell ( $\omega=24\text{rad/s}, ax=1.2\text{m/s}^2$ )

振動数  $11.66\text{rad/s}$  において、極大値を持つスペクトルを示す。Fig.34 の  $n=5$  の振動モードも振動数  $11.66\text{rad/s}$ 、および  $12.89\text{rad/s}$  において極大値のスペクトルを有する。

分岐した分数調波振動を構成する振動モードを特定する。一般化座標の差分応答を、最小固有振動数から 144 番目までの固有振動数に対応する固有振動モードに分解し、各応答を有限フーリエ級数分解して得られたスペクトルを、周方向展開次数  $n$  が奇数、および偶数に分けて、それぞれ Fig.36、および Fig.37 に示す。振動数が  $5\text{rad/s}$  未満のスロッピング振動に対応するスペクトルを除くと、周方向展開次数  $n$  が奇数の振動モードは Cosine 成分、および Sine 成分共に振動数  $11.66\text{rad/s}$  に卓越したスペクトルを持つ。このスペクトルは、固有振動数  $\omega_{5,6}$ 、および  $\omega_{5,7}$  に対応する振動モードである。一方、 $n$  が偶数の振動モードは Cosine 成分、および Sine 成分共に振動数  $12.27\text{rad/s}$  に卓越したスペクトルを持つ。これは、

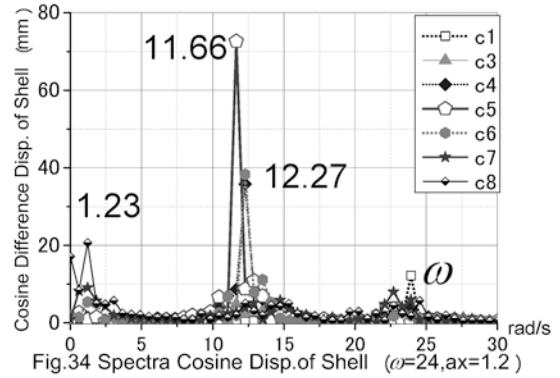


Fig.34 Spectra Cosine Disp. of Shell ( $\omega=24, ax=1.2$ )

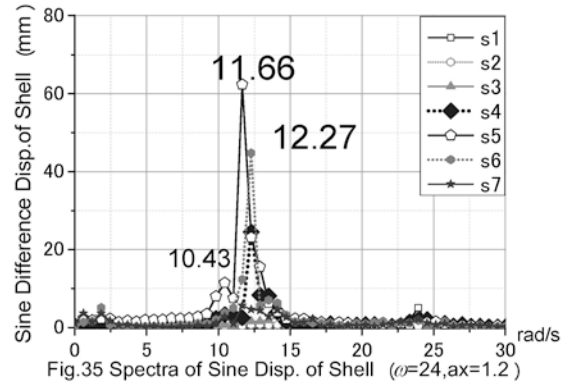


Fig.35 Spectra of Sine Disp. of Shell ( $\omega=24, ax=1.2$ )

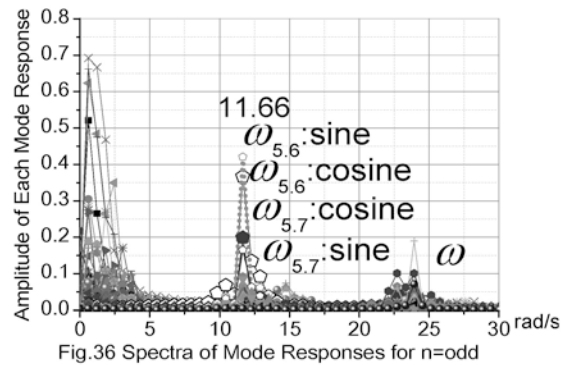


Fig.36 Spectra of Mode Responses for  $n=\text{odd}$

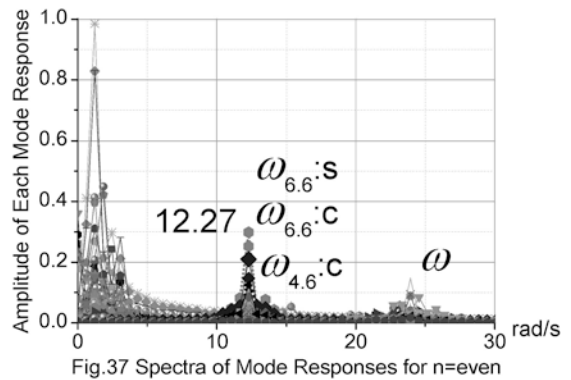


Fig.37 Spectra of Mode Responses for  $n=\text{even}$

固有振動数  $\omega_{6,6}$ 、および  $\omega_{4,6}$  に対応する振動モードである。

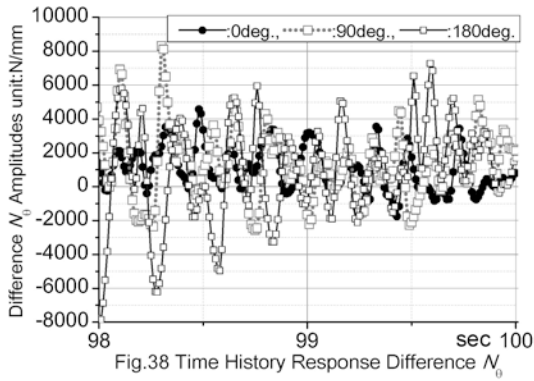


Fig.38 Time History Response Difference  $N_\theta$

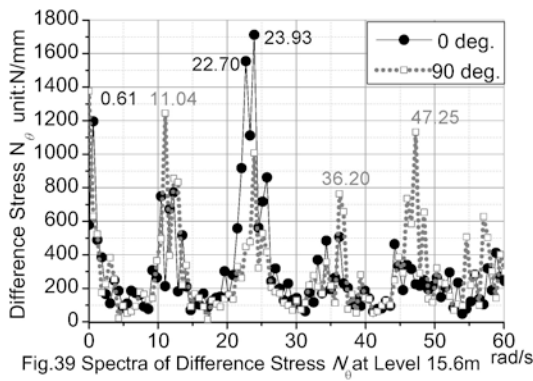


Fig.39 Spectra of Difference Stress  $N_\theta$  at Level 15.6m

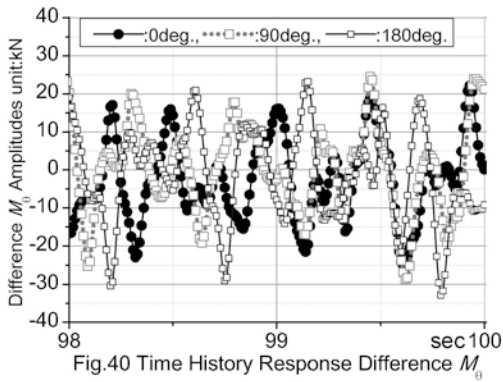


Fig.40 Time History Response Difference  $M_\theta$

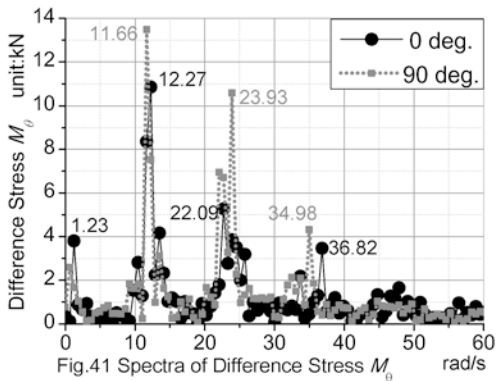


Fig.41 Spectra of Difference Stress  $M_\theta$

周方向展開次数  $n$  が奇数と偶数を有する振動モードが異なるスペクトルを有する現象も、卓越スペクトル2つのモデルでは数多く観察された。

固有振動数  $\omega_{5,6}$  に対応する振動モードの振動数 11.66rad/s の振幅は、外力振幅が  $0.2\text{m/s}^2$  (5.1.2 項の解析) から  $1.2\text{m/s}^2$  に 6 倍増加すると、0.4mm から 95mm へ、約 230 倍増大している。急激な増加であり、これらは分数調波振動成分の分岐に対応する。

$\theta$  が  $0^\circ$  , および  $90^\circ$  位置における容器の母線方向の差分膜応力  $N_\theta$  , およびその応答スペクトルをそれぞれ Fig.38, および Fig.39 に示す。基本振動数 23.93rad/s, および2つの分数調波振動数 11.66rad/s, および 12.27rad/s, および 36rad/s 近傍の振動数に大きなスペクトルがある。同一の3点における差分合力  $M_\theta$  , およびその応答スペクトルをそれぞれ Fig.40, および Fig.41 に示す。卓越スペクトルが複数あるので、それらの整数倍の振動数も多岐となり、応答スペクトルの極大値も数が多くなる。

### 5.1.5 複数のスペクトルを有する 1/3 分数調波振動 応答

外力振動数  $\omega = 37\text{rad/s}$ , 外力振幅  $a_x = 1\text{m/s}^2$  と設定したモデルを解析する。得られた容器応答の Cosine 成分, および Sine 成分の時刻歴応答(0-100 秒)をそれぞれ Fig.42, および Fig.43 に示す。応答は時刻に依存して振幅が増減するうなり振動応答を示す。図示した応答は過渡的な応答である可能性が高いものの、4.2.3 に示した時刻 90-100 秒の応答を分析する。Cosine 成分, および Sine 成分の応答スペクトルをそれぞれ Fig.44, および Fig.45 に示す。Cosine 成分は C4 モードの振動数 12.27rad/s, C7 の振動数 12.89rad/s, C8 の振動数 13.50rad/s, および C5 の振動数 11.66rad/s を有し、それぞれ 36.3mm, 20.4mm, 13.1mm, および 10.3mm のスペクトルを有する。



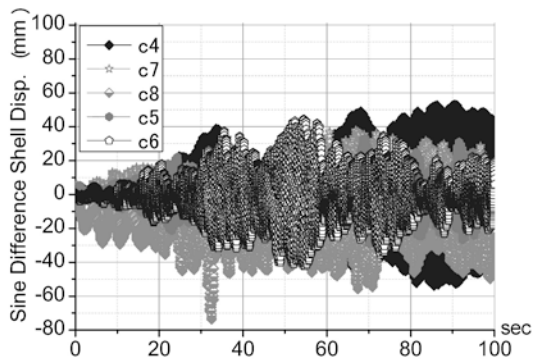


Fig.42 Time History Response of Shell Disp. ( $\omega=33.1, ax=1$ )

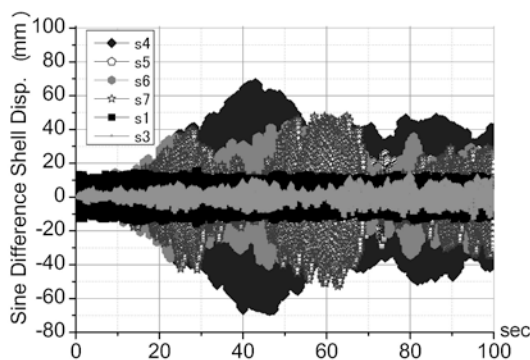


Fig.43 Time History Response of Shell Disp. ( $\omega=33.1, ax=1$ )

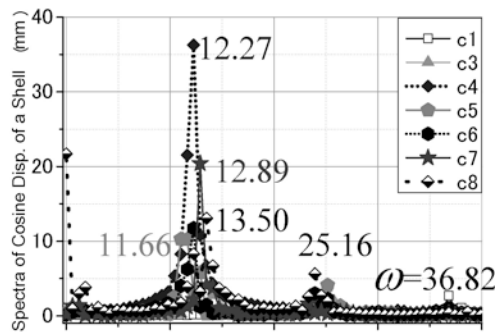


Fig.44 Spectra of Difference Disp. Response ( $\omega=37, ax=1$ )

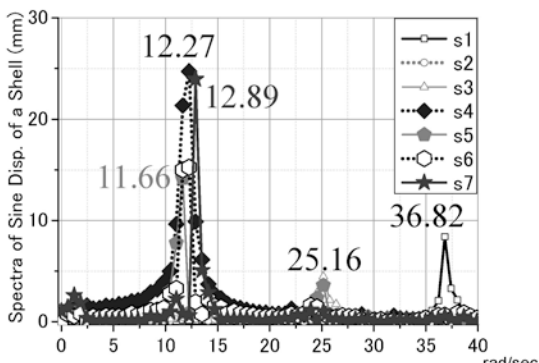


Fig.45 Spectra of Difference Disp. Response ( $\omega=37, ax=1$ )

Sine 成分は S4 モードの振動数 12.27rad/s, S7 の振動数 12.89rad/s, および S6 の振動数 11.66rad/s を有し, それぞれ 24.7mm, 24.0mm, および 14.2mm のスペクトルを有する.

Cosine 成分, および Sine 成分に共通する 3 つのスペクトルに対応する振動数の和  $36.82(=12.27+12.89+11.66)$ rad/s が基本振動数と一致する. これらの振動数は近接しているため, 系全体では 1/3 分数調波振動に似た分数調波振動応答を示す.

この分数調波振動応答を構成する振動モードを特定する. 応答を最小固有振動数から 144 番目までの固有振動数に対応する固有振動モードに展開して得られ各モードの応答を有限フーリエ級数分解して得られたスペクトルをそれぞれ Fig.46, および Fig.47 に示す.

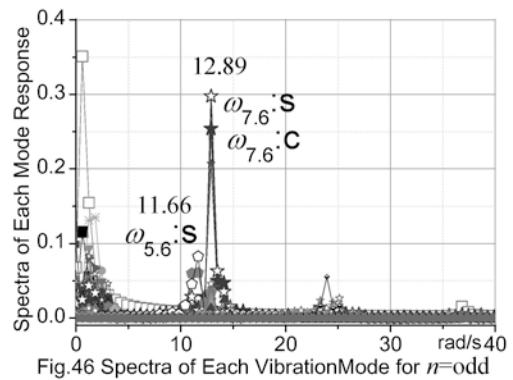


Fig.46 Spectra of Each Vibration Mode for  $n=odd$

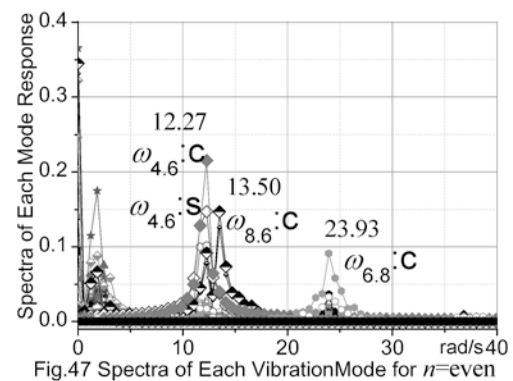


Fig.47 Spectra of Each Vibration Mode for  $n=even$

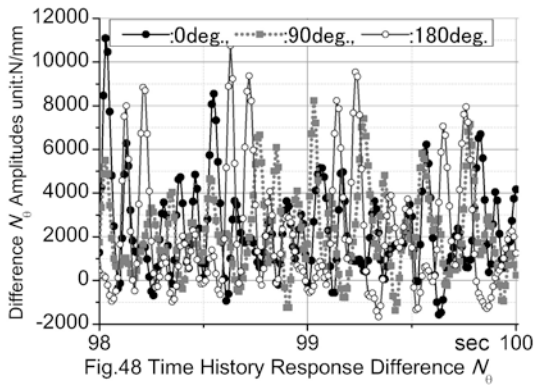


Fig.48 Time History Response Difference  $N_0$

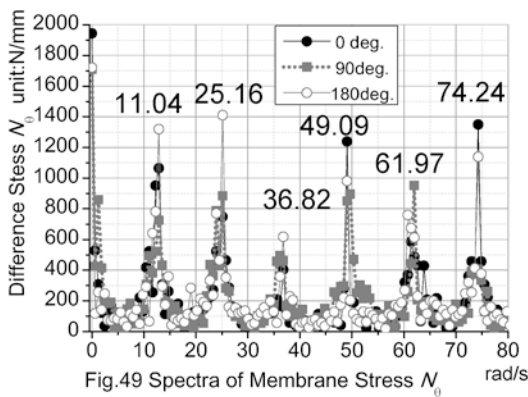


Fig.49 Spectra of Membrane Stress  $N_0$

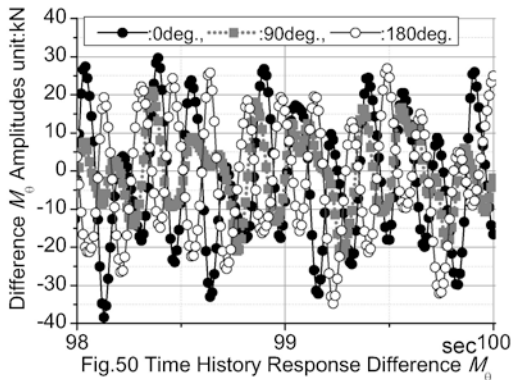


Fig.50 Time History Response Difference  $M_0$

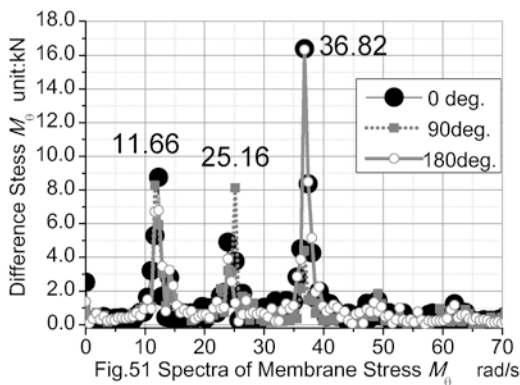


Fig.51 Spectra of Membrane Stress  $M_0$

これらのスペクトルは分数調波振動数の領域において、それぞれ2カ所で顕著な極大値を示す。 $n$ が奇数のスペクトルは、振動数12.89rad/sで卓越し、振動数11.66rad/sが2番目である。これらは固有振動数 $\omega_{7,6}$ 、および $\omega_{5,6}$ に対応する振動モードが生起する。 $n$ が偶数のスペクトルは振動数12.27rad/sで卓越し、振動数13.50rad/sが2番目である。これらは固有振動数 $\omega_{4,6}$ 、および $\omega_{8,6}$ に対応する振動モードが生起する。

$\theta$ が $0^\circ$ 、および $90^\circ$ 位置における容器の母線方向の差分膜応力 $N_\theta$ 、およびその応答スペクトルをそれぞれFig.48、およびFig.49に示す。振動数11.04rad/s、および25.16rad/sの分数調波振動応答は基本振動数の応答の2倍以上を示す。また、2倍高調波振動数74.24rad/s、および49.09rad/sや61.97rad/sの振動数を持つ分数調波振動の応答も大きな応答を示す。同一の3点における差分合応力 $M_\theta$ 、およびその応答スペクトルをそれぞれFig.50、およびFig.51に示す。この差分合応力の分数調波振動応答は振動数11.66rad/s、および25.16rad/sに見られ、基本振動数の応答値の1/2程度を示す。

## 5.2 分数調波振動の発生領域と応答

容器を構成するフルモデルの円筒シェルは形状的に2つの直交する変位を生起する。ひとつは加力方向の軸に関して対称変形(Cosine成分)、および逆対称変形(Sine成分)であり、他方は周方向フーリエ級数展開次数 $n$ の相違である。一方向の水平振動が作用する減衰を有する線形系では、一般に5.1.1に示すようなCosine成分の応答を示す。

分数調波振動応答が生起する時、Cosine成分、およびSine成分の各周方向展開次数の振動モードの応答が単一のスペクトルを示す領域がある。このケースを5.1.2-5.1.3に示した。単一のスペクトルを有する領域の近傍に振動数がわずかに異なる複数のス

ペクトルを有する分数調波振動応答を示す領域がある。このケースを 5.1.4, および 5.1.5 に示した。

このような分数調波振動の発生と生起する分数調波のスペクトル, および分岐する振動モードの周方向展開次数の関連を検討する。

### 5.2.1 分数調波振動が分岐する領域

横軸に外力振動数, 縦軸に外力振幅をとり, 円筒シールの法線方向差分変位の分数調波振動応答が 0.5mm 以上となる領域を Fig. 52 に破線を用いて示す。このラインより大きな外力振幅の領域に分数調波振動応答が生起する。この不安定領域の内部にある点にある外力振動数, および外力加速度における分数調波振動応答の振幅は多様に変化する。例えば, 外力振幅のみを増加させても, 発生する卓越スペクトルの大きさは増加するとは限らない。

### 5.2.2 単一スペクトルの分数調波振動応答

単一の卓越スペクトルを持つ分数調波振動応答が生起した点に記号△付して, Fig.52 に示す。これらの点は大きく分けて 2 つに分類される。ひとつは外力振動数が 21-23rad/s 近傍にあり, 振動数 10.43-11.66rad/s を持つ 1/2 分数調波振動応答が生起する。他方は, 外力振動数 33-35rad/s 近傍にあり, 振動数 10.43-11.66rad/s を持つ 1/3 分数調波振動応答が生起する。

5.1.2 のケースは, 周方向展開次数が 5 と 6 を有する振動モードが単一のスペクトルを持つ 1/2 分数調波振動応答を構成する。5.1.3 のケースは, 周方向展開次数  $n=5$  を有する Cosine 成分と Sine 成分の振動モードが単一のスペクトルを持つ 1/3 分数調波振動応答を形成する。この時, 周方向展開次数が偶数の振動モードは小さな応答に留まっている。

### 5.2.3 複数のスペクトルを有する分数調波振動応答

単一の卓越スペクトルを持つ点から少し異なる外力振動数, あるいは外力振幅を与えると, 5.1.4 の

ように卓越スペクトルの近傍に振動数の異なる 2 つのスペクトルが発生する。前述したように, これらの和は外力振動数, すなわち基本振動数となる。これらの振動数の差 0.61rad/s は, 系のスロッシング振動モードの応答スペクトルの振動数である。

分数調波振動が発生した応答において, 周方向展開次数  $n=1$  を有するスロッシング振動応答は振動数 0.61rad/s に消滅しないスペクトルを有する。この応答の Cosine 成分, および Sine 成分にそれぞれ記号

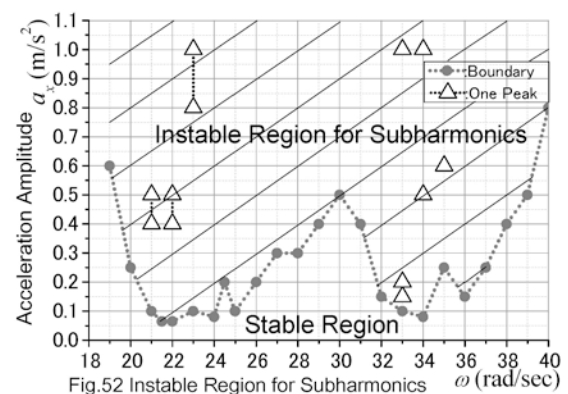


Fig.52 Instable Region for Subharmonics

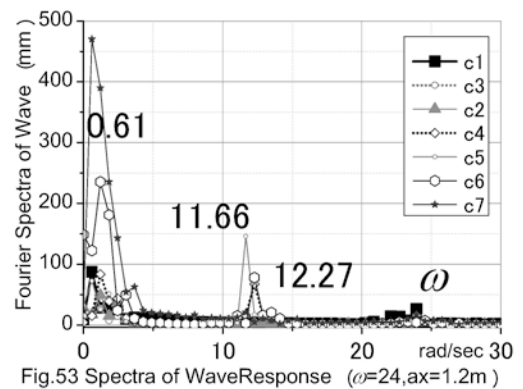


Fig.53 Spectra of WaveResponse ( $\omega=24, a_x=1.2m$ )

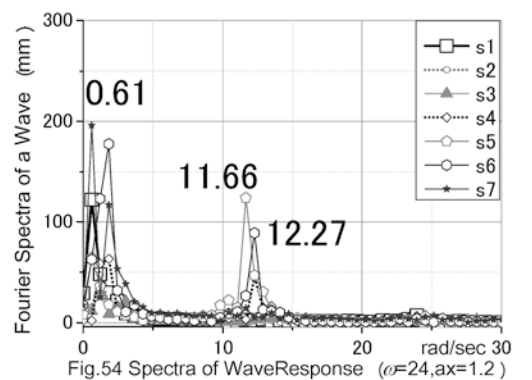


Fig.54 Spectra of WaveResponse ( $\omega=24, a_x=1.2$ )

■, および記号□を付して, Figs.16, 26, 36, および Fig.46 に示した.

5.1.4 のモデルの容器に接する自由表面上における波高の Cosine 成分, および Sine 成分の応答スペクトルを Fig.53, および Fig.54 に示す. 分数調波振動の振動数と卓越スペクトルをとる周方向展開次数モード  $n$  は Fig.34, および Fig.35 と同一である. スロッシング振動のモードの Cosine 成分, および Sine 成分の応答はそれぞれ振動数 0.61rad/s である.

5.1.5 のケースでも主要な 4 個のスペクトルを有する応答を示す. これらのスペクトルの差も 0.61rad/s となる.

#### 5.2.4 周方向展開次数と応答スペクトル

単一のスペクトルを有する分数調波振動生起する 5.1.4, および 5.1.5 のケースにおいて, 周方向展開次数  $n$  が偶数, および奇数を有する振動モードの分数調波振動のスペクトルは同じである.

しかしながら, 一般的に周方向展開次数が偶数, あるいは奇数に対応して, それぞれ異なる振動数を持つ分数調波振動応答が生起し得る. 上記の 2 ケースでは Cosine 成分に周方向展開次数が奇数の振動モードが分岐した時, Sine 成分は周方向展開次数が偶数の振動モードが分岐している. 5.1.2 のケースは周方向展開次数が偶数, および奇数の振動モードがほぼ等しい振動数のスペクトルを持ったと理解することができる. 5.1.3 は Sine 成分の応答がほぼゼロであるとしたケースとなる.

複数のスペクトルを有する分数調波振動応答を 5.1.4, および 5.1.5 に示した.

## 6. 結論

1. 円筒タンクにおけるポテンシャル流体と弾性円筒シェル容器の大変形場における動的連成問題

の汎関数へ有限要素法を用いる直接法を適用して, 定式化し, 解析する方法を示した.

2. 流体が一様膨張する有意で無い解を排除する手法を示し, 連成系の固有振動数を解析し, この系の固有振動モードを図示した.
3. 正弦波の地動を受ける円筒タンクの応答を解析し, 外力振動数と外力の大きさをパラメータとする分数調波振動が分岐する不安定領域があることを示した.
4. 上記不安定領域において, 分岐する分数調波振動が単一の振動数を有する点があることを示し, 応答スペクトルの分析, 分数調波振動応答が発生した振動モードの特定を行った. 1/2 分数調波振動, あるいは 1/3 分数調波振動が生起する点があることを示した.
5. 単一の振動数を有する分数調波振動が発生する点の近傍において, 複数の振動数を持つ分数調波振動が生起する. このようなケースの応答を示した. また, 容器の差分変位, および差分合力の応答も示し, 分数調波振動成分や高調波振動成分が発生することを示した.
6. 正弦波の地動が作用する時, 比較的小さな外力のもとで発生する分数調波振動応答に焦点を合わせて検討してきた. これらの過程において, 提案した手法がタンクにおける流体と容器の大変形連成場の不安定な挙動を十分な精度を持って解析できる手法であることを実証した. 外力が大きな領域で生起する分数調波振動の挙動, 地震による不規則な地動が作用した時の応答や安全性を検討することは次の課題である.

## 謝辞

自作の水平振動台に水の入った円筒タンクを設置し, 8 ビットのパソコンに取付けた AD 変換ボードを制御した測定装置を用いて, 応答を測定する実験を 1984 年に始めました. それ以来多くの学生, お

よび院生がこの振動実験を継続し、耳をつんざく音と共に急激に分岐する分数調波振動応答の特性を把握する研究に従事しました。彼らの献身的な努力に衷心から感謝します。実験で観察されたこの振動現象を理論的に再現するまで、29年を費やしました。

本研究はJSPS 科研費 23560677 の助成を受けたものです。

## 付録1 円筒シェルの有限変形ひずみ表現

有限変形の円筒シェルにおいて剛体変位を除去したひずみ表現を見ることは稀であり、簡単に誘導する。円筒シェルの半径を $r_s$ とすると、Novozhilov<sup>20)</sup>の用いた表記は次式のように表される。

$$\begin{aligned} \hat{e}_{11} &= u_{,x}, \hat{e}_{21} = u_{,\theta} / r_s, \hat{e}_{12} = v_{,x}, \hat{e}_{22} = (v_{,\theta} + w) / r_s, \hat{e}_{13} = -\beta_x, \\ \hat{e}_{23} &= -\beta_{\theta}, \beta_x = w_{,x}, \beta_{\theta} = (w_{,\theta} - v) / r_s \end{aligned} \quad (A1)$$

座標系のパラメータは母線方向、および周方向はそれぞれ $x$ 、および $\theta$ である。(A1)式を利用して面内ひずみは次式のように表され、近似される。

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \hat{e}_{11} + (\hat{e}_{12}^2 + \hat{e}_{13}^2) / 2 \approx \hat{e}_{11} + \hat{e}_{13}^2 / 2 \\ \varepsilon_{\theta} &= \hat{e}_{22} + (\hat{e}_{21}^2 + \hat{e}_{23}^2) / 2 \approx \hat{e}_{22} + (\hat{e}_{22}^2 + \hat{e}_{23}^2) / 2 \approx \hat{e}_{22} + \hat{e}_{23}^2 / 2 \quad (A2) \\ \gamma &= \hat{e}_{12} + \hat{e}_{21} + \hat{e}_{11}\hat{e}_{21} + \hat{e}_{22}\hat{e}_{12} + \hat{e}_{13}\hat{e}_{23} \approx \hat{e}_{12} + \hat{e}_{21} + \hat{e}_{13}\hat{e}_{23} \end{aligned}$$

近似式の最後の表現が本論のひずみ表現である。

曲率、および撓率に関しては、Sanders理論に基づいて、剛体運動が歪を生じさせない次式<sup>21)</sup>を採用した。

$$\kappa_x = \beta_{x,x}, \kappa_{\theta} = \beta_{\theta,\theta} / r_s, \chi = \beta_{\theta,x} + \beta_{x,\theta} / r_s + (v_x - u_{,\theta}) / (2r_s) \quad (A3)$$

これらを用いて、ひずみエネルギー関数は次式のように表される。

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{u}) &= Eh / (1 - \nu^2) \{ (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_{\theta}^2 + \nu \varepsilon_x \varepsilon_{\theta} + (1 - \nu) \gamma^2 / 2) / 2 \} \\ &+ Eh^3 / (1 - \nu^2) \{ (\kappa_x^2 + \kappa_{\theta}^2 + \nu \kappa_x \kappa_{\theta} + (1 - \nu) \chi^2 / 2) / 2 \} \end{aligned} \quad (A4)$$

ここに、 $E$ : ヤング率,  $\nu$ : ポアソン比,  $h$ : シェル厚。

## 付録2 円筒シェルの変位関数

本論文において利用した円筒シェル要素を明示する。この変位関数<sup>17,21,22)</sup>は次式のように表される。

$$\begin{aligned} u &= a_1 x + a_2 x \phi + (3a_{11} R / 4 + a_{10} R^3 - a_{20} R^3) \phi - a_{17} R^3 \phi^2 / 2 - a_{19} R^3 \phi^3 / 6 \\ v &= (a_{11} / 4 - a_{10} R^2 + a_{20} R) x + a_{16} R^2 \phi + a_8 x^2 / 6R + a_{17} R^2 x \phi \\ &+ a_{18} R^2 \phi^2 / 2 + a_{15} R^3 x \phi^2 / 2 - a_{13} x^3 / 6 \end{aligned} \quad (A5)$$

$$\begin{aligned} w &= (a_9 - a_{16} R) R + (a_{10} - a_{17} R) R x - a_{18} R^2 \phi - a_{12} x^2 / 2 - a_{19} x \phi R^2 \\ &- a_{13} x^3 / 6 - a_{14} x^2 \phi / 2 - a_{15} x^3 \phi / 6 \end{aligned}$$

ここに、 $d\phi = d\theta$ ,  $R$ : シェル半径である。これらの変位関数は変位 $u, v, w$ の適合条件を完全に満たしている。要素の各節点における節点変位ベクトルは(10)式の未定係数14個、および剛体変形を表す6個を加えた計20個のパラメータを持つ。

(A5)式の変位関数は、下線付き項を無視すると、Sabir要素<sup>22)</sup>となる。Sabir要素は、高精度の円筒シェル要素と評価されている。Sabir要素の変位関数は、辺の法線方向の回転を次式のように与える。

$$\begin{aligned} \beta_x &= u_{,x} = a_1 + a_2 \phi \\ \beta_{\theta} &= (w_{,\theta} - v) / R = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 - a_{15} x^3 R / (6R) \end{aligned} \quad (A6)$$

ここに、 $C_0, C_1, C_2$ は $x$ を含まない項である。

節点変位は変位と回転を用いているので、法線方向の回転は2次以下の代数関数で表されることが数理的に適切である。

(A5)式の下線を付した項を導入<sup>17)</sup>すると、(A6)式の回転 $\beta_{\theta}$ に含まれる $x$ の3次項は消滅する。この操作は、Sabir要素に物理的な変形拘束を加えるので、要素剛性を高める効果を持つ。

## 参考文献

- 1) Luke, J.C., A variational principle for a fluid with a free surface, J. Fluid Mech, vol.27, part.2, pp.395-397 (1967).
- 2) Clough, R.W., Niwa, A., Clough, D.P.: Experimental Seismic Study of Cylindrical Tanks, Proc. ASCE, vol.105, no. ST12, pp.2565-2597 (1979).
- 3) Haroun, M.A., Housner, G.A. Dynamic Characteristics of Liquid Storage Tanks: Complications in Free Vibration Analysis of Tanks, Proc. ASCE, Vol.108, No. EM5, pp.783-818 (1982).

- 4) 堀直人,谷資信,田中弥寿雄,液体の入った円筒シェルの動的解析,日本建築学会論文報告集,第 282 号,pp.83-94 (1979).
- 5) 松井徹哉,浮屋根式円筒流体貯槽の地震時のスロッシング応答の解析解,日本建築学会構造系論文集第 594 号, pp.167-173 (2005).
- 6) 内海雅彦,石田和雄,日詰雅之,非線形スロッシングによる石油タンク浮屋根の振動に関する研究, IHI 技報,Vol.51,pp.55-62,No.1(2011).
- 7) 皆川洋一,有限変形場でのポテンシャル流体と弾性体容器の相互作用を支配する汎関数,日本建築学会構造系論文報告集第 362 号,pp.105-115 (1986).
- 8) Y.Minakawa, Lagrangian Functions of the Interactive Behavior Between Potential Fluid and Elastic Containers in Fields of Finite Deformations, Shells Membranes and Space Frames, Proceedings IASS Symposium,Osaka, Vol.1 ,pp.73- 80 (1986).
- 9) Y.Minakawa,Nonlinear Oscillation Analysis of Interaction Behaviors Between the Potential Fluid and Tanks of Shell of Revolution in Finite Deformations, 日本建築学会構造系論文報告集 No.435 ,pp.91-107, (1992).
- 10) 山本憲司,皆川洋一,完全流体における非線形スロッシングの有限要素解析法,日本建築学会構造系論文集 No.609,pp.89-96 (2006).
- 11) 皆川洋一,周期的な水平外力を受ける水の入った円筒タンクの非線形振動応答,日本建築学会構造系論文集,第 74 卷,第 642 号,pp.1461-1468 (2009).
- 12) 皆川洋一,自由表面を持つポテンシャル流体と弾性容器との大変形連成問題の直接解,日本建築学会九州支部 49-1,pp.209-212 (2010).
- 13) 皆川洋一,自由表面を持つポテンシャル流体と弾性容器との大変形連成問題の直接解,日本建築学会学術講演梗概集 B-1,251-252 (2010).
- 14) 皆川洋一,自由表面を持つポテンシャル流体と弾性容器との大変形連成問題の解析, 円筒タンクの大変形動的連成問題の定式化,日本建築学会九州支部 50-1,pp.345-348 (2011).
- 15) 山本憲司,皆川洋一,浮屋根ポンツーンの二次モード共振による楕円化変形に関する検討,シングルデッキ型浮屋根を有する円筒液体貯槽の非線形スロッシング解析,日本建築学会構造系論文集,Vol.77,No.671,pp.35-44 (2012).
- 16) 皆川洋一,二次元の自由表面を持つポテンシャル流体と弾性容器との連成問題の数値解析,鹿児島大学工学部研究報告,54 号,pp.7-25 (2012).
- 17) 皆川洋一,平板曲げ四角形要素, および円筒シェル 4 節点要素の高精度化,日本建築学会,九州支部 52・1,265-268 (2013).
- 18) 皆川洋一,自由表面を持つポテンシャル流体と弾性容器との大変形連成問題の解析,円筒タンクの分数調波応答の解析,日本建築学会,九州支部 52・1,269-272 (2013).
- 19) 皆川洋一,DYNAMIC INTERACTIVE BEHAVIOR BETWEEN A POTENTIAL FLUID AND ELASTIC CONTAINER IN LARGE DEFORMATIONS,Part1,日本建築学会構造系論文集,第 78 卷,第 690 号,pp.1439-1448 (2013)
- 20) Novozhilov, Foundation of the Nonlinear Theory of Elasticity, Graylock (1971)
- 21) C.A. ブレビア, J.J. コナー, 有限要素法の基本と応用, ブレイン図書, 昭和 55 年(1980).
- 22) A.B. Sabir, Strain-Based Finite Elements for the Analysis of Cylinders with Holes and Normally Intersecting Cylinders, Nuclear Eng. And Design, vol. 76, 2, pp. 111-120 (1983)
- 23) 数値流体力学編集委員会, 移動境界流れ解析, 東京大学出版会(1995).