鹿児島大学工学部研究報告　第 44 号（2002）

シグモイド型自動抽出制御に関する誤差限界式の改善

高田　等*　　八郷　康敏**　　八野　知博*

AN IMPROVEMENT IN THE ERROR BOUNDS OF THE SIGMOID TYPE AUTOMATIC CHOOSING CONTROL

Hitoshi TAKATA , Yasutoshi HACHIGOU and Tomohiro HACHINO

We have considered the function approximation when designed a sigmoid type automatic choosing control for nonlinear systems. In this control, nonlinear terms of the system are piecewisely linearized by Taylor expansion so as to design the linear optimal controls. These controls are smoothly united into a single nonlinear feedback control by the sigmoid type automatic choosing functions. Performance of this control greatly depends on the approximation of the given system. This paper is concerned with an improvement in the error bounds of the function approximation when designed the sigmoid type automatic choosing control.

Keywords: Automatic choosing control, Sigmoid type, Error bound, Function approximation

1　まえがき

実システムのほとんどは非線形システムである。非線形システムを直接取り扱い、非線形最適制御則を実行するのは、一般に容易ではない。そのため、通常、非線形システムを制御するときには、何らかの方法で非線形システムを線形化し、線形制御理論を適用することが多い。その一つとして、非線形性の強い系の制御に適用可能な自動抽出制御法がある [2]。この手法は、まず与えられた非線形システムの非線形性を考慮して領域分割を行い、各小領域ごとにテーラー展開一次近似により線形化し、区分的線形最適制御則群を構成する。次にこれらをシグモイド型自動抽出関数を用いて滑らかに結合し、全領域を対象とした単一フィードバック制御則を合成する手法である。こうして合成される本制御則は、構造指定型であるため関数近似精度にその制御性能が大きく左右される [1),3),4)]。それ故、誤差限界式のより厳密なものが必要である。

そこで、本論文では与えられた非線形システムと、自動抽出制御法による関数近似システム間の誤差平均ノルムに関する限界式の改善について考察した。その結果、従来の誤差限界式よりも厳密な誤差限界式が導出された。また、誤差限界式を応用し関数近似精度向上の立場から、GA [6] により準最適に制御則のパラメータを求める手法も考案した。数値実験により、従来の誤差限界式との優越性、及び本パラメータ選定法の有効性を確かめた。

2002 年 8 月 31 日受理
*　電気電子工学科
**　博士前期課程電気電子工学専攻

2　問題の設定

システムが１入力の非線形微分方程式：

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \qquad x \in \mathcal{D} \tag{1}$$

で，評価が二次形式：

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(x^T Q x + R u^2\right) dt \tag{2}$$

の制御問題において，駆動ベクトルが

$$g(x) = \varphi g_n(x) \tag{3}$$

の場合を考える。ただし，$\bullet = d/dt$, $x = [x_1, \cdots, x_n]^T \in \mathcal{D}$ は n 次元状態ベクトル，$u \in R$ は制御変数，$f = [f_1, \cdots, f_n]^T \in C^2 \cap \mathcal{D}$ は２回連続微分可能な非線形 n 次元ベクトル値関数で $f(0) = 0$, $\varphi = [0, \cdots, 0, 1]^T$, $g_n(x) \in R$ は連続な非線形実数値関数で $g_n(0) \neq 0$, $\mathcal{D} \subset R^n$ は有界集合の定義域，Q は $n \times n$ 準正定値対称行列，R は正実数である。

問題は、本システムに対する工学上実用的な自動抽出制御則合成時の、精度良い関数近似誤差限界式の導出とその応用である。

3　シグモイド型自動抽出制御

システムの非線形性を考慮し、まず連続微分可能な分離関数 $C : \mathcal{D} \to R$ を導入する。特に制御則合成時の $\mathcal{D}$ の分割が、他の変数 $\{x_i : 2 \leq i \leq n\}$ に比べ、x_1 が最も効果的な場合を

$$C(x) = x_1 \ \in \ D \ \subset \ R \qquad (D = C(\mathcal{D}))$$

とし、以下これについて考察する [1]。ただし C の値域、すなわち C^{-1} の領域 D は連結と仮定する。次に (1) 式の非線形性を考慮して、D に対し有限個の領域分割 $D = \sum_{i=0}^{M} D_i$を行う。各領域 D_i内で展開点$\hat{X}_i$を設け、テーラー展開一次近似による次の線形化を行う。

$$\dot{x} = A_i x + w_i + B_i u \qquad on \quad C^{-1}(D_i) \tag{4}$$

ただし、

$$A_i = \partial f(x)/\partial x^T\big|_{x=\hat{X}_i}\ ,\ w_i = f(\hat{X}_i) - A_i\hat{X}_i\ ,$$
$$B_i = g(\hat{X}_i)。$$

(4) 式は線形制御理論を適用することで

$$\hat{u}_i(x) = -R_i^{-1}B_i^T(P_i x - \xi_i) \tag{5}$$

となる。ただし、P_iはリカッチ方程式：

$$P_i A_i + A_i^T P_i + Q_i - P_i B_i R_i^{-1} B_i^T P_i = 0 \tag{6}$$

の解、ξ_iは次式で表されるベクトルである。

$$\begin{cases} \xi_0 = 0 \\ \xi_i = \left(A_i^T - P_i B_i R^{-1} B_i^T\right)^{-1} P_i w_i \end{cases}$$

これは線形近似システムに対する最適制御則である [5]。$\xi_i \neq 0$ のとき原点において $\hat{u}_i(0) \neq 0$ なるバイアスがあるので、

原点補正関数：

$$\begin{cases} \beta_0(x) = 1 \\ \beta_i(x) = 1 - \exp\left(-x^T S_i x\right) \end{cases}$$

ただし、S_i は $n \times n$ の準正定値対称行列

を導入する。このとき、(5) 式に対する原点補正の制御則は

$$u_i(x) = \hat{u}_i(x)\beta_i(x) \tag{7}$$

となる。このように、区分線形化を用いれば各小領域 D_i ごとの制御則 u_i を得ることが可能となった。しかしこうして得られた制御則 u_i のみでは、まだ非線形システム全体をうまく制御することには無理がある。それ故ここで、連続した一つの制御則に結合する役割を果たすところの、$D_i = [a_i, b_i]$ 上でほぼ１、それ以外の領域ではほぼ零となる解析関数のシグモイド型自動抽出関数：

$$I_{iN}(x) = \frac{1}{1+\exp\left(-2N\left(C(x)-a_i\right)\right)} - \frac{1}{1+\exp\left(-2N\left(C(x)-b_i\right)\right)} \tag{8}$$

を導入する。ここで N は正の実数である。

各小領域ごとに有効な (7) 式の制御則に (8) 式の自動抽出関数を乗じて、次の自動抽出制御則が得られる。

$$u(x) = \sum_{i=0}^{M} u_i(x) I_{iN}(x) \tag{9}$$

これを全領域の制御則と定義する。これは、含まれるパラメータ $\{M, N, a_i, b_i, \hat{X}_i, S_i\}$ 等により最終的に決定されるタイプの構造指定型単一フィードバック制御則である。

以下簡単のため、領域 D_i を改めて $D_i = [a_i, a_{i+1}]$, $D = [a_0, a_{M+1}]$、および (8) 式の自動抽出関数を $I_i =$

$I_{iN}(x)$ と記し

$$\begin{cases} I_0 = 1 - \dfrac{1}{1+\exp\left(-2N\left(x_1 - a_1\right)\right)} \\ I_i = \dfrac{1}{1+\exp\left(-2N\left(x_1 - a_i\right)\right)} \\ \qquad - \dfrac{1}{1+\exp\left(-2N\left(x_1 - a_{i+1}\right)\right)} \\ I_M = \dfrac{1}{1+\exp\left(-2N\left(x_1 - a_M\right)\right)} \end{cases} \tag{10}$$

$$\sum_{i=0}^{M} I_i = 1$$

と定義する。

4 関数近似誤差解析

本論文を通し、以下の定義と準備を行う。

[A1] D の幅を

$l_1 = a_{M+1} - a_0$

[A2] 小領域 D_i の最大幅を

$d = \max(|a_{i+1} - a_i| : 0 \leq i \leq M)$

[A3] $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ の x_1 要素以外の最大幅を

$l = \max(|\max(x_j) - \min(x_j)| : 2 \leq j \leq n)$

[A4] f の要素関数 f_k に対し

$K_{20} = \sup(|\frac{\partial^2 f_k(x)}{\partial x_p \partial x_q}| : 1 \leq k \leq n, 2 \leq p \leq n, 2 \leq q \leq n, x \in \boldsymbol{\mathcal{D}})$

$K_{21} = \sup(|\frac{\partial^2 f_k(x)}{\partial x_1 \partial x_q}| : 1 \leq k \leq n, 2 \leq q \leq n, x \in \boldsymbol{\mathcal{D}})$

$K_{22} = \sup(|\frac{\partial^2 f_k(x)}{\partial x_1^2}| : 1 \leq k \leq n, x \in \boldsymbol{\mathcal{D}})$

[A5] g の要素関数 g_n に対し

$g_n(\hat{X}_i) = 1/b_i \quad , \quad b_{max} = \max(|b_i| : 0 \leq i \leq M)$

$G_{10} = \sup(|\frac{\partial g_n(x)}{\partial x_p}| : 2 \leq p \leq n, x \in \boldsymbol{\mathcal{D}})$

$G_{11} = \sup(|\frac{\partial g_n(x)}{\partial x_1}| : x \in \boldsymbol{\mathcal{D}})$

[A6] $Y(x)$ の平均は $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ の σ 加法族に対する測度が $\mu(x) = \mu(x_2, \cdots, x_n) x_1 / l_1$ のときのルベーグ積分

$E(Y(x)) = \int_{\boldsymbol{\mathcal{D}}} Y(x) d\mu(x)$

$\quad = \int (\int Y(x) d\mu(x_2, \cdots, x_n)) dx_1 / l_1$

であり、Y が x_1 のみの関数のとき

$E(Y(x_1)) = \int_D Y(x_1) dx_1 / l_1$

を意味する。

[A7] ベクトル Y のユークリッドノルムを

$\|Y\| = \sqrt{Y^T Y}$

および $Y = Y(x)$ の二乗平均ノルムを

$\|Y\|_m = \|Y(x)\|_m = \sqrt{E\|Y(x)\|^2}$

[A8] b_i に対し

$L_b = \| \sum_{i=0}^{M} b_i I_i \|_m = \sqrt{E(\sum_{i=0}^{M} b_i I_i)^2}$

[A9] 制御量 u に対し

$U = \sup\{|u(x)| : x \in \boldsymbol{\mathcal{D}}\}$

[A10] シュワルツの不等式から $v, w \in R$ に対し

$E(|vw|) \leq \sqrt{Ev^2}\sqrt{Ew^2}$

[A11] コーシーの不等式は $\alpha_i \in R$ に対し

$(\sum_{i=1}^{M} |\alpha_i|)^2 \leq M \sum_{i=1}^{M} |\alpha_i|^2$

[A12] 分割領域要素に含まれる関数値を

$e_{M(2r-q)} = e_{Mt} = \sum_{i=1}^{M} \int_0^{2N(a_i - a_0)} \frac{y^t}{(1+e^y)^2} dy$

$\quad + \sum_{i=0}^{M-1} \int_0^{2N(a_{M+1} - a_{i+1})} \frac{y^t}{(1+e^y)^2} dy \ ,$

$e_{Mk} = \sum_{i=1}^{M} \int_{a_0}^{a_i} (\frac{|x_1 - \hat{X}_{1i}|}{1+e^{-2N(x_1 - a_i)}})^2 dx_1$

$\quad + \sum_{i=0}^{M-1} \int_{a_{M+1}}^{a_{i+1}} (\frac{|x_1 - \hat{X}_{1i}|}{1+e^{2N(x_1 - a_{i+1})}})^2 dx_1 \ ,$

$e_{2r-q} = \int_0^{\infty} y^{2r-q} (1+e^y)^{-2} dy \ .$

各小領域 D_i ごとに、(7) 式の補正 LQ 制御則 $u_i(x)$ を線形化システム (4) 式の u に代入する。これの重み付き和によって (8) 式の自動抽出制御則 u に関しての線形方程式を導き出し、これを $\dot{x}$ の近似式とする。このため、重みとして (10) 式と [A5] から

$$\mu_i(x) = b_i I_i / \sum_{i=0}^{M} b_i I_i \tag{11}$$

を導入する。これにより、$\dot{x}$ の近似 $\hat{\dot{x}}$ が (3)(9) 式から

$$\begin{aligned} \hat{\dot{x}} &= \sum_{i=0}^{M} \left(A_i x + w_i + B_i u_i(x)\right) \mu_i(x) \\ &= \sum_{i=0}^{M} \left(A_i x + w_i\right) \mu_i(x) \\ &\qquad + \sum_{i=0}^{M} \left(\varphi g_n(\hat{X}_i)\right) u_i b_i I_i / \sum_{i=0}^{M} b_i I_i \\ &= \sum_{i=0}^{M} \left(A_i x + w_i\right) \mu_i(x) \\ &\qquad + \varphi \left(1/\sum_{i=0}^{M} b_i I_i\right) \left(\sum_{i=0}^{M} u_i I_i\right) \\ &= \hat{f}(x) + \hat{g}(x) u \end{aligned} \tag{12}$$

ただし、

$$\hat{f}(x) = \sum_{i=0}^{M} \left(A_i x + w_i\right) I_i b_i / \sum_{i=0}^{M} b_i I_i \tag{13}$$

$$\hat{g}(x) = \varphi\left(1/\sum_{i=0}^{M} b_i I_i\right) \tag{14}$$

となる。結局 (1) 式の非線形システムに対する (9) 式の自動抽出制御則が、線形化システムの重み付き和の (12) 式により導出された。よって与式 (1) 式とその近似 (12) 式との差関数は

$$\eta(x) = \eta_f(x) + \eta_g(x)u \tag{15}$$

となる。ただし、

$$\eta(x) = \dot{x} - \hat{\dot{x}}$$
$$\eta_f(x) = f(x) - \hat{f}(x)$$
$$\eta_g(x) = g(x) - \hat{g}(x)$$

である。この $\eta(x)$ のユークリッドノルムに対するルベーグ積分の意味での平均に関し、次の [定理 1] を得る [1)]。

[定理 1]

システム (1) 式とその近似 (12) 式に対し次が成立する。

$$E\|\eta(x)\| \leq L_{\eta f} \cdot b_{max}/L_b + L_{\eta g} \cdot U/L_b \tag{16}$$

ただし、

$$\eta(x) = \dot{x} - \hat{\dot{x}}$$

$$L_{\eta f} = \left\|\sum_{i=0}^{M}(f(x) - A_i x - w_i) I_i\right\|_m \tag{17}$$

$$L_{\eta g} = \left\|\sum_{i=0}^{M}(g_n(x)b_i - 1) I_i\right\|_m \tag{18}$$

$$b_i = 1/g_n(\hat{X}_i)$$

$$b_{max} = \max_i(|b_i|)$$

$$L_b = \left\|\sum_{i=0}^{M} b_i I_i\right\|_m$$

$$U = \sup\{|u(x)| : x \in \boldsymbol{\mathcal{D}}\}$$

〈証明〉

η_f と η_g に関し、ノルムの平均は (11) ～ (14) 式と [A5] ～ [A10] から

$$\begin{aligned}
E\|\eta_f(x)\| &= E\left\|f(x) - \hat{f}(x)\right\| \\
&= E\left\|\sum_{i=0}^{M}(f(x) - A_i x - w_i) I_i b_i / \sum_{i=0}^{M} b_i I_i\right\| \\
&\leq b_{max} E\left\{\left|\left(\left\|\sum_{i=0}^{M}(f(x) - A_i x - w_i) I_i\right\|\right)\right.\right. \\
&\quad \times \left.\left.\left(\left|1/\sum_{i=0}^{M} b_i I_i\right|\right)\right|\right\} \\
&= b_{max}\left\|\sum_{i=0}^{M}(f(x) - A_i x - w_i) I_i\right\|_m \\
&\quad / \left\|\sum_{i=0}^{M} b_i I_i\right\|_m \\
&= L_{\eta f} \cdot b_{max}/L_b
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
E\|\eta_g(x)u\| &\leq E\|(g(x) - \hat{g}(x))u\| \\
&= E\left\|\left(g(x) - 1/\sum_{i=0}^{M} b_i I_i\right)u\right\| \\
&= E\left\|\sum_{i=0}^{M}(g_n(x)b_i - 1) I_i u / \sum_{i=0}^{M} b_i I_i\right\| \\
&\leq \left\{E\left\|\sum_{i=0}^{M}(g_n(x)b_i - 1) I_i\right\|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \left\{E\left\|1/\sum_{i=0}^{M} b_i I_i\right\|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot U \\
&= L_{\eta g} \cdot U/L_b
\end{aligned} \tag{20}$$

である。ゆえに (15) 式から誤差限界式が

$$E\|\eta(x)\| \leq E\|\eta_f(x)\| + E\|\eta_g(x)u\| \tag{21}$$
$$\leq L_{\eta f} \cdot b_{max}/L_b + L_{\eta g} \cdot U/L_b \tag{22}$$

となり、(16) 式を得る。 (QED)

[定理 1] はこれらの $L_{\eta f}$ と $L_{\eta g}$ が共に小さければ小さいほど、平均の意味で $\eta(x) \to 0$ すなわち $\hat{\dot{x}}$ が $\dot{x}$ に近づくことがわかる。すなわち $\eta(x) \to 0$ で、(12) 式に基づいて合成された自動抽出制御則 (9) 式が、平均の意味で厳密に (1) 式の制御則に近づく。

次に、$L_{\eta f}$ の、より具体的な誤差限界式を導出する。

4.1 f の近似誤差 [1)]

本節では (17) 式について考える。

(4) 式における f のテーラー展開一次近似誤差式は

$$f(x) - A_i x - w_i$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{n} \left.\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_p \partial x_q}\right|_{x=\xi_i} \left(x_p - \hat{X}_{pi}\right)\left(x_q - \hat{X}_{qi}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{2} F_r(\xi_i)\left(x_1 - \hat{X}_{1i}\right)^r$$

と表現される。ただし、

$$\hat{X}_i = [\hat{X}_{1i}, \cdots, \hat{X}_{ni}]^T \quad :\text{テーラー展開点}$$
$$\xi_i = \hat{X}_i + s(x - \hat{X}_i) \qquad (0 < s < 1)$$

$$\left\{\begin{array}{l} F_0(\xi_i) = \sum_{p,q=2}^{n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_p \partial x_q}|_{x=\xi_i} \\ \qquad\qquad \times \left(x_p - \hat{X}_{pi}\right)\left(x_q - \hat{X}_{qi}\right) \\ F_1(\xi_i) = 2\sum_{p=2}^{n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_p}|_{x=\xi_i}\left(x_p - \hat{X}_{pi}\right) \\ F2(\xi_i) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2}|_{x=\xi_i} \end{array}\right. \tag{23}$$

とおく。ゆえに、ベクトル $F_r(\cdot) = [F_{r1}(\cdot), \cdots, F_{rn}(\cdot)]^T$ $(r = 0, 1, 2)$ に対し

$$K_r = \sup\{|F_{rj}(\xi_i)| : \xi_i \in \boldsymbol{\mathcal{D}}\ ,\ x \in \boldsymbol{\mathcal{D}},\ \hat{X}_i \in \boldsymbol{\mathcal{D}}\ ,\ 1 \leq j \leq n\} \tag{24}$$

を定義すれば [A3][A4](23) 式から

$$\left\{\begin{array}{l} K_0 \leq (n-1)^2 K_{20} l^2 \\ K_1 \leq 2(n-1)K_{21} l \\ K_2 = K_{22} \end{array}\right. \tag{25}$$

である。よって (17) 式の $L_{\eta f}$ が

$$L_{\eta f} = \frac{1}{2}\left\|\sum_{i=0}^{M}\left\{\sum_{r=0}^{2} F_r(\xi_i)(x_1 - \hat{X}_{1i})^r\right\} I_i\right\|_m \tag{26}$$

となり、次の [定理 2] を得る。

[定理 2]

f に関し、(17) 式の重み付き区分線形近似誤差 $L_{\eta f}$ に対し、次が成立する。

$$L_{\eta f} \leq \frac{\sqrt{n}}{2}\left[K_0 + \sum_{r=1}^{2} K_r\left(\frac{d}{8}\right)^r\left\{\frac{d(M+1)}{4l_1}\right\}^{\frac{1}{2}}\right.$$
$$\left.+\sum_{r=1}^{2} K_r d^r\left\{1 - \frac{3dN(M+1) + 10M}{12Nl_1}\right\}^{\frac{1}{2}}\right]$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{2}\sqrt{\frac{nM}{2Nl_1}}K_r$$
$$\times\left\{\sum_{q=0}^{2r} {}_{2r}C_q (2N)^{q-2r} e_{M(2r-q)} d^q\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{27}$$

ただし、n は f の次元数、${}_{2r}C_q$ は二項係数、および $N, M, K_0, K_r, l_1, d, e_{M(2r-q)}$ はそれぞれ (8)(9)(24) [A1][A2][A12] で定義されたものである。

〈証明〉

(24) 式から $\tilde{x}_1 = x_1 - \hat{X}_{1i}$ のとき

$$\left(\sum_{i,r} F_r \tilde{x}_1^r I_i\right)^T\left(\sum_{i,r} F_r \tilde{x}_1^r I_i\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i,r} F_{rj}\tilde{x}_1^r I_i\right)^2 \leq n\left(\sum_{i,r} K_r |\tilde{x}_1|^r I_i\right)^2$$

なので (26) 式は

$$L_{\eta f} \leq \frac{\sqrt{n}}{2}\left\|\sum_{i=0}^{M}\sum_{r=0}^{2} K_r\left|x_1 - \hat{X}_{1i}\right|^r I_i\right\|_m$$
$$\leq \frac{\sqrt{n}}{2}\left\{K_0 + \sum_{r=1}^{2} K_r\left\|\sum_{i=0}^{M}\left|x_1 - \hat{X}_{1i}\right|^r I_i\right\|_m\right\} \tag{28}$$

となる。ここで D_i^c を D_i の補集合、$Y|_{D_i}$ を D_i 上のみ Y で、他は零、と記せば

$$\left\|\sum_{i=0}^{M}\left|x_1 - \hat{X}_{1i}\right|^r I_i\right\|_m \leq \left\|\sum_{i=0}^{M}\left|x_1 - \hat{X}_{1i}\right|^r\Big|_{D_i} I_i\right\|_m$$
$$+\left\|\sum_{i=0}^{M}\left|x_1 - \hat{X}_{1i}\right|^r\Big|_{D_i^c} I_i\right\|_m \tag{29}$$

となる。また、$x_1 \in D_i$でかつ$\hat{X}_{1i} \in D_i$のとき

$$\left\{\begin{array}{l} D_i^O = [\hat{X}_{1i} - d/8, \hat{X}_{1i} + d/8] \\ \qquad :\ |x_1 - \hat{X}_{1i}| \leq d/8, I_i \leq 1 \\ D_i^F = [a_i, \hat{X}_{1i} - d/8] \cup [\hat{X}_{1i} + d/8, a_{i+1}] \\ \qquad :\ d/8 \leq |x_1 - \hat{X}_{1i}| \leq d, I_i \leq 1 \end{array}\right. \tag{30}$$

とすると、(29) 式の右辺第 1 項は

$$\left\|\sum_{i=0}^{M}\left|x_1 - \hat{X}_{1i}\right|^r\Big|_{D_i} I_i\right\|_m$$
$$= \left(\frac{d}{8}\right)^r\sqrt{E\left(\sum_{i=0}^{M} I_i\Big|_{D_i^O}\right)^2} + d^r\sqrt{E\left(\sum_{i=0}^{M} I_i\Big|_{D_i^F}\right)^2}$$
$$\leq \left(\frac{d}{8}\right)^r\left\{\frac{d(M+1)}{4l_1}\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$+d^r\left\{\int_{a_0}^{a_{M+1}}\left(\sum_{i=0}^{M} I_i\Big|_{D_i^F}\right)^2 dx_1/l_1\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{31}$$

となる。さらに、$x_1 \in D_i^F$のとき

$$\left\{\begin{array}{l} D_i^{FI} = [a_{i+1} - 1/N, a_{i+1}](0 \le i \le M-1) \\ \quad : \ I_i \le -N/2(x_1 - a_{i+1}) + 1/2 \\ D_i^{FJ} = [a_i, a_i + 1/N](1 \le i \le M) \\ \quad : \ I_i \le N/2(x_1 - a_i) + 1/2 \\ D_i^{FC} = [a_0, \hat{X}_{10} - d/8] \cup [\hat{X}_{1M} + d/8, \\ \quad a_{M+1}] \ : \ I_i \le 1 \\ D_i^{FE} = [\hat{X}_{1(i-1)} + d/8, a_i - 1/N] \cup [a_i + \\ \quad 1/N, \hat{X}_{1i} - d/8](1 \le i \le M) \ : \ I_i \le 1 \end{array}\right. \tag{32}$$

とすると、(31) 式第２項 { } 内は

$$\begin{aligned} &\int_{a_0}^{a_{M+1}} \left(\sum_{i=0}^{M} I_i \Big|_{D_i^F} \right)^2 dx_1/l_1 \\ &\le \sum_{i=0}^{M-1} \int_{a_{i+1}-\frac{1}{N}}^{a_{i+1}} \left\{ -\frac{N}{2}(x_1 - a_{i+1}) + \frac{1}{2} \right\}^2 dx_1/l_1 + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{M} \int_{a_i}^{a_i+\frac{1}{N}} \left\{ \frac{N}{2}(x_1 - a_i) + \frac{1}{2} \right\}^2 dx_1/l_1 \\ &\quad + 1 - \frac{d(M+1)}{4l_1} - \frac{2M}{Nl_1} \\ &= 1 - \frac{3dN(M+1) + 10M}{12Nl_1} \end{aligned} \tag{33}$$

となる。したがって、(29) 式の右辺第１項は以下になる [4)]。

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{i=0}^{M} \left| x_1 - \hat{X}_{1i} \right|^r \Big|_{D_i} I_i \right\|_m \\ &\le \left(\frac{d}{8} \right)^r \left\{ \frac{d(M+1)}{4l_1} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &+ d^r \left\{ 1 - \frac{3dN(M+1) + 10M}{12Nl_1} \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{34}$$

(34) 式は文献 [1] で導出された式の改善式になっている。

一方、(29) 式第２項の２乗は [A6][A11] から

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{i=0}^{M} \left| x_1 - \hat{X}_{1i} \right|^r \Big|_{D_i^c} I_i \right\|_m^2 \\ &= \frac{M}{l_1} \sum_{i=0}^{M} \int_{a_0}^{a_{M+1}} \left(|x_1 - \hat{X}_{1i}|^r \Big|_{D_i^c} I_i \right)^2 dx_1 \\ &= \frac{M}{l_1} \left(\sum_{i=1}^{M} \int_{a_0}^{a_i} + \sum_{i=0}^{M-1} \int_{a_{i+1}}^{a_{M+1}} \right) \\ &\qquad |x_1 - \hat{X}_{1i}|^{2r} I_i^2 dx_1 = * \end{aligned} \tag{35}$$

となる。$\hat{X}_{1i} \in D_i$ で $x_1 \in [a_0 \ , \ a_i]$ のとき、$y = -2N(x_1 - a_i)$ とおけば

$$\left| x_1 - \hat{X}_{1i} \right| \le |x_1 - a_{i+1}| \le \left| \frac{y}{2N} + d \right| \tag{36}$$

となる。また、$\hat{X}_{1i} \in D_i$ で $x_1 \in [a_{i+1} \ , \ a_{M+1}]$ のとき、$y = 2N(x_1 - a_{i+1})$ とおけば

$$\left| x_1 - \hat{X}_{1i} \right| \le |x_1 - a_i| \le \left| \frac{y}{2N} + d \right| \tag{37}$$

となることより、(35) 式は二項定理を用いると以下のようになる。

$$\begin{aligned} * \le &\frac{M}{2Nl_1} \sum_{q=0}^{2r} {}_{2r}C_q \left(\frac{1}{2N} \right)^{2r-q} d^q \\ &\left\{ \sum_{i=1}^{M} \int_0^{2N(a_i - a_0)} \frac{y^{2r-q}}{(1+e^y)^2} dy \right. \\ &\left. + \sum_{i=0}^{M-1} \int_0^{2N(a_{M+1} - a_{i+1})} \frac{y^{2r-q}}{(1+e^y)^2} dy \right\} \end{aligned} \tag{38}$$

(38) 式も文献 [1] で導出の改善式になっている。

したがって (29) 式第２項は

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{i=0}^{M} \left| x_1 - \hat{X}_{1i} \right|^r \Big|_{D_i^c} I_i \right\|_m \\ &\le \sqrt{\frac{M}{2Nl_1}} \left(\sum_{q=0}^{2r} {}_{2r}C_q (2N)^{q-2r} e_{M(2r-q)} d^q \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{39}$$

となる。ここで $\{e_{M(2r-q)}\}$ は [A12] からあらかじめ準備された数値である。

結局、(28)(29)(34)(39) 式から (27) 式が得られ、[定理 2] が証明された。 (QED)

テーラー展開点が小領域の中間点のとき、[定理 2] はさらに精密な次の [定理 3] になる。

[定理 3]

[定理 2] の (27) 式に対し $\hat{X}_{1i} = (a_i + a_{i+1})/2$ のとき、次式が成立する。

$$\begin{aligned} L_{\eta f} &\le E_{bf} \\ &= \frac{\sqrt{n}}{2}(n-1)^2 K_{20} l^2 + \frac{\sqrt{n}}{8}(n-1) K_{21} l d \\ &\left[\left\{ \frac{d(M+1)}{4l_1} \right\}^{\frac{1}{2}} + 4 \left\{ 1 - \frac{3dN(M+1) + 10M}{12Nl_1} \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \\ &+ \frac{\sqrt{n}}{128} K_{22} d^2 \left[\left\{ \frac{d(M+1)}{4l_1} \right\}^{\frac{1}{2}} \right. \end{aligned}$$

$$+16\left\{1-\frac{3dN(M+1)+10M}{12Nl_1}\right\}^{\frac{1}{2}}\Bigg]$$

$$+\sqrt{\frac{nM}{2Nl_1}}(n-1)K_{21}l\left\{\frac{1}{4N^2}e_{M2}+\frac{d}{2N}e_{M1}\right.$$

$$\left.+\frac{d^2}{4}e_{M0}\right\}^{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{nM}{8Nl_1}}K_{22}\left\{\frac{1}{16N^4}e_{M4}\right.$$

$$\left.+\frac{d}{4N^3}e_{M3}+\frac{3d^2}{8N^2}e_{M2}+\frac{d^3}{4N}e_{M1}+\frac{d^4}{16}e_{M0}\right\}^{\frac{1}{2}} \quad (40)$$

ただし $K_{2j}(j=0,1,2)$ は [A4] で定義されたものである。

〈証明〉

$\hat{X}_{1i}=(a_i+a_{i+1})/2$ のとき、(30)(36)(37) 式が

$$\left|x_1-\hat{X}_{1i}\right|=\left|x_1-\frac{a_i+a_{i+1}}{2}\right|$$
$$\le\left|\frac{a_{i+1}-a_i}{2}\right|\le\frac{d}{2} \qquad on \quad x_1\in D$$

$$\left|x_1-\hat{X}_{1i}\right|=\left|x_1-\frac{a_i+a_{i+1}}{2}\right|$$
$$=\begin{cases}\left|-\frac{y}{2N}+a_i-\frac{a_i+a_{i+1}}{2}\right| & on\ x_1\in[a_0,a_i]\\ \left|\frac{y}{2N}+a_{i+1}-\frac{a_i+a_{i+1}}{2}\right| & on\ x_1\in[a_{i+1},a_{M+1}]\end{cases}$$
$$\le\left|\frac{y}{2N}+\frac{d}{2}\right|$$

と改良される。すなわち [定理 2](27) 式右辺第 3 項、第 4 項の d が $d/2$ に置き換えられる。さらに (25) 式を代入したものを E_{bf} と表せば、(40) 式が得られる。

(QED)

次に $L_{\eta g}$ のより具体的な誤差限界式を導出する。

4.2 g の近似誤差

本節では (18) 式について考える。

(4) 式における g に関するテーラー展開式は

$$g_n(x)b_i-1$$
$$=(g_n(\hat{X}_i)b_i-1)+\sum_{p=1}^{M}\left.\frac{\partial g_n(x)}{\partial x_p}\right|_{x=\xi_i}b_i(x_p-\hat{X}_{pi})$$
$$=\sum_{r=0}^{1}\tilde{G}_r(\xi_i)(x_1-\hat{X}_{1i})^r \qquad (41)$$

と表現される。ただし、

$\hat{X}_i=[\hat{X}_{1i},\cdots,\hat{X}_{pi},\cdots,\hat{X}_{ni}]^T$ ：テーラー展開点

$\xi_i=\hat{X}_i+s(x-\hat{X}_i) \qquad (0<s<1)$

$$\begin{cases}\tilde{G}_0(\xi_i)=\sum_{p=2}^{M}\partial g_n(x)/\partial x_p\Big|_{x=\xi_i}\\ \qquad\qquad \times\, b_i(x_p-\hat{X}_{pi})\\ \tilde{G}_1(\xi_i)=\partial g_n(x)/\partial x_1\big|_{x=\xi_i}b_i\end{cases} \qquad (42)$$

とおく。ゆえに、ベクトル $G_r(\cdot)=[\tilde{G}_{r1}(\cdot),\cdots,\tilde{G}_{rn}(\cdot)]^T$ $(r=0,1)$ に対し

$$G_r=\sup\Big\{|\tilde{G}_{rj}(\xi_i)|:\xi_i\in\boldsymbol{\mathcal{D}}\ ,\ x\in\boldsymbol{\mathcal{D}},$$
$$\hat{X}_i\in\boldsymbol{\mathcal{D}}\ ,\ 1\le j\le n\Big\} \qquad (43)$$

を定義すれば [A3][A4](42) 式から

$$\begin{cases}G_0\le(n-1)G_{10}b_{max}l\\ G_1\le G_{11}b_{max}\end{cases} \qquad (44)$$

である。よって (18) 式の $L_{\eta g}$ が

$$L_{\eta g}=\left\|\sum_{i=0}^{M}\left\{\sum_{r=0}^{1}\tilde{G}_r(\xi_i)(x_1-\hat{X}_{1i})^r\right\}I_i\right\|_m \qquad (45)$$

となり、次の [定理 4] を得る。

[定理 4]

g に関し、(18) 式の重み付き区分線形近似誤差 $L_{\eta g}$ に対し次が成立する。

$$L_{\eta g}\le\sqrt{n}\sum_{r=0}^{1}G_r\left[\frac{d}{8}\left\{\frac{d(M+1)}{4l_1}\right\}^{\frac{1}{2}}+\left\{\frac{Me_{Mk}}{l_1}\right\}^{\frac{1}{2}}\right.$$
$$\left.+d\left\{1-\frac{3dN(M+1)+10M}{12Nl_1}\right\}^{\frac{1}{2}}\right]^r \qquad (46)$$

ただし、n は g の次元数、および N,M,G_r,l_1,d,e_{Mk} はそれぞれ (18)(19)(43)[A1][A2][A12] で定義されたものである。

〈証明〉

(43) 式から $\tilde{x}_1=x_1-\hat{X}_{1i}$ のとき

$$\left(\sum_{i,r}\tilde{G}_r\tilde{x}_1^rI_i\right)^T\left(\sum_{i,r}\tilde{G}_r\tilde{x}_1^rI_i\right)$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i,r}\tilde{G}_{rj}\tilde{x}_1^rI_i\right)^2\le n\left(\sum_{i,r}G_r\left|\tilde{x}_1\right|^rI_i\right)^2$$

なので (45) 式は

$$L_{\eta g} \leq \sqrt{n}\left\|\sum_{i=0}^{M}\sum_{r=0}^{1} G_r \left|x_1 - \hat{X}_{1i}\right|^r I_i\right\|_m$$
$$\leq \sqrt{n}\left\{G_0 + G_1\left\|\sum_{i=0}^{M}\left|x_1 - \hat{X}_{1i}\right| I_i\right\|_m\right\} \tag{47}$$

となる。ここで D_i^c を D_i の補集合、$Y|_{D_i}$ を D_i 上のみ Y で他は零、と記せば

$$\left\|\sum_{i=0}^{M}\left|x_1 - \hat{X}_{1i}\right| I_i\right\|_m \leq \left\|\sum_{i=0}^{M}\left|x_1 - \hat{X}_{1i}\right|\Big|_{D_i} I_i\right\|_m$$
$$+\left\|\sum_{i=0}^{M}\left|x_1 - \hat{X}_{1i}\right|\Big|_{D_i^c} I_i\right\|_m \tag{48}$$

となる。また、$x_1 \in D_i$でかつ$\hat{X}_{1i} \in D_i$のとき、(48) 式の右辺第 1 項は (30)(32)(33) 式を用いると

$$\left\|\sum_{i=0}^{M}\left|x_1 - \hat{X}_{1i}\right|\Big|_{D_i} I_i\right\|_m$$
$$\leq \left(\frac{d}{8}\right)\left\{\frac{d(M+1)}{4l_1}\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$+d\left\{1 - \frac{3dN(M+1)+10M}{12Nl_1}\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{49}$$

となる。

一方、(48) 式第 2 項は [A6][A11] から

$$\left\|\sum_{i=0}^{M}\left|x_1 - \hat{X}_{1i}\right|\Big|_{D_i^c} I_i\right\|_m$$
$$\leq \left\{EM\sum_{i=0}^{M}\left(\left|x_1 - \hat{X}_{1i}\right|\Big|_{D_i^c} I_i\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{M}{l_1}}\left\{\sum_{i=1}^{M}\int_{a_0}^{a_i}\left(\frac{|x_1 - \hat{X}_{1i}|}{1+e^{-2N(x_1 - a_i)}}\right)^2 dx_1\right.$$
$$\left.+\sum_{i=0}^{M-1}\int_{a_{M+1}}^{a_{i+1}}\left(\frac{|x_1 - \hat{X}_{1i}|}{1+e^{2N(x_1 - a_{i+1})}}\right)^2 dx_1\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{Me_{Mk}}{l_1}} \tag{50}$$

となる。ここで $\{e_{Mk}\}$ は [A12] からあらかじめ準備された数値である。

結局、(47)(48)(49)(50) 式から (46) 式が得られ、[定理 4] が証明された。 (QED)

テーラー展開点が小領域の中間点のとき [定理 4] はさらに精密な次の [定理 5] になる。

[定理 5]

[定理 4] の (46) 式に対し $\hat{X}_{1i} = (a_i + a_{i+1})/2$ のとき、次式が成立する。

$$L_{\eta g} \leq E_{bg}$$
$$= \sqrt{n}(n-1)G_{10}b_{max}l$$
$$+\frac{\sqrt{n}}{8}G_{11}b_{max}d\left[\left\{\frac{d(M+1)}{4l_1}\right\}^{\frac{1}{2}}\right.$$
$$\left.+4\left\{1 - \frac{3dN(M+1)+10M}{12Nl_1}\right\}^{\frac{1}{2}}\right]$$
$$+\sqrt{\frac{nMe_{Mk}}{l_1}}G_{11}b_{max} \tag{51}$$

ただし $G_{1j}(j=0,1)$ は [A5] で定義されたものである。

〈証明〉

$\hat{X}_{1i} = (a_i + a_{i+1})/2$ のとき、(30) 式が

$$\left|x_1 - \hat{X}_{1i}\right| = \left|x_1 - \frac{a_i + a_{i+1}}{2}\right|$$
$$\leq \left|\frac{a_{i+1} - a_i}{2}\right| \leq \frac{d}{2} \qquad on \quad x_1 \in D$$

と改良される。すなわち [定理 4](46) 式右辺第 3 項の d が $d/2$ に置き換えられる。さらに (44) 式を代入したものを E_{bg} と表せば、(51) 式が得られる。 (QED)

ここで (21) 式の誤差限界式は E_{bf} と E_{bg} から以下とする。

$$E\|\eta(x)\| \leq E\|\eta_f(x)\| + E\|\eta_g(x)u\|$$
$$\leq L_{\eta f}\cdot b_{max}/L_b + L_{\eta g}\cdot U/L_b$$
$$\leq E_{bf}\cdot b_{max}/L_b + E_{bg}\cdot U/L_b \tag{52}$$
$$= E_{\eta f} + E_{\eta g} \stackrel{\text{def}}{=} E_\eta \tag{53}$$

5 数値実験

次の非線形システム

$$\ddot{x} - \dot{x} + \sin\Omega x = (1 + \lambda\sin\pi x)u \tag{54}$$

を考える。ここで、

$$x = [x_1, x_2]^T$$
$$f(x) = [x_2, -\sin\Omega x_1 + x_2]^T$$

$$g(x) = [0, 1 + \lambda \sin \pi x_1]^T$$

より $n = 2$ の (1) 式が得られる。

5.1 従来の誤差限界式との比較

5.1.1 $f(x)$ に関する誤差限界式の比較

まず、従来[1)]の $f(x)$ に関する 誤差限界式との比較のため、領域が等分割での場合について考察する。表1は、分割数が 1 ～ 5 分割で、かつ分割領域が等領域の場合の誤差限界式 E_{bf} の値である。
ただし、各領域は

$$D_i = [(2i-1)/2(M+1), \quad (2i+1)/2(M+1)] \quad (0 \le i \le M)$$

である。また、各パラメータは

$$\hat{X}_{1i} = i/(M+1) \quad (0 \le i \le M)$$
$$l_1 = 1$$
$$\lambda = 0$$
$$N = S_i = 3.4M^2$$

とする。

表 1　$f(x)$ 誤差限界式

Ω	π	2π	3π	4π	5π
M	1	2	3	4	5
N	3	14	31	54	85
E_{bf}[従来[1)]]	0.69	1.03	1.26	1.42	1.53
E_{bf}[本手法]	0.56	0.89	1.11	1.26	1.37

5.1.2 分割領域に対する解析性の比較

従来[1)]の $f(x)$ に関する誤差限界式の分割領域要素は d のみであるため、分割領域に対する精度が十分でない。一方、本誤差限界式では d に加え (38) 式の領域分割点 a_i も解析の対象となるので、その向上が期待できる。表 2 は、4 分割の場合の比較表である。
ただし、

$$d = \max(|a_{i+1} - a_i| : 0 \le i \le M)$$
$$\hat{X}_{1i} = (a_i + a_{i+1})/2 \quad (0 \le i \le M)$$
$$M = 4$$
$$a_0 = -0.1$$
$$a_1 = 0.1$$
$$a_5 = 0.9$$
$$l_1 = 1$$
$$\lambda = 0$$
$$\Omega = \pi$$
$$N = S_i = 10$$

とする。

表 2　分割領域に対する精度比較

a_2	a_3	a_4	E_{bf}[従来[1)]]	E_{bf}[本手法]	d
0.40	0.60	0.80	0.30	0.24	0.30
0.20	0.50	0.70	0.30	0.22	0.30
0.30	0.50	0.50	0.30	0.23	0.30

5.2 U に対する誤差限界式の比較

システム全体に対する誤差限界式 E_η は $f(x), g(x)$ に関する誤差限界式 E_{bf}, E_{bg} より導出された。 E_η 内の要素 $E_{\eta g}$ は (52) 式から U によって左右される。表 3 ～ 5 は、各種の U に対し $M = 2 \sim 5$ の場合の誤差限界式の比較である。
ただし、各領域は

$$D_i = [(2i-1)/2(M+1), \quad (2i+1)/2(M+1)] \quad (0 \le i \le M)$$

である。また、各パラメータは

$$U = \sup\{|u(x)| : x \in \mathcal{D}\}$$
$$\hat{X}_{1i} = i/(M+1) \quad (0 \le i \le M)$$
$$l_1 = 1$$
$$\lambda = 1$$
$$\Omega = \pi$$
$$N = S_i = 10$$

とする。

表 3　$U = 6$ 時の誤差限界式

M	E_η	$E_{\eta f}$	$E_{\eta g}$
2	7.93	0.33	7.60
3	6.87	0.24	6.63
4	6.24	0.19	6.05
5	5.85	0.17	5.68

表 4　$U = 1$ 時の誤差限界式

M	E_η	$E_{\eta f}$	$E_{\eta g}$
2	1.60	0.33	1.27
3	1.34	0.24	1.11
4	1.20	0.19	1.01
5	1.11	0.17	0.95

表5　$U = 0.2$ 時の誤差限界式

M	E_η	$E_{\eta f}$	$E_{\eta g}$
2	0.59	0.33	0.25
3	0.46	0.24	0.22
4	0.39	0.19	0.20
5	0.36	0.17	0.19

5.3 誤差限界式応用のGAによるパラメータ選定

評価関数として

$$PI = \frac{1}{E_{bf} + \tau E_{bg} + 1} - \omega NM \tag{55}$$

を導入する。ただし、τ は、$f(x), g(x)$ に関する誤差限界式の E_{bf}, E_{bg} をほぼ等しい評価要素とするための重みである。ω は領域分割数 M と自動抽出関数の形状 N を最適にするための重みである。 M、N、領域分割点 a_i に関するパラメータ選定が、この評価を用いてGAにより準最適になされた。

表6は、$M = 2 \sim 5$ 固定の場合の GA による最適パラメータ値である。これにより、最終世代の PI が最も高い値を示す分割数 $M = 4$ が最適である。
ただし、a_0, a_1, a_{M+1}に関しては

$a_0 = -\pi/2(M+1), a_1 = \pi/2(M+1)$

$a_{M+1} = \pi(2M+1)/2(M+1)$

である。また各パラメータは

$\hat{X}_{1i} = (a_i + a_{i+1})/2 \quad (0 \le i \le M)$

$l_1 = \pi$

$\lambda = 1$

$\Omega = \pi$

$N = S_i$

$\tau = 0.24$

$\omega = 0.0003$

$Q = diag(20, 1)$

$R = 1$

初期値：$x(0) = 0.5$

応答時間：$t = 10(s)$

とする。なお、GA実行時の設定パラメータは以下とした。

個体数：$M = 30$

文字列の長さ：$L = 8$

交叉確率：$P_c = 0.8$

突然変異確率：$P_m = 0.03$

世代数：30．

表6　準最適パラメータ

M	a_2	a_3	a_4	a_5	N	PI	cost
2	1.57	-	-	-	18	0.26	3.40
3	1.40	2.41	-	-	19	0.26	3.36
4	**0.81**	**1.51**	**2.21**	-	**17**	**0.33**	**2.22**
5	0.68	1.53	2.29	2.46	17	0.30	2.36

6 あとがき

本論文では、シグモイド型自動抽出制御法における関数近似誤差解析を行い、関数近似誤差の平均ノルムに関する誤差限界式の改善について考察した。数値実験により、従来の誤差限界式より本誤差限界式の精度向上が確認された。その際、本誤差限界式は分割領域に対応したものに改善されていることも示された。以上より、自動抽出制御法の制御性能の一解析法として本誤差限界式が有効であることが確かめられた。

参考文献

1) 高田　等：「シグモイド型自動抽出制御に対する関数近似解析」電気学会論文誌、Vol.121-C, No.11, pp.1763-1770 (2001)
2) 西田　幸一：「GAによる自動抽出制御の設計法とその電力系統への適用に関する研究」平成11年度　鹿児島大学　理工学研究科　電気電子工学専攻　修士論文
3) 高田、八郷、八野、松山：「シグモイド型自動抽出関数における関数近似誤差限界の一改善」19回SICE九州支部講演会, pp.51-52 (2000)
4) 高田、八郷、八野：「シグモイド型自動抽出制御誤差限界式の精度向上について」平成13年度電気関係学会九州支部連合大会, p.294 (2001)
5) A. P. Sage and C. C. White III: "Optimum System Control (2nd edition)", Prentice-Hall, Inc. (1977)
6) D. E. Goldberg: "Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learnings", Addison Wesley Pub. Co. Inc. (1989)