中心地モデルと都市システムについての一考察

石　塚　孔　信

1．はじめに

一般に都市経済学においての主要な課題は，1つの都市内部の土地利用と空間構造について分析することであり，その際，用いられる閉鎖都市モデルや開放都市モデルでは，前者においては都市の人口規模は所与のものと仮定されており，後者においても，当該都市以外の状況は，考慮の外におかれている。しかしながら，1つの国や地域には，人口規模が100万人を超える大都市もあれば，5万人にも満たない小都市も存在している。このような各都市の人口規模はどのようにして決まっているのだろうか？各都市は，より大きな地域の一部であり，人口規模も経済システム内の他の都市との関係に依存して決まっている。多数の都市を含んだ経済システムにおいて，規模の異なる都市がどのようなメカニズムで形成されるのかを説明する経済理論は都市システムの理論とよばれている。

都市システムに関する古典的な理論は，クリスタラー（W.Christaller [7]）による中心地理論（central place theory）である。クリスタラーの時代の農業社会においては，都市の主な活動は財の交換を行なう市場とそれに関連するサービスの提供であった。そのような中で中心地理論は，住民の消費する財やサービスを供給する商業活動が空間的にどのように分布するかを説明することを目的としている。

中心地モデルは，都市をその農村後背地に財やサービスを提供するものとしてとらえている。実際，都市はその地域で市場すなわち交換センターとして機能しており，その成長は，都市の集積と農村のサポートの両方に依存している。Beckmann [2] は，都市システムを説明するためにクリスタラーの中心地モデルをはじめて応用した。中心地理論研究は，その後，単にいくつかの中心地概念を用いて都市規模の分布を説明すること（Beckmann and McPherson [3], Beguin [4], Mulligan [8]）から，ミクロ経済学の理論を援用するもの（Beguinn [5], [6], Mulligan [8], [9], Alperovich [1], Taylor [13]）に発展してきた。しかしながら，その精緻化は完全にはなされていない。

本稿では，伝統的な中心地理論のフレームワークに従い，都市システムの空間均衡モデルを発展させ，都市間の輸送費や不均等な2次元の農村地域をモデルに入れることによってその後背地の空間的次元を明らかにしようとしたF.Wang [14] を紹介し，中心地モデルの都市システムへの応用

について考察を加える。このモデルは，中心地モデルを形作るメカニズムを検討するために2つのレベルの都市のみを考察の対象とする。

次節では，都市の2つのレベルの中心地システムの構造を示し，中心地構造を形成する条件について議論する。3節では，具体的なモデルを構成して，市場均衡と空間均衡条件を導く。

2．都市システムの概要

2．1　「大都市」と「小都市」

2つのレベルの都市の中心地システムを想定し，第2レベルの都市のまわりにたくさんの第1レベルの都市があると仮定する。

第1レベルの都市を「小都市」，第2レベルの都市を「大都市」とよぶ。

Von Tünen (1966) が仮定したように各都市は空間的拡がりをもたず，円形の農村地域の中心に立地しているものとする。

都市とその農村後背地を一緒にして一つの地域とする。

すべての農村地域は農業製品を生産する。

第1レベルの工業製品は，小都市と大都市の両方で生産され，それらの農村後背地へ移出される。

第2レベルあるいはそれ以上の工業製品は大都市でのみ生産され，小都市やすべての農村地域に移出される。

第1レベルの工業製品を「局地的財」とよび，第2レベル以上の工業製品を「移出財」とよぶ。

添字jについて小都市をj=A，大都市をj=Bで表現し，添字iは財についての分類を表し，農業製品についてはi＝0，工業製品の局地的財についてはi＝1，移出財についてはi＝2で分類する。

図—1は，このシステムでの財の流れを示している。

農村後背地では，農業製品0を都市AとBに供給している。

局地的財1は，都市A（B）で生産しており，地域A（B）の居住者に供給されている。

移出財2は，大都市Bでのみ生産されており，システム全体に供給されている。

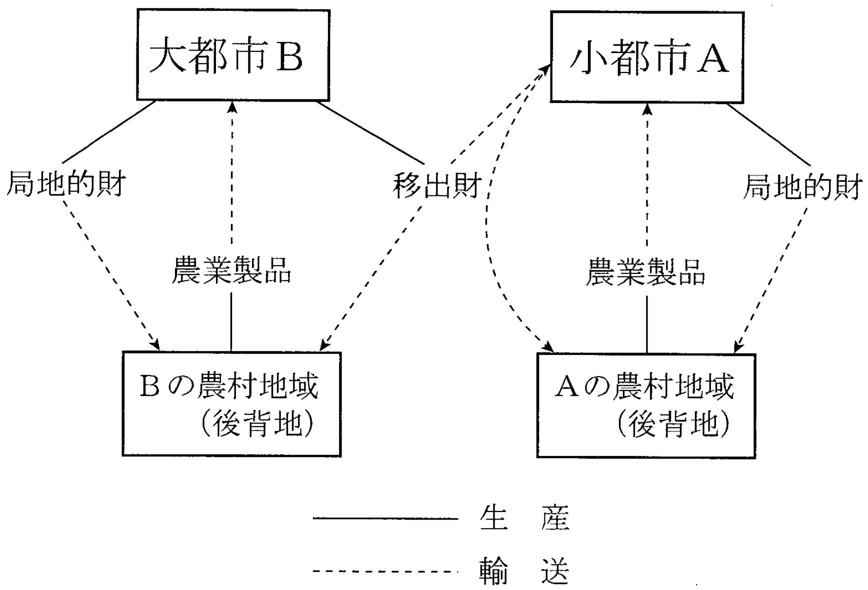
小都市Aの住人は，それが都市BからAに流れた後，移出財を得る。

2．2　空間構造

図—2は，このシステムの空間構造を示している。市場地域は，伝統的な中心地理論における六角形ではなくて円形で示している。したがって，この2次元空間の全範囲は近似的である。

しかしながら，この近似はモデルの一般性を失わない。ここでは，都市の正確な数ではなくて，都市のシステムの構造が，外生的な力の変化にどのように対応するかということを考察するからである。

図－2では，工業製品に対する3種類の市場地域がある。



図－1　都市システムにおける財の流れ

半径 D_A をもつ地域Aの局地的財1に対する市場1A

半径 D_B をもつ地域Bの局地的財1に対する市場1B

移出財2に対する市場2

市場1Aと2Aは第1レベルの市場地域であり，市場1Bのまわりにm個の市場1Aの市場地域がある。すなわち，1つの大都市Bのまわりにm個の小都市が存在する。

地域の空間的サイズ（D_A と D_B）を決定した後にmが決められる。

$$m = \pi / \theta \tag{1}$$

ここで，$\sin\theta = D_A/(D_A + D_B)$ である。

市場2は，第2レベルの市場地域で，地域Bとm個の地域Aの一部h（全部か1部）をカバーする。

市場2の範囲は，大都市Bがお互いにどれだけ離れているかを決定する。

近くの大都市Bは，移出財を地域Aの供給されない部分に供給する。

図—2の点線の円は，市場2を概念的に描いたものであるが実際の境界ではない。

市場2は，実際には地域Bを含み，地域Aの全部あるいは一部分を含む。

ここで，変数mとhを明示的に示すために，伝統的な中心地理論を援用する。

六角形の構造，すなわち，$D_A = D_B$，$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ の構造において，大都市のまわりに常に6つの小都市がある。すなわち，m＝6である。

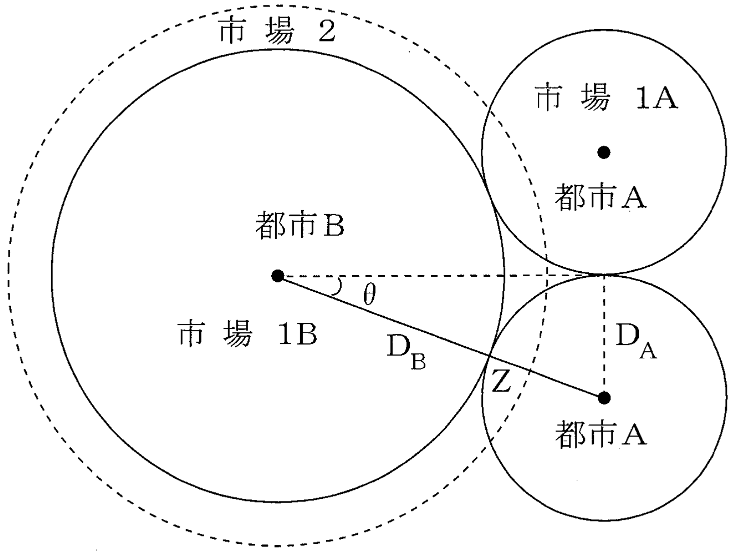
しかしながら，第2レベルの市場地域の範囲（それはhで計られる）は，変化しうる。

図－3において，k＝7のケースは，第2レベルの市場地域が大都市の第1レベルの市場地域と小都市のまわりの6つの第1レベルの市場地域のすべてをカバーしている。すなわち，k＝1＋6×1であることを示している。

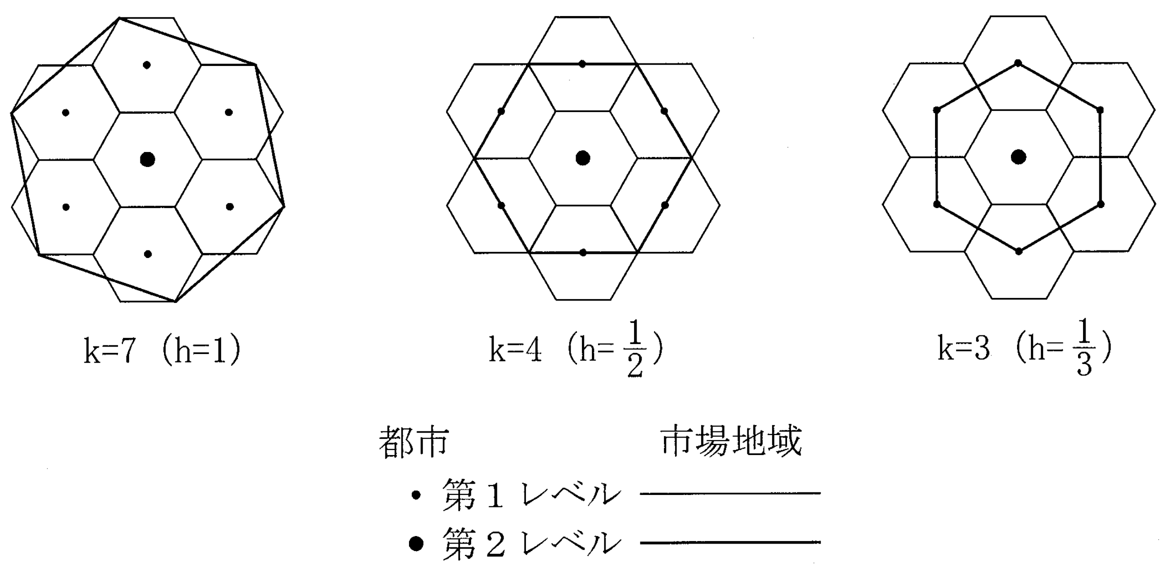
k ＝ 4 のケースは，第 2 レベルの市場地域が大都市の第 1 レベルの市場地域と小都市のまわりの 6 つの第 1 レベルの市場領域の半分をカバーしている。すなわち，$k = 1 + 6 \times \frac{1}{2}$ であることを示している。

k ＝ 3 のケースは，第 2 レベルの市場地域が大都市の第 1 レベルの市場地域と小都市のまわりの 6 つの第 1 レベルの市場地域の 3 分の 1 をカバーしている。すなわち，$k = 1 + 6 \times \frac{1}{3}$ であることを示している。

k が，7 から 4 そして 3 と変化するとき，大都市は，お互いにより接近し，第 1 レベルの市場地域をとりまくより小さな部分しかカバーできなくなる。それは，$h = 1$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$ にそれぞれ対応している。



図－2　都市システムの空間構造

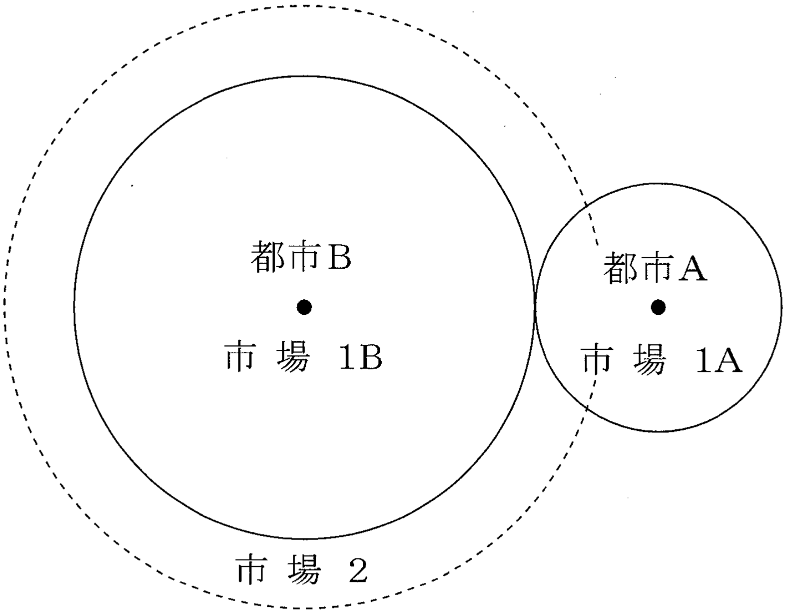


図－3　伝統的な中心理論における k の値

これを一般化すると$k=1+mh$となり，$k-1$が，大都市に対する小都市の割合であることがわかる。$k-1$は，外生変数hとmによって決定される。

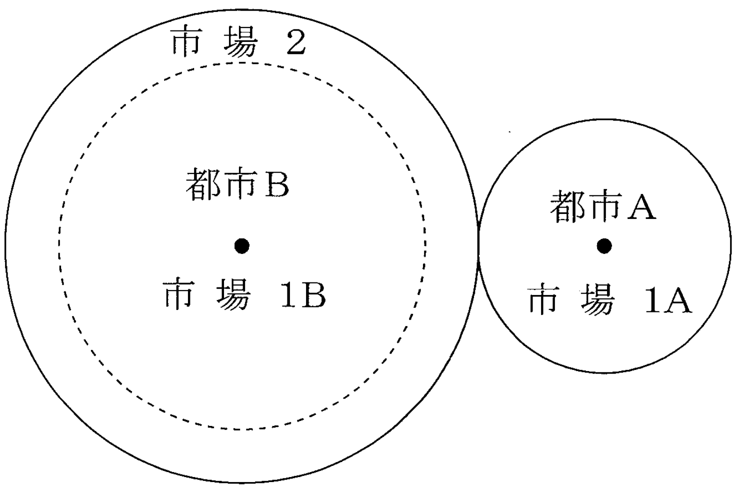
変数hは，中心地構造を形作るために非常に重要な意味を持つ。

$h\in(0,\ 1]$のときにのみ，移出財に対する市場2は地域Bに加えて多くの地域Aの部分をカバーする。（図－4）



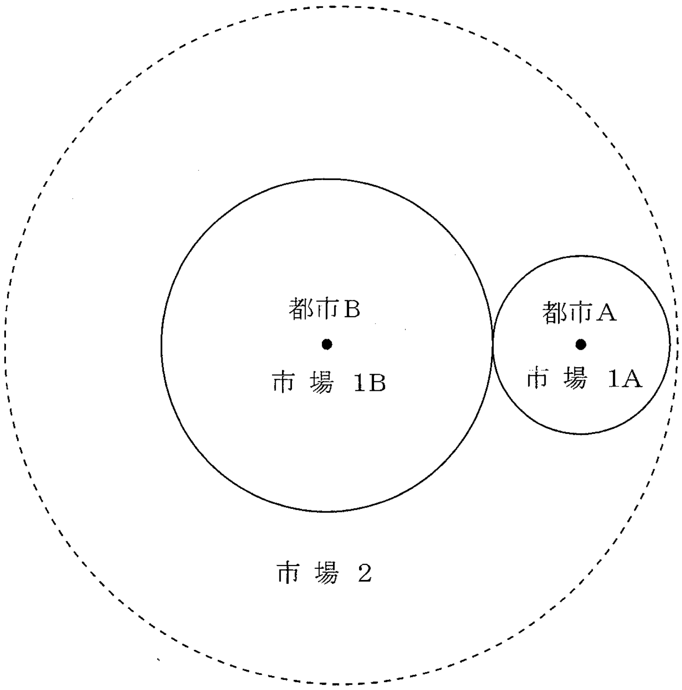
図－4　$0<h\leq 1$のケース

もし，$h\leq 0$ならば，市場2は地域Bより小さいか等しい（図―5）。この場合には，移出財の生産は，地域Bに供給するには少ないかたかだか等しくなるだけである。したがって，中心地構造は形成されない。このことは，財2が実際にはより高次の移出財でないことを示している。



図－5　$h\leq 0$のケース

もし，$h>1$ならば，市場2は，地域Bと地域Aのすべてとそれ以上をカバーする。この場合，財2はより高い順位（たとえば3番目）の財となる。（図－6）



図－6　h＞1のケース

2.4　都市間の輸送費

都市は工業製品と農業製品の両方の市場である。

輸送費は，消費者が負担し，都市からの距離とともに大きくなる。すなわち，都市から離れれば離れるほど交通費が大きくなるため，農村居住者は支払う工業製品の価格は高くなる。一方，農業製品の価格は低くなる。

距離ｓでの財ｉの価格は次のように定式化される。

$$P_i(s) = P_i f_i(s) \tag{2}$$

ここで，ｉ（＝０，１，２）は，農業製品０，局地的工業製品１，移出的工業製品２である。

以下のすべての価格は，輸送費を含む配達価格である。

モデルを数値的に解くために輸送費用関数を次のように仮定する。

$$f_1 = e^{t_1 s},\ f_2 = e^{t_2 s},\ f_0 = e^{-t_0 s} \tag{3}$$

係数 t_i は，輸送費の変化率を示している。すなわち，

$$t_i = \frac{\frac{df_i}{ds}}{f_i} \tag{4}$$

であるからである。

3. モデル

都市における工業製品の供給と農村における農業製品の供給は，利潤最大化条件によって決定される。また，財の需要は，効用最大化問題を解くことによって実現される。

農村地域における，賃金率，人口分布，農業生産物は，すべて都市からの距離と共に変化する。

添字ｊ（＝A，B）は，異なった都市と地域（小都市をA，大都市をB）を示し，添字ｉは財（農業製品を０，局地的工業製品を１，移出的工業製品を２）を示している。また，添字ＣとＲは，都市と農村の領域をそれぞれ示しており，ｓは，都市からの距離を示している。

３．１　都市における工業製品の供給

都市ＡあるいはＢにおける企業についての局地的工業製品１の生産関数は，規模に関する収穫一定の技術を仮定し，次のように定式化される。

$$x_{1j} = g_1 n_{1j}^{\alpha_1} k_{1j}^{1-\alpha_1} \tag{5}$$

ここで，ｎとｋは，企業の労働と資本の投入物であり，添字j＝A，Ｂは，都市A，Ｂを示し，０＜α_1＜１である。またg_1は外生的定数である。

局地的財の生産における同一の企業群（すなわちｆ企業群）の存在を仮定する。

都市AあるいはＢにおける局地的財の生産は，各企業の生産を集計することによって次のように与えられる。

$$X_{1j} = g_1 N_{1j}^{\alpha_1} K_{1j}^{1-\alpha_1} \tag{6}$$

ここで，N_{ij}とK_{ij}は，工業の総労働と総資本投入物（$N_{ij}=fn_{ij}$, $K_{ij}=fk_{ij}$）であり，X_{ij}は，総産出（$X_{ij}=fx_{ij}$）である。そして，g_1は総工業生産と関連しており，次のように定式化できる。

$$g_1 = N_{1j}^{\varepsilon_1} \tag{7}$$

ここで，ε_1＞０は，その産業について，規模に関して収穫逓増を示している。

人口と雇用が等しいと仮定するとN_{ij}は，その産業と密接な関係のある人口である。

都市Ａの産業は，局地的財の生産のみであるから，N_{1A}は，都市規模N_Aと等しい。

w_jは，都市ｊ（＝A，B）の賃金率，ｒを資本コストとし，費用最小化問題を解くと次のような結果が得られる。

$$\frac{N_j}{K_j} = \frac{\alpha_1 r}{(1-\alpha_1) w_j} \tag{8}$$

したがって，総費用は次のような形になる。

$$C = w_j N_{1j} + rK_{1j} = \frac{a_1 X_{1j} w_j^{\alpha_1}}{g_1} \tag{9}$$

このとき，定数a_1は，

$$a_1 = r^{1-\alpha_1}, \alpha_1^{-\alpha_1} (1-\alpha_1)^{-1+\alpha_1} \tag{10}$$

である。(数学注1

この場合，限界費用と平均費用が一致しているので，都市ｊ（＝A，B）における局地的財の価格を利潤最大化条件と(7)より，次のように定義することができる。

$$P_{1j} = a_1 w_j^{\alpha_1} N_{1j}^{-\varepsilon_1} \tag{11}$$

このことから，都市ＡとＢにおける局地的工業製品の価格は異なっていることが解る。さらに，

都市 j（＝A，B）における局地的財 X_{1j} の供給関数が次のように得られる。

$$X_{1j} = \frac{w_j N_{1j}}{\alpha_1 P_{1j}} \tag{12}$$

移出的工業製品 2 は，大都市 B のみで生産され，その生産関数を次のように定義する。

$$X_{2B} = g_2 N_{2B}^{\alpha_2} K_{2B}^{1-\alpha_2} \tag{13}$$

ここで，g_2 は，実際には，都市 B の総工業生産に関係しており，

$$g_2 = N_{2B}^{\varepsilon_2} K_B^{\phi_2} \tag{14}$$

である。

大都市 B での移出財の生産は，産業の規模(地域特化の経済)のみならず，その産業が立地している都市の総人口（都市化の経済）からも便益を得ている。

パラメータ $\varepsilon_2 > 0$ は，地域特化の経済の程度を表しており，$\phi_2 > 0$ は，都市化の経済の程度をあらわしている。

N_{1B} と N_{2B} は，産業 1 と産業 2 のそれぞれの生産に従事する人口である。

N_B は，都市 B での総人口である。すなわち，

$$N_B = N_{1B} + N_{2B} \tag{15}$$

である。

都市 B での移出財 2 の価格は，局地的財の場合と同様に利潤最大化条件より，次のようになる。

$$P_{2B} = a_2 w_B^{\alpha_2} N_{2B}^{-\varepsilon_2} N_B^{-\phi_2} \tag{16}$$

そのとき，定数 a_2 は，

$$a_2 = r^{1-\alpha_2} \alpha_2^{-\alpha_2} (1-\alpha_2)^{-1+\alpha_2} \tag{17}$$

である。

移出財 X_{2B} の供給関数は局地的財の場合と同様に次のように得られる。

$$X_{2B} = \frac{w_B N_{2B}}{\alpha_2 P_{2B}} \tag{18}$$

3.2 都市の財の需要

この地域の居住者は，都市であろうと農村であろうと同一の線形対数効用関数を持っていると仮定し，効用関数を次のように定義する。

$$U = x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} x_0^{1-\mu_1-\mu_2} \tag{19}$$

ここで，μ_1 と μ_2 は，工業製品1,2の消費シェアであり，$(1-\mu_1-\mu_2)$ は，農業製品 0 のシェアである。また，x_1, x_2, x_0 は，各々についての一人当たりの消費である。

賃金率 w は，所得 y の一部である。簡単化のために w は y に比例していると仮定する。すなわち，$y = w / \phi$ とする。$\phi < 1$ は所得調整要素である。

所得制約の下での効用最大化問題を解くと都市 j（＝A，B）についての個人の需要は次のようになる。(数学注 2

$$x^d_{1jc} = \frac{\mu_1 \omega_j}{\phi P_{1j}} \tag{20}$$

$$x^d_{2jc} = \frac{\mu_2 \omega_j}{\phi P_{2j}} \tag{21}$$

$$x^d_{0jc} = \frac{(1-\mu_1-\mu_2)\omega_j}{\phi P_{0j}} \tag{22}$$

ここで，添字Ｃは都市を，Ｒは農村地域を示している。

都市ｊ（＝A，B）の３つの財に対する総需要は，その人口 N_j に対する個々の需要の総計である。

$$X^d_{1jc} = \frac{\mu_1 \omega_j N_j}{\phi P_{1j}} \tag{23}$$

$$X^d_{2jc} = \frac{\mu_2 \omega_j N_j}{\phi P_{2j}} \tag{24}$$

$$X^d_{01jc} = \frac{(1-\mu_1-\mu_2)\omega_j N_j}{\phi P_{0j}} \tag{25}$$

３.３ 農村の構造

ここでは，農村の構造を示す賃金率，人口密度，農業製品の産出量を関数の形で表現する。

⒇，㉑，㉒式を⒆の効用関数に代入するとつぎのような間接効用関数が得られる。(数学注３

$$U = \frac{\mu_1^{\mu_1}\cdot\mu_2^{\mu_2}\cdot(1-\mu_1-\mu_2)^{1-\mu_1-\mu_2}}{\phi}\cdot\frac{w_j}{P_{1j}^{\mu_1}\cdot P_{2j}^{\mu_2}\cdot P_{0j}^{(1-\mu_1-\mu_2)}} \tag{26}$$

距離に関わらず効用が均等であるとすると U(s)＝U，すなわち，

$$\frac{w_j(s)}{P_{1j}^{\mu_1}(s)\cdot P_{2j}^{\mu_2}(s)\cdot P_{0j}^{(1-\mu_1-\mu_2)}(s)} = \frac{w_j}{P_{1j}^{\mu_1}\cdot P_{2j}^{\mu_2}\cdot P_{0j}^{(1-\mu_1-\mu_2)}} \tag{27}$$

を意味している。このとき，農村地域の賃金と価格は距離ｓと共に変化する。最大距離 $s=D_A$(or D_B）は，地域の空間規模を示している。

⑵で定義されている価格変化関数を用いるとわれわれは，都市ｊ（＝A，B）の農村後背地に関する農村賃金関数を得ることができる。

$$w_j(s) = f_1^{\mu_1}(s)\cdot f_2^{\mu_2}(s)\cdot f_3^{1-\mu_1-\mu_2}(s)\cdot w_j \tag{28}$$

農村の人口密度と農産物供給関数は，農業製品の生産関数から導かれる。

農業的財０の生産は，

$$X_{0j}(s) = N_j(s)^{\alpha_0} K_j(s)^{\beta_0} H_j(s)^{1-\alpha_0-\beta_0} \tag{29}$$

であり，そこでは，N，K，Hは，労働，資本，土地投入である。添字ｓは，距離についての変化を示し，ｊは，AとBの農村地域を区別している。また，$0<\alpha_0<1$，$0<\beta_0<1$，$\alpha_0+\beta_0<1$ である。

距離ｓでの土地1単位あたりの産出量と労働量と資本投入量はそれぞれ次のように定義できる。

$$x_{0j} = \frac{X_{0j}(s)}{H_j(s)},\ n_j(s) = \frac{N_j(s)}{H_j(s)},\ k_j(s) = \frac{K_j(s)}{H_j(s)} \tag{30}$$

利潤最大化の一階の条件と㉘式を利用すると農村の人口密度関数

$$n_j(s) = b(P_{0j} w_j^{\beta_0 - 1})^{\frac{1}{1-\alpha_0-\beta_0}} f_{1(s)}^{C_1} f_{2(s)}^{C_2} f_{0(S)}^{C_0} \tag{31}$$

が得られる。そのとき，定数 b，C_1，C_2，C_0 は，次のように定義される。

$$b = (\alpha_0^{1-\beta_0} \beta_0^{\beta_0} r^{-\beta_0})^{\frac{1}{1-\alpha_0-\beta_0}} \tag{32}$$

$$C_1 = \frac{\mu_1(\beta_0 - 1)}{1-\alpha_0-\beta_0} \tag{33}$$

$$C_2 = \frac{\mu_2(\beta_0 - 1)}{1-\alpha_0-\beta_0} \tag{34}$$

$$C_0 = \frac{\beta_0}{1-\alpha_0-\beta_0} - C_1 - C_2 \tag{35}$$

さらに，土地1単位あたりの農業産出量は，次のように導かれる。

$$x_{0j}(s) = \frac{b}{\alpha_0}(P_{0j}^{\alpha_0+\beta_0} w_j^{-\alpha_0})^{\frac{1}{1-\alpha_0-\beta_0}} f_{1(s)}^{C_1+\mu_1} f_{2(s)}^{C_2+\mu_2} f_{0(s)}^{C_0-\mu_1-\mu_2} \tag{36}$$

3.4 農村地域の農業製品の供給

前節で導いた農村の人口密度関数と生産関数から，農村における総供給と総需要を導くことができる。

幅 ds をもつ距離 s での円形の環は 2π sds の領域をもつ。

半径 D_j をもつ農村の全領域にわたって(31)式において，土地1単位あたりの人口 $n_j(s)$ を集計すると総農村人口 N_{0j} を導くことができる。

$$N_{0j} = \int_0^{D_j} n_j(s)(2\pi s)ds \tag{37}$$

すなわち，

$$N_{0j} = 2\pi b(P_{0j} w_j^{\beta_0 - 1})^{\frac{1}{1-\alpha_0-\beta_0}} T_{1j} \tag{38}$$

このとき，j（=A，B）は，都市 A，B の農村地域を意味し，T_{1j} は，次のように積分の形で定義される。

$$T_{1j} = \int_0^{D_j} f_{1(s)}^{C_1} f_{2(s)}^{C_2} f_{0(s)}^{C_0} sds \tag{39}$$

総生産 X_{0j} は，全農村地域にわたって，(36)式での土地一単位あたりの産出 $x_{0j}(s)$ の総計として産出される。

$$X_{0j} = \frac{2\pi b}{\alpha_0} T_{2j} w_j^{-\frac{\alpha_0}{1-\alpha_0-\beta_0}} P_{0j}^{\frac{\alpha_0+\beta_0}{1-\alpha_0-\beta_0}} \tag{40}$$

このとき，T_{2j} は，次のように定義される。

$$T_{2j} = \int_0^{D_j} f_{1(s)}^{C_1+\mu_1} f_{2(s)}^{C_2+\mu_2} f_{0(s)}^{C_0-\mu_1-\mu_2} sds \tag{41}$$

(38)式と(40)式を結合することによって，農村地域における農業製品の供給を得る。

$$X_{0j} = \frac{T_{2j} w_j N_{0j}}{\alpha_0 T_{1j} P_{0j}} \tag{42}$$

3.5 農村の財の需要

農村地域の財の総需要は，個々の需要を集計することによって得られる。それは，賃金率 $w_j(s)$ と価格（$P_{1j}(s)$，$P_{2j}(s)$，$P_{0j}(s)$）と共に変化する。たとえば，局地的財１（X^d_{1jR}）に対する需要は，個々の需要を全農村人口について集めたものであるので次のようになる。

$$X^d_{1jR} = \int_0^{D_j} x^d_{ij}(s)n_j(s)(2\pi s)ds \tag{43}$$

このとき，j（＝A，B）は A あるいは B の地域をあらわし，R は農村地域を示している。

(20)と(31)を(43)に代入すると次のようになる。

$$X^d_{1jR} = \frac{2\pi\mu_1 b(P_{0j}w_j^{-\alpha_0})^{\frac{1}{1-\alpha_0-\beta_0}} T_{3j}}{\phi P_{1j}} \tag{44}$$

このとき，T_{3j} は次のように定義されている。

$$T_{3j} = \int_0^{D_j} f_{1(s)}^{C_1+\mu_1-1} f_{2(s)}^{C_2+\mu_2} f_{0(s)}^{C_0-\mu_1-\mu_2+1} sds \tag{45}$$

(38)と(44)より，

$$X^d_{1jR} = \frac{\mu_1 T_{3j} w_j N_{0j}}{\phi T_{1j} P_{1j}} \tag{46}$$

となる。

同様に，農村地域における移出財 X_2 に対する需要は次のようになる。

$$X^d_{2jR} = \frac{\mu_2 T_{4j} w_j N_{0j}}{\phi T_{1j} P_{2j}} \tag{47}$$

このとき，T_{4j} は次のように定義される。

$$T_{4j} = \int_0^{D_j} f_{1(s)}^{C_1+\mu_1} f_{2(s)}^{C_2+\mu_2-1} f_{0(s)}^{C_0-\mu_1-\mu_2+1} sds \tag{48}$$

さらに，農村地域における農業製品に対する需要は，次のようになる。

$$X^d_{0jR} = \frac{(1-\mu_1-\mu_2)T_{2j} w_j N_{0j}}{\phi T_{1j} P_{0j}} \tag{49}$$

3.6 市場均衡

地域Ａ（あるいはＢ）において局地的財１と農業製品０についての需要と供給は一致している。すなわち，つぎのようになる。

$$X^d_{1jC} + X^d_{1jR} = X_{1j},\quad X^d_{0jC} + X^d_{0jR} = X_{0j} \tag{50}$$

移出財２については，都市Ｂの供給（都市Ｂでしか供給しない）は，都市の全システム（地域Ｂの都市と農村，地域Ａの都市と農村の一部あるいは全部を含む）の総需要と等しい。大都市Ｂのまわりにあるｍ個の小都市Ａとそれぞれの地域Ａのｈの比率の部分は，大都市Ｂによって財やサービスの提供を受けているので，均衡条件は次のようになる。

$$mh(X^d_{2AC} + X^d_{2AR}) + X^d_{2BC} + X^d_{2BR} = X_{2B} \tag{51}$$

このとき，ｍとｈは，共に外生的に決定される。

3.7 空間的均衡

空間的均衡の状態では，効用は全ての都市で等しくなる。したがって，(28)より，次のような関係が得られる。

$$\frac{w_A}{P_{1A}^{\mu_1} P_{2A}^{\mu_2} P_{0A}^{1-\mu_1-\mu_2}} = \frac{w_B}{P_{1B}^{\mu_1} P_{2B}^{\mu_2} P_{0B}^{1-\mu_1-\mu_2}} \tag{52}$$

また，二つの地域の境界では，農業製品の購買価格は均一でなければならない。したがって，

$$P_{0A} f_0(D_A) = P_{0B} f_0(D_B) \tag{53}$$

である。さらに，境界においては，賃金率も同一でなければならないので，

$$w_A(D_A) = w_B(D_B) \tag{54}$$

が成り立つ。(53)と(54)は，２つの農村後背地の境界が農村の賃金と農業製品の価格が２つの地域の側で等しいところで決定されることを意味している。(図－２の点Z)

移出財２の価格については，次のような関係が得られる。

$$P_{2A} = P_{2B} f_2(D_A + D_B) \tag{55}$$

４．おわりに

中心地モデルによる都市システムの理論的分析は，近年，ミクロ経済学的なアプローチによって進展してきている。消費者行動や生産技術や輸送技術のような経済的要因が都市の存在する場所やその大きさを説明するのに用いられてきている。

本稿では，F.Wang [14] を紹介し，中心地モデルの都市システムへの応用について考察を加えた。そこでは，２つの異なった階層の都市（大都市と小都市）を想定し，まず，そこで生産される２レベルの工業製品についての生産関数と費用関数から供給関数を導き，一方で2つの地域の消費者の効用関数からそれらの需要関数を導いている。さらに，都市の後背地である農村の構造を示す賃金率，人口密度，農業製品の産出量と輸送費用関数を用いて農業製品の供給関数と需要関数を求めている。そして，それらの市場均衡条件を局地的財１と農業製品０さらに移出財２についてそれぞれ導き，それらの価格の水準を決定できることを示している。さらに，空間的均衡条件によって，都市Ａと都市Ｂの境界，すなわち，都市規模を決定できることを示している。このように，農村の構造と都市間の輸送費用を明示的に導入して中心地モデルを考察することによって，その地域の経済や技術の変化によって都市システムがどのように変化していくかを見ることが可能になると思われる。

しかしながら，ここでは，より一般的な形の関数を用いて理論的に考察しているために具体的に均衡解を求めることは，数式の展開が複雑になりすぎて困難であった。そのため，具体的な数値例を用いて検証する必要があると思われる。そのことと一般的な均衡解を求めることを共に今後の課題としたい。

[参考文献]

[1] Alperovich, G. "Scale economies and diseconomies in determination of city size distribution.", *Journal of Urban Economics* 12, 1982, pp202-213.

[2] Beckmann, M.j. "City hierarchies and distribution of city size." *Economic Development and Cultural Change* 6, 1958, pp243-248.

[3] Beckmann, M.J., McPherson,J.C. "City Size distribution in a central place hierarchy: an alternative approach.", *Journal of Regional Science* 10, 1970, pp25-33.

[4] Beguin, H. "Urban hierarchy and the rank-size distribution." *Geographical Analysis* 11, 1979, pp149-164.

[5] Beguin, H. "City size distribution, consumption structure, and labor productivity: modeling and simulation results." *Geographical Analysis* 15, 1983, pp156-163.

[6] Beguin, H. "The shape of city-size distribution in a central place system." *Environment and Planning* A 16, 1984, pp749-758.

[7] Christaller, W.*Die zentralen Orte in Süddeutschland.* Fisher Jena, 1933.
クリスタラー. W, 江沢譲爾『都市の立地と発展』大明堂, 1969年.

[8] Mulligan, G.F. "Additional properties of a hierachical city-size model." *Journal of Regional Science* 19, 1979, pp57-66.

[9] Mulligan, G.F "Production function, export base multipliers and urbanization ratio in city systems." *Papers of Regional Science Association* 48, 1981, pp77-88.

[10] Mulligan, G.F "Central place populations: a microeconomic consideration." *Journal of Regional Science* 23, 1983, 83-92.

[11] 中村良平, 田渕俊隆『都市と地域の経済学』有斐閣, 1996.

[12] Parr, J.B "A population density approach to regional spatial structure." *Urban Studies* 22, 1985, pp289-303.

[13] Taylor, C.A "Spatial utility equilibrium and city size distribution in a central place system." *Journal of Urban Economics* 19, 1986, pp1-22.

[14] Wang. F "Modeling a central place system with interurban transport costs and complex rural hinterlands" *Regional Science and Urban Economics* 29, 1999, pp381-409.

［数学注］

1） 次のような費用最小化問題を解く。

$$\min \quad w_j N_{1j}+rK_{1j}=C$$

$$s.t. \quad X_{1j}=g_1 N_{1j}^{\alpha_1}\cdot K_{1j}^{1-\alpha_1}$$

ラグランジュ関数を次のように定式化する。

$$\mathcal{L}=w_{1j}N_{1j}+rK_{1j}+\lambda(X_{1j}-g_1 N_{1j}^{\alpha_1}K_{1j}^{1-\alpha_1})$$

最小化の1階の条件より

$$\frac{\partial L}{\partial N_j}=w_j-\lambda g_1\alpha_1 N_{1j}^{\alpha_1-1}K_{1j}^{1-\alpha_1}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial K_j}=r-\lambda g_1(1-\alpha_1)N_{1j}^{\alpha_1}K_{1j}^{-\alpha_1}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=X_{1j}-g_1 N_{1j}^{\alpha_1}K_{1j}^{1-\alpha_1}=0$$

が成り立つ。よって，

$$\frac{N_{1j}}{K_{1j}}=\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\cdot\frac{r}{w_j},\ K_{1j}=g_1^{-1}(\alpha_1 r)^{-\alpha_1}(1-\alpha_1)^{-\alpha_1}w_j^{\alpha_1}X_{1j}$$

であるから

$$\begin{aligned}C=w_j N_{1j}+rK_{1j}&=w_j\frac{\alpha_1 r}{(1-\alpha_1)w_j}K_{1j}+rK_{1j}\\&=\left(\frac{\alpha_1 r}{1-\alpha_1}+r\right)g_1^{-1}(\alpha_1 r)^{-\alpha_1}(1-\alpha_1)^{\alpha_1}w_j^{\alpha}X_{1j}\\&=g^{-1}r^{1-\alpha_1}(1-\alpha_1)^{\alpha_1-1}\alpha^{-\alpha_1}w_j^{\alpha}X_{1j}\end{aligned}$$

となる。

2） 次のような効用最大化問題を解く。

$$\min \quad U = x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} x_0^{(1-\mu_1-\mu_2)}$$

$$s.t. \quad P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_0 x_0 = y$$

ラグランジュ関数を次のように定式化する。

$$\mathcal{L} = x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} x_0^{(1-\mu_1-\mu_2)} + \lambda(y - P_1 x_1 - P_2 x_2 - P_0 x_0)$$

最小化の１階の条件より

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \mu_1 x_1^{\mu_1 - 1} x_2^{\mu_2} x_0^{(1-\mu_1-\mu_2)} - P_1 \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \mu_2 x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2 - 1} x_0^{(1-\mu_1-\mu_2)} - P_2 \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_0} = (1-\mu_1-\mu_2) x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} x_0^{(-\mu_1-\mu_2)} - P_0 \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = y - P_1 x_1 - P_2 x_2 - P_0 x_0 = 0$$

が成り立つ。この連立方程式を解いて，$y = \dfrac{w}{\phi}$ を考慮すると(20),(21), (22)式が得られる。

3）

$$\begin{aligned} U &= x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} x_0^{(1-\mu_1-\mu_2)} \\ &= \left(\frac{\mu_1 w_j}{\phi P_{1j}}\right)^{\mu_1} \left(\frac{\mu_2 w_j}{\phi P_{2j}}\right)^{\mu_2} \left(\frac{(1-\mu_1-\mu_2) w_1}{\phi P_{0j}}\right)^{(1-\mu_1-\mu_2)} \\ &= \frac{\mu_1^{\mu_1} \cdot \mu_2^{\mu_2} \cdot (1-\mu_1-\mu_2)^{(1-\mu_1-\mu_2)}}{\phi} \cdot \frac{w_j}{P_{1j}^{\mu_1} \cdot P_{2j}^{\mu_2} \cdot P_{0j}^{(1-\mu_1-\mu_2)}} \end{aligned}$$